

zeigten sich die Curven von unregelmässigem Verlauf, und weder im Gewichtsverlust noch in der Stickstoffausscheidung liess sich ein Einfluss des Tyrosinzusatzes zur Nahrung, im Sinne der Escher'schen Arbeit constatiren; ich unterlasse es deshalb die Zahlen mitzutheilen. Natürlich sind diese Versuche durchaus nicht geeignet, über Richtigkeit oder Unrichtigkeit des von Escher gefundenen Verhaltens etwas auszusagen; vielmehr soll diese Mittheilung nur feststellen, dass Tauben zu Versuchen mit Leimfütterung sehr wenig geeignet sind. — Die Versuche werden im Laboratorium an geeigneteren Versuchsthieren fortgesetzt werden.

Zürich, im Mai 1877.

Ueber die Gestalt des Mondes.

Von

A. Beck.

Die Frage nach der wahren Gestalt des Mondes ist schon mehrfach behandelt worden, wobei ganz verschiedene Methoden zur Anwendung gekommen sind. Diese Methoden lassen sich nach zwei Gesichtspunkten gruppiren. Bei der einen Gruppe bildet die Theorie der Mondbewegung den Ausgangspunkt und aus den eigenthümlichen Gesetzen derselben lassen sich gewisse Schlüsse auf die Gestalt des Mondes ziehen. Die andere Gruppe umfasst die Methoden, welche durch directe Messung die Gestalt des Mondes zu bestimmen suchen.

Der erstere, mehr theoretische Weg wurde durch Lagrange und Laplace vorgezeichnet. Das Resultat, zu welchem Laplace in der *Mécanique céleste* geführt wurde,

besteht darin, dass der Mond nicht diejenige Gestalt habe, welche er haben würde, wenn er ursprünglich flüssig gewesen wäre. Wenn man die Mondmasse als homogen und flüssig voraussetzen dürfte, so würde sich für die Gleichgewichtsgestalt des Mondes ein Ellipsoid ergeben, für welches die Differenz der grossen, nach der Erde gerichteten Axe und der Polaraxe viermal so gross ist als die Differenz der dritten und der Polaraxe. Damit stehen aber die Relationen zwischen den 3 Hauptträgheitsmomenten, wie sie die Theorie der Mondbewegung liefert, im Widerspruch.

Die Hauptträgheitsmomente sind abhängig von der physischen Libration des Mondes in Länge, d. h. von einer periodischen Ungleichheit in der Rotationsbewegung des Mondes. Nach der Theorie würde diese Ungleichheit die Form $\mu \sin II$ haben, wo II die mittlere Anomalie der Sonne bezeichnet. Diese Ungleichheit durch Beobachtung zu bestimmen, war der Zweck der grossen Arbeit von Nicollet in der *Connaissance des temps* für 1822 und 1823. Aus 174, grösstentheils von Bouvard angestellten Beobachtungen des Mondberges Manilius leitete Nicollet für die Constante μ den Werth $— 4' 49''$, 7 ab. Die Messungen bestanden darin, dass der Rectascensions- und Declinationsunterschied des Manilius gegenüber dem Mondrand bestimmt wurde und bei der Berechnung der selenographischen Länge und Breite dieses Mondpunktes wurde der Mond als Kugel vorausgesetzt. Trotz der grossen Zahl von Beobachtungen glaubte Nicollet selbst nicht, den gefundenen Werth als einen definitiven annehmen zu dürfen und es ist auch seither bei Bestimmung von selenographischen Längen kein Gebrauch davon gemacht worden.

Ebenfalls auf theoretischem Wege wurde von Hansen aus der Mondbewegung das Resultat abgeleitet, dass

der Schwerpunkt des Mondes nicht mit seinem Mittelpunkt zusammenfalle, sondern um 0,034 des Mondradius weiter von der Erde entfernt sei als der Mittelpunkt.

Der zweite Weg zur Bestimmung der Gestalt des Mondes, derjenige der directen Messung, wurde von H. Gussew eingeschlagen in seiner Abhandlung: «Ueber die Gestalt des Mondes», Bulletin de l'académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg, tome I, N. 5, 1859. Es wurden dazu 2 bei verschiedenen Librationsphasen aufgenommene Photographien des Mondes benützt. Indem für eine Anzahl correspondirender Punkte beider Bilder die Lage gegenüber dem Centrum bestimmt wurde, konnte daraus die Gestalt des Mondes ermittelt werden.

»Demnach wäre die allgemeine Gestalt der Mondoberfläche in dem mittlern Theil der uns zugekehrten Hälfte als eine Kugel zu betrachten von einem kleinern Radius R als der, welcher dem sichtbaren Rande angehört. Die Entfernung des Centrums der Figur von dem Punkte der Knotenlinie,*) welcher als Schwerpunkt bezeichnet werden darf, beträgt in Theilen des Randhalbmessers des Mondes circa 0,07 und die Richtung der Verbindungslinie zwischen beiden Punkten weicht von der scheinbaren Mondmitte bei mittlerer Libration nach Südost etwa um 5° ab« (S. 298). Für den Radius R dieser Kugel wird dann weiter aus den Messungen der Werth 0,982 abgeleitet. Demnach würde also der nach der Erde gerichtete Radius, vom Schwerpunkt ab gezählt, um 0,05

*) Knotenlinie nennt Gussew hier diejenige Gerade „um welche die Drehung des Mondes geschehen müsste, damit die Punkte der Mondoberfläche aus einer gegebenen Lage, relativ dem Beobachter, in eine andere gebracht würden.“

grösser sein als der darauf senkrechte. In Bezug auf die Sicherheit, welche diesem Resultat zukommt, sagt Gussew (S. 290): »Ich bin weit davon entfernt, auf die absolute Grösse dieser Zahlen ein grosses Gewicht zu legen, dagegen glaube ich, dass sie im allgemeinen einen nicht zu verwerfenden Beweis für die durch die Theorie längst begründete, aber durch directe Beobachtungen bis jetzt nicht constatirte Verlängerung des Mondkörpers gegen die Erde zu abgeben können.«

Aus der Abhandlung Gussew's möge noch folgende Stelle angeführt werden: »Vor allen Dingen muss ich sagen, dass die Veranlassung zu meiner Untersuchung durch eine Bemerkung gegeben wurde, die beim Anschauen des oben erwähnten Bildes in einem guten Stereoskop von vielen Personen ganz unabhängig gemacht wurde und die darin bestand, dass der Mond eiförmig und zwar so erschien, als wenn die Spitze des Eies dem Auge zugekehrt wäre. Da die erwähnte Erscheinung fast für alle Augen und in verschiedenen Stereoskopen dieselbe blieb und da es mir unerklärbar schien, dass zwei von einer Kugel abgenommene Bilder einen solchen Effect hervorbringen könnten, kam ich auf die Idee, zur Hebung aller Zweifel diesen Gegenstand durch directe Messung zu prüfen.« Die scheinbare Verlängerung des Mondes nach dem Beobachter zu im Stereoskop ist in der That sehr frappant. Sie ist aber viel zu gross, als dass man sie nicht sofort als eine zum grössten Theil bloss scheinbare erklären müsste. Die Ursache der Täuschung lässt sich in dem Umstand erkennen, dass die relative Lage der beiden Stereoskopbilder und der beiden Augen wohl nie die natürliche ist, d. h. diejenige, welche den betreffenden Librationswerthen sowie den scheinbaren Radien für die Momente der beiden

Aufnahmen entsprechen würde. Es sind dabei namentlich folgende Punkte in Betracht zu ziehen: 1) Da der scheinbare Radius des Mondes nur etwa 15' beträgt, so sind die Stereoskopbilder dem Auge zu nahe; sie müssten also beide weiter entfernt werden. 2) Nimmt man an, dass die beiden Bilder den Maximalwerthen $\pm 8^\circ$ der Libration in Länge entsprechen, so würde sich für den Winkel, den die Linien von den beiden Augen nach den beiden Mittelpunkten einschliessen müssten, 16° ergeben. Im Stereoskop wird dieser Winkel im Allgemeinen einen andern Werth haben; es werden vielleicht jene beiden Linien stärker convergiren, oder sie werden parallel sein oder sie können sogar divergiren, ohne dass das stereoskopische Sehen verhindert würde. Um den richtigen Winkel zu erhalten, müssten also beide Bilder entweder einander genähert oder von einander entfernt werden. 3) Die Mondparallaxe wird nicht in beiden Momenten der Aufnahme genau dieselbe gewesen sein. 4) Die Photographie entspricht der Projection des Mondes auf eine Ebene, die zur Linie Mond-Erde senkrecht steht. Die beiden Projectionsebenen fallen also streng genommen nicht zusammen, sondern bilden jenen Winkel von 16° miteinander. Ein Einfluss der Refraction wird nicht zu befürchten sein, da man bei photographischen Aufnahmen grosse Zenithdistanzen ohnehin vermeiden wird.

Wenn man bedenkt, welche überraschende Empfindlichkeit die beiden Augen für den stereoskopischen Effect zeigen, so lässt sich wohl annehmen, dass die unter 3) und 4) angeführten Momente bei jener Täuschung mitwirken können.

In Bezug auf das unter 1) und 2) Gesagte genügt es, auf die einfachen Beziehungen zu verweisen, welche zwi-

schen dem räumlichen Original und dem im Stereoskop gesehenen ebenfalls räumlichen Bild bestehen und welche von Helmholtz in seiner »physiologischen Optik« (S. 664—673) entwickelt worden sind. Diese Beziehungen sind dieselben, wie sie zwischen einem Object und einem Reliefbild desselben bestehen, d. h. diejenigen der centrischen Collineation. Auf geometrischem Wege lässt sich das mit Leichtigkeit erkennen.

Im Falle 1), wo beide Bilder nur ihre Entfernung vom Auge ändern, erhält man die specielle Beziehung der Affinität. Die Affinitätsebene geht durch die beiden Augen, die Affinitätsrichtung steht senkrecht auf derselben.

Im 2. Fall, wo nur die Entfernung der beiden Bilder von einander geändert wird, liegt das Collineationscentrum in der Mitte zwischen beiden Augen und die Collineationsebene geht wieder durch dieselben hindurch. Der Kugel als Original entspricht nun eine Fläche zweiten Grades als Relief. Der Mond wird also im Stereoskop im Allgemeinen als Fläche zweiten Grades, zunächst als Ellipsoid erscheinen, auch wenn er in Wirklichkeit kugelförmig wäre. —

Auf directer Messung beruht ferner die »Untersuchung des Mondes hinsichtlich seiner ellipsoidischen Gestalt« von Dr. E. Kayser (astronomische Nachrichten, 73. Band, N. 1743, 1869). Die angewandte Methode war eine ganz andere als die vorige. Es wurde vorausgesetzt, dass der Mond ein Ellipsoid sei und die Differenz der Axen desselben bestimmt, indem die Breite der Mondsichel in einem bestimmten Momente direct gemessen wurde. Dieser Moment wurde so gewählt, dass die Sichelbreite unter der Voraussetzung der ellipsoidischen Gestalt möglichst verschieden war von der Breite, die der Kugelgestalt ent-

sprechen würde. Als Resultat wurde gefunden, dass die nach der Erde gerichtete Halbaxe die grössere sei und dass die Differenz der beiden Halbaxen 0,0329 der Polarhalbaxe betrage. In Bezug auf die Sicherheit des Resultates sagt der Verfasser: »Ich bin leider durch Ungunst der Verhältnisse ausser Stande, mehr als die hier mitgetheilte Beobachtung zu bringen. Wenn gleich ich auf meine Beobachtung keinen hohen Werth lege, so glaube ich doch aus der Uebereinstimmung der einzelnen Beobachtungen folgern zu können, dass die gefundene Excentricität*) von 0,0329 bis auf weniger als 0,005 verbürgt werden kann.«

In der vorliegenden Arbeit soll nun die Axendifferenz nach einer andern Methode aus Messungen ermittelt werden, die an verschiedenen Mondbergen zum Zweck der Bestimmung ihrer selenographischen Länge und Breite angestellt worden sind. Man kann diese Axendifferenz als neue Unbekannte einführen und aus einer grossen Zahl von Messungen eines Mondflecks oder mehrerer solcher wird sich diese neue Unbekannte gleichzeitig mit der selenographischen Lage bestimmen lassen. Da ich nicht in der Lage war, selbst Beobachtungen zu diesem Zweck anzustellen, so beschränkte ich mich darauf, das Beobachtungsmaterial zu benützen, welches sich in dem ausgezeichneten Werke: »Der Mond nach seinen kosmischen und individuellen Verhältnissen oder allgemeine vergleichende Selenographie, von W. Beer und Dr. J. H. Mädler, 1837« niedergelegt findet.**)

Diese Messungen, welche

*) Die Bezeichnung Excentricität ist hier offenbar nicht in ihrem strengen Sinn gebraucht.

***) Im Folgenden wird dieses Werk einfach mit B—M bezeichnet werden.

zu dem neuen Zweck benützt werden sollen, waren von April bis December 1831 angestellt worden und hatten dazu gedient, für eine Anzahl von Mondflecken, die als Fixpunkte für eine Triangulirung auf dem Mond dienen sollten, die selenographische Länge und Breite möglichst genau zu bestimmen. Doch mag gleich bemerkt werden, dass die grosse Zahl der zu bestimmenden Punkte es nöthig gemacht hatte, für die Beobachtungen gewisse Vereinfachungen zuzulassen, welche die Genauigkeit immerhin beeinträchtigen mussten. Daher kann die vorliegende Arbeit nicht den Anspruch machen, ein definitives Resultat zu liefern; sie soll nur ein Versuch sein, aus jenem reichen Schatz von Beobachtungen, welche Beer und Mädler schon vor mehr als 40 Jahren anstellten und welche für die Kenntniss unsers Trabanten so vielfältige Früchte trugen, auch auf diese neue Frage nach der eigentlichen Gestalt des Mondes eine Antwort zu erhalten.

Eine wesentliche Rolle spielt hiebei die Libration des Mondes. Zur Berechnung derselben wurde dieselbe Methode wie in $B-M$ angewandt, mit dem einzigen Unterschied, dass die Libration in Länge (selenographische Länge der scheinbaren Mondmitte), l' , sowie der Winkel C zwischen dem Declinationskreis und dem Mondmeridian der scheinbaren Mondmitte in entgegengesetztem Sinn positiv gezählt werden. Die Librationen in Länge, l' , und in Breite, b' , sollen also positiv sein, wenn die scheinbare Mondmitte östlich vom Nullmeridian und nördlich vom Aequator liegt; C ist positiv, wenn der nördliche Theil des Declinationskreises östlich vom Mondmeridian der scheinbaren Mitte fällt. Leider sind die Werthe der Librationen in $B-M$ nicht angegeben. In Folge dessen musste die ganze Berechnung derselben neu durchgeführt werden. In einzelnen

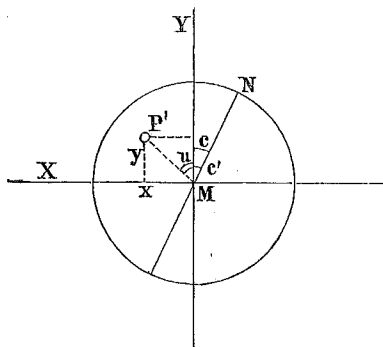
Fällen, wo sich in den selenographischen Längen und Breiten Abweichungen gegenüber $B-M$ zeigten, wurde zur Prüfung noch diejenige Methode zur Berechnung der Libration angewandt, welche Encke im Berliner astronomischen Jahrbuch für 1843 angegeben hat. Beide Methoden führten in allen diesen Fällen zu demselben Resultat. Ferner wurden in denjenigen Fällen, wo der Stundenwinkel des Mondes grösser als 20° war, zur Berechnung der Parallaxe in Rectascension und Declination statt der Hülftafeln in $B-M$ die strengen Formeln benützt. Als Ephemeride diente das Berliner Jahrbuch; die mittlere Länge des Mondes sowie die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn wurde aus den Tafeln von Burckhardt entnommen. Mit grossem Nutzen wurde bei der Berechnung der Höhe des Mondes die «Sammlung von Hülftafeln der Berliner Sternwarte» angewandt.

Berechnung der selenographischen Länge und Breite. Durch die Messung wird für den Punkt auf der Mondoberfläche der Rectascensionsunterschied x und der Declinationsunterschied y gegenüber der scheinbaren Mondmitte bestimmt mit Hülfe des bekannten Mondradius R und der direct gemessenen Rectascensions- und Declinationsunterschiede gegenüber dem Mondrand. Sowohl der Mondradius R als diese Rectascensions- und Declinationsunterschiede sind immer in Umdrehungen der Mikrometerschraube ausgedrückt.

Nach $B-M$ ergibt sich nun die selenographische Länge λ und Breite β unter Voraussetzung der Kugelgestalt aus folgender Gruppe von Formeln:

Nimmt man x, y als rechtwinklige Coordinaten in der Ebene, welche durch den Mondmittelpunkt senkrecht zur Linie Erde-Mond gelegt wird und auf welcher durch den Declinationskreis die y -Axe bestimmt ist (Fig. 1), so

Fig. 1.



erhält man zunächst den Winkel u , welchen der Radiusvector nach der Projection P' des Mondpunktes P mit der y -Axe einschliesst, nach der Formel:

$$1) \quad \operatorname{tg} u = \frac{x}{y}$$

x soll nach Osten, y nach Norden positiv genommen, demgemäss u von der Nordrichtung der y -Axe nach Osten hin gezählt werden.

Ferner ist

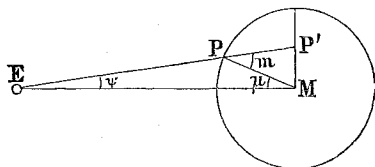
$$2) \quad MP' = \frac{y}{\cos u}$$

Führt man statt des Declinationskreises den Mondmeridian der scheinbaren Mitte ein, so ergibt sich für den Radiusvector der neue Richtungswinkel:

$$3) \quad C' = C + u.$$

Dann folgt weiter in der Ebene, die durch MP und den Beobachter E gelegt wird, für den Winkel m am Mondpunkt P genügend genau (Fig. 2)

Fig. 2.



$$4) \quad \sin m = \frac{MP'}{R} = \frac{y}{R \cos u}$$

und wenn von diesem Winkel die kleine Correction ψ , die sich aus

$$5) \quad \frac{\sin \psi}{\sin m} = \frac{PM}{EM} = \varrho$$

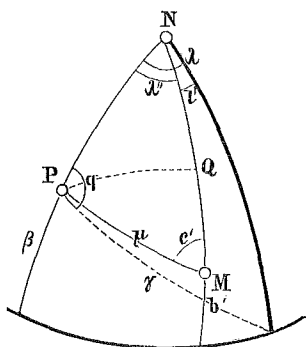
(ϱ = scheinbarer Mondradius in Bogenmass) ergibt, abgezogen wird, so erhält man für den Winkel μ , den der Mondradius nach P mit ME einschliesst:

$$6) \quad \mu = m - \psi$$

Die weitere Rechnung ist die Auflösung des sphärischen Dreiecks auf der Mondkugel, welches durch P , die scheinbare Mondmitte M und den Nordpol N gebildet wird und in welchem (Fig. 3)

$$\begin{aligned} NP &= 90^\circ - \beta, \quad MN = 90 - b', \quad MP = \mu \\ NMP &= C' \quad NPM = q \quad MNP = \lambda'', \end{aligned}$$

Fig. 3.



während die Winkel, welche NP und NM mit dem Nullmeridian einschliessen, mit λ und λ' identisch sind. Legt man durch P den grössten Kreis senkrecht zu MN , wodurch die Hilfsgrösse $MQ = \chi$ eingeführt wird, so hat man schliesslich die logarithmisch bequemen Formeln:

$$7) \quad \operatorname{tg} \chi = \operatorname{tg} \mu \cdot \cos C'$$

$$8) \quad \operatorname{tg} \lambda'' = \frac{\operatorname{tg} C' \sin \chi}{\cos(\chi + b')}$$

$$9) \quad \operatorname{tg} \beta = \cos \lambda'' \operatorname{tg}(\chi + b')$$

$$10) \quad \lambda = \lambda'' + \lambda'$$

Einfluss der Excentricität. Nun soll an Stelle der Kugel ein Rotationsellipsoid gesetzt werden, dessen Hauptaxe in die Schnittlinie des Mondäquators mit dem Nullmeridian fällt und die also auf der Axe senkrecht steht, um welche die Rotation des Mondes thatsächlich stattfindet. Wir nehmen an, die halbe Hauptaxe sei um E grösser als die halbe Polaraxe, E in Theilen der letztern ausgedrückt. Dann ist E die Unbekannte, deren Bestimmung unsere Aufgabe ist. Zunächst würde es sich nun fragen, wie unter der neuen Voraussetzung die Grössen x, y erhalten werden, da

streng genommen der Radius der Mondscheibe nun nicht mehr nach allen Richtungen hin derselbe ist. Nun ist aber die Verschiedenheit dieser Radien eine äusserst kleine. Bessel, der hierüber Heliometermessungen angestellt hat (astronomisches Jahrbuch N. 263), sagt mit Bezug auf 2 Messungsreihen: »Beide Messungsreihen lassen keinen Zweifel übrig, dass der Mond sehr nahe kreisförmig erscheint; die Uebereinstimmung der verschiedenen Halbmesser ist grösser als die die Genauigkeit der Messungen beeinträchtigenden Ungleichheiten am Rande des Mondes erwarten lassen.« Da nun die Messungen in $B-M$ aus verschiedenen Ursachen ohnehin nicht den hohen Grad von Genauigkeit haben, den die vorliegende Aufgabe verlangen würde, so mag es wohl zu rechtfertigen sein, wenn ich mir die vereinfachende Voraussetzung erlaube, dass die Grössen x, y , wie sie bei der Berechnung nach $B-M$ angewandt wurden, ohne weitere Correction auch für das Ellipsoid Geltung haben. Es handelt sich überhaupt hiebei weniger um den absoluten Werth dieser Correction als vielmehr darum, ob der Einfluss, den die Excentricität auf die scheinbare Lage eines Mondpunktes bei verschiedenen Librationsphasen hat, nicht wesentlich grösser sei, als der Einfluss der Excentricität auf den scheinbaren Radius.

Eine kleine Rechnung liefert in Bezug auf diese Frage folgende Zahlenwerthe: Nimmt man an, es sei:

$$E = 0,03, \text{ halbe Polaraxe} = 234,20 \text{ Meilen,}$$

Entfernung des Mondes vom Beobachter = 51829 Meilen, setzt man ferner $b' = 0$, so erhält man als scheinbaren Durchmesser des Mondes, in der Richtung seines Aequators gemessen:

$$\text{für die Libration in Länge } l' = 0 : 31' 4,2$$

$$\text{„ „ „ „ „ } l' = 8^\circ : 31' 5,3$$

Die Differenz der beiden Halbmesser beträgt also $0'',55$.

Betrachten wir nun ferner, um den Einfluss von E auf die scheinbare Lage eines Mondpunktes zu beurtheilen, den Punkt, in welchem der Aequator und der Nullmeridian sich schneiden, für welchen also $\lambda = \beta = 0$ ist und denken wir uns den Mond das eine Mal als Kugel, das andere Mal als Ellipsoid mit $E = 0,03$, so ergibt sich bei $l' = 8^\circ$ für den scheinbaren Ort jenes Mondpunktes unter den beiden verschiedenen Hypothesen eine Differenz von $3'',9$. Diese Zahl ist das 7fache von jener Differenz der beiden Radien.

Es kommt nun aber noch ein weiterer Umstand hinzu, welcher das Verhältniss noch günstiger gestaltet. Denken wir uns nämlich die entgegengesetzte Librationsphase $l' = -8^\circ$, so ist der Einfluss, den dieselbe auf den scheinbaren Radius hat, derselbe wie vorhin, sobald unsere Annahme, dass die vordere und die hintere Mondhälfte congruent seien, zulässig ist. Dagegen äussert sich nun der Einfluss auf den scheinbaren Ort jenes Mondpunktes in entgegengesetztem Sinn. Die beiden x -Coordinaten werden also um denselben Betrag (die Correction des Radius) und in demselben Sinn fehlerhaft sein, falls bei der zweiten Beobachtung derselbe Mondrand benützt worden ist wie bei der ersten. Es würde also der Fehler im Radius vollständig eliminirt werden, wenn man je 2 Messungen miteinander combiniren würde, die bei entgegengesetzten Librationsphasen angestellt sind, dabei aber sich auf denselben Mondrand beziehen. Es würde dann nur die Lage des Punktes fehlerhaft berechnet werden, aber nicht E . Jedenfalls wird es wünschenswerth sein, dass für die Messungen eines und desselben Punktes die positiven und negativen Werthe von l' und b' möglichst gleichmässig vorkommen und dass bei den Messungen der gleichen Coordinate immer der gleiche Rand benützt werde.

Berechnung von E . Aus jeder Serie von Messungen, die sich auf einen und denselben Mondpunkt beziehen, sind nun als Unbekannte die 3 Grössen E, λ, β zu bestimmen. Wollte man dabei ausgehen von der Gleichung des Ellipsoides, so würde man auf sehr complicirte Formeln kommen. Die ganze Rechnung nimmt aber einen sehr viel einfachern Charakter an, wenn man nicht die Gleichung des Ellipsoides anwendet, sondern die Eigenschaft desselben, dass es zu der eingeschriebenen Kugel in die Beziehung der Affinität gesetzt werden kann. Nimmt man die 90° -Meridianebene des Mondes als Fundamental- oder Affinitätsebene, so kann aus jener Kugel das Ellipsoid dadurch abgeleitet werden, dass man alle auf dieser Ebene senkrechten Ordinaten der Kugel in dem Verhältniss $1:1 + E$ vergrössert. Von dieser Eigenschaft kann man nun in folgender Weise Gebrauch machen:

Durch den Punkt des Ellipsoides, auf den sich die Messungen beziehen, lege man eine Kugel, die mit dem Ellipsoid, also auch mit der eingeschriebenen Kugel concentrisch ist. Der Radius dieser Kugel wird zwischen r und $r(1 + E)$ liegen, wenn r der Radius der eingeschriebenen Kugel ist; er sei

$$r' = r(1 + e).$$

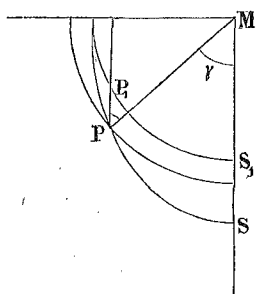
Würde nun bei der Berechnung von λ, β , nachdem einmal die Grössen x, y wie oben bestimmt worden sind, statt der Kugel vom Radius r eine solche vom Radius r' zu Grunde gelegt, so würden, abgesehen von den Beobachtungsfehlern, alle einzelnen Messungen dieselben Werthe für λ, β liefern, während sie für die Kugel vom Radius r in Folge der Verschiedenheiten in den Librationswerthen verschiedene Resultate geben. Unsere Aufgabe ist also die, denjenigen Werth von e zu bestimmen, für welchen die Abweichungen

in den berechneten Werthen von λ , β möglichst klein werden.

Ist diese Grösse e für einen Punkt bestimmt, so lässt sich aus derselben die eigentliche Unbekannte E auf Grund der oben angeführten Eigenschaft ableiten. Aus λ und β ergibt sich zunächst der Winkel γ zwischen MP und der Hauptaxe des Ellipsoides nach der Formel (Fig. 3 und Fig. 4).

$$\cos \gamma = \cos \lambda \cos \beta$$

Fig. 4.



Dieser Winkel ist aber gleich dem Winkel, den PM mit der Ordinate von P einschliesst und bei der Kleinheit der Grösse e wird das Stück dieser Ordinate zwischen den beiden Kugeln durch die Formel ausgedrückt werden:

$$PP_1 = \frac{er}{\cos \gamma}$$

Die Ordinate von P_1 ist aber $= r \cos \gamma$. Wir erhalten also für E oder das Verhältniss von PP_1 zur Ordinate von P_1 oder von SS_1 zur Ordinate von S_1 den Werth:

$$11) \quad E = \frac{e}{(\cos \lambda \cos \beta)^2}$$

Auf diese Weise haben wir den Vortheil erreicht, die ganze Rechnung mit den für die Kugel geltenden Formeln 1)–10) durchführen zu können. In diese Formeln kommt aber nun die Grösse e als dritte Unbekannte hinein.

Seien λ' , β' selenographische Länge und Breite auf der Kugel vom Radius r' . Dann handelt es sich darum, die beobachteten Grössen x , y als Functionen der drei Grössen r' , λ' , β' darzustellen.

Sei

$$\begin{aligned}x &= f(r', \lambda', \beta'), \\y &= f_1(r', \lambda', \beta'),\end{aligned}$$

so gibt uns der Taylor'sche Satz, wenn wir r als Näherungswerth für r' nehmen und mit λ_0, β_0 Näherungswerthe für λ', β' bezeichnen:

$$\begin{aligned}12) \quad x &= f(r, \lambda_0, \beta_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_0 \Delta r + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_0 \Delta \lambda + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)_0 \Delta \beta. \\y &= f_1(r, \lambda_0, \beta_0) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial r}\right)_0 \Delta r + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda}\right)_0 \Delta \lambda + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \beta}\right)_0 \Delta \beta.\end{aligned}$$

Die höheren Potenzen von $\Delta r, \Delta \lambda, \Delta \beta$ können wegen der Kleinheit dieser Grössen vernachlässigt werden. Δr ist nichts anderes als $e \cdot r$, $\Delta \lambda$ und $\Delta \beta$ sind jetzt die zweite und dritte Unbekannte. $f(r, \lambda_0, \beta_0)$ und $f_1(r, \lambda_0, \beta_0)$ oder kürzer x_0 und y_0 sind die Werthe, die wir für x und y erhalten, wenn wir unter Zugrundelegung der Näherungswerthe λ_0, β_0 die Formeln 1.)—10.) in umgekehrter Reihenfolge auf die Kugel vom Radius r anwenden. Es handelt sich nun darum, die Coefficienten $\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \lambda}, \frac{\partial f}{\partial \beta}, \dots$ durch möglichst einfache Formeln darzustellen. Dabei wird sich zeigen, dass statt der Hilfsgrösse χ zweckmässiger der Winkel $q = \sphericalangle NPM$ (Fig. 3.) einzuführen ist.

Aus 1.) folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\cos^2 u} &= \frac{\partial x}{y} - \frac{x}{y^2} \partial y = \frac{\partial x}{y} - \frac{\operatorname{tg} u}{y} \partial y. \\ \partial u &= \frac{\cos^2 u}{y} \partial x - \frac{\sin u \cos u}{y} \partial y\end{aligned}$$

oder mit Hülfe von 4.):

$$\partial u = \frac{\cos u}{R \sin m} \partial x - \frac{\sin u}{R \sin m} \partial y.$$

Die Differentiation von 4.) gibt:

$$R \cos m \cdot \partial m + \sin m \cdot \partial R = \frac{\partial y}{\cos u} + \frac{y \operatorname{tg} u}{\cos u} \cdot \partial u.$$

Hier ist nun zu setzen

$$\partial R = e \cdot R \quad (R = \text{Radius in Mikrometerwindungen}).$$

Löst man dann nach ∂m auf und benützt 4.), so folgt:

$$\partial m = \frac{\partial y}{R \cos u \cdot \cos m} + \operatorname{tg} m \cdot \operatorname{tg} u \cdot \partial u - e \operatorname{tg} m.$$

Durch Einsetzung des obigen Werthes von ∂u erhält man hieraus:

$$\partial m = \frac{\sin u}{R \cos m} \partial x + \frac{\cos u}{R \cos m} \partial y - e \operatorname{tg} m.$$

Die Gleichung 5.) gibt:

$$\partial \psi \cdot \partial \psi = \varrho \cos m \cdot \partial m + \sin m \cdot \partial \varrho$$

ϱ ist der Mondradius in Bogenmaass; für $\partial \varrho$ ist wieder zu setzen $e \cdot \varrho$. Führt man ferner für ∂u den oben gefundenen Werth ein, so wird:

$$\partial \psi = \frac{\varrho \sin u}{R \cos \psi} \partial x + \frac{\varrho \cos u}{R \cos \psi} \cdot \partial y.$$

Nun liefert weiter die Gleichung 6.)

$$13) \quad \partial \mu = \partial m - \partial \psi$$

$$= \frac{\sin u}{R \cos m} \left(1 - \frac{\varrho \cos m}{\cos \psi}\right) \partial x + \frac{\cos u}{R \cos m} \left(1 - \frac{\varrho \cos m}{\cos \psi}\right) \partial y - e \operatorname{tg} m$$

und die Gleichung 3.)

$$14) \quad \partial C' = \partial u = \frac{\cos u}{R \sin m} \partial x - \frac{\sin u}{R \sin m} \partial y.$$

Jetzt haben wir in dem sphärischen Dreieck NMP die Grössen $\partial \mu$, $\partial C'$ durch die Grössen $\partial \lambda$, $\partial \beta$ auszudrücken. Dabei führen wir jenen Winkel q ein, indem wir ausgehen von den beiden Formeln:

$$15) \quad \cos \beta \sin q = \sin C' \cos b'$$

$$16) \quad -\cos q = \cos \lambda'' \cos C' - \sin \lambda'' \sin C' \sin b'.$$

Aus den durch Differentiation hieraus abzuleitenden Gleichungen ist ∂q zu eliminiren. Da nach Formel 10.)

$$\partial \lambda'' = \partial \lambda,$$

so erhalten wir auf diese Weise eine Gleichung zwischen $\partial \lambda$, $\partial \beta$, $\partial C'$. 16.) gibt:

$$\sin q \cdot \partial q = (-\cos \lambda'' \sin C' - \sin \lambda'' \cos C' \sin b') \partial C' - (\cos C' \sin \lambda'' + \sin C' \cos \lambda'' \sin b') \partial \lambda = -\sin q \cos \mu \cdot \partial C' - \sin q \sin \beta \cdot \partial \lambda.$$

$$17) \quad \partial q = -\cos \mu \partial C' - \sin \beta \cdot \partial \lambda.$$

Differentiirt man 15.) und setzt für $d q$ seinen Werth ein, so erhält man:

$$(\cos b' \cos C' + \cos \beta \cos q \cos \mu) \partial C' = -\cos \beta \cos q \sin \beta \cdot \partial \lambda - \sin q \sin \beta \partial \beta.$$

und daraus unter Anwendung einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie:

$$18) \quad \sin \mu \cdot \partial C' = -\cos q \cos \beta \cdot \partial \lambda - \sin q \cdot \partial \beta.$$

Eine zweite Gleichung, die eine Beziehung zwischen $\partial \mu$, $\partial \lambda$, $\partial \beta$ darstellt, ergibt sich aus der Formel:

$$\cos \mu = \sin b' \sin \beta + \cos b' \cos \beta \cos \lambda''.$$

Man erhält durch Differentiation:

$-\sin \mu \cdot \partial \mu = (\sin b' \cos \beta - \cos b' \sin \beta \cos \lambda'') \partial \beta - \cos b' \cos \beta \sin \lambda'' \partial \lambda''$
und hieraus mit Hülfe einiger Formeln der sphärischen Trigonometrie:

$$19) \quad \partial \mu = \cos b' \sin C' \cdot \partial \lambda - \cos q \cdot \partial \beta.$$

Diese beiden Werthe für $\partial C'$ und $\partial \mu$ aus 18.) und 19.) sind nun den in 13.) und 14.) durch e , ∂x , ∂y ausgedrückten gleichzusetzen. Dabei bezeichnen wir zur Abkürzung:

$$20) \quad 1 - e \frac{\cos m}{\cos \psi} = \frac{1}{\alpha}$$

Dann erhalten wir:

$$21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin u}{R \cos m} \partial x + \frac{\cos u}{R \cos m} \partial y = e \cdot \alpha \operatorname{tg} m + \alpha \cos b' \sin C' \partial \lambda - \alpha \cos q \cdot \partial \beta \\ \frac{\cos u}{R \sin m} \partial x - \frac{\sin u}{R \sin m} \partial y = -\frac{\cos q \cdot \cos \beta}{\sin \mu} \partial \lambda - \frac{\sin q}{\sin \mu} \partial \beta \end{array} \right.$$

Diese beiden Gleichungen sind nach ∂x und ∂y aufzulösen. Der Bruch $\frac{\sin \mu}{\sin m}$ lässt sich noch durch α ausdrücken. Es ist nach 6.)

$$\sin \mu = \sin m \cos \psi - \cos m \sin \psi$$

Wird für $\sin \psi$ sein Werth aus 5.) eingesetzt, so erhält man:

$$\frac{\sin \mu}{\sin m} = \cos \psi \left(1 - e \frac{\cos m}{\cos \psi} \right) = \frac{\cos \psi}{\alpha}.$$

Hier ist noch zu bemerken, dass ψ immer ein sehr kleiner Winkel ist. Er kann überhaupt nicht grösser werden als der scheinbare Mondradius (Fig. 2), erreicht aber diese Grenze bei weitem nicht, da für unsern Zweck solche Mondpunkte gewählt werden müssen, die der scheinbaren Mondmitte möglichst nahe liegen. Wir dürfen also unbedenklich $\cos \psi = 1$ nehmen. Ferner ist

$$\cos b' \sin C' = \sin q \cdot \cos \beta.$$

Dieses berücksichtigt, nimmt die Auflösung der beiden Gleichungen 21.) folgende Gestalt an:

$$22) \left\{ \begin{array}{l} \partial x = e\alpha R \sin m \sin u + \alpha R (\sin q \cos m \sin u - \cos q \cos u) \cos \beta \partial \lambda \\ \quad - \alpha R (\cos q \cos m \sin u + \sin q \cos u) \partial \beta. \\ \partial y = e\alpha R \sin m \cos u + \alpha R (\sin q \cos m \cos u + \cos q \sin u) \cos \beta \partial \lambda \\ \quad - \alpha R (\cos q \cos m \cos u - \sin q \sin u) \partial \beta. \end{array} \right.$$

Damit sind jene Differentialquotienten in 12.) bestimmt. Es ist nur noch nöthig, dieselben zur logarithmischen Berechnung geeigneter zu machen. Zu diesem Zweck setze man:

$$23) \quad \begin{array}{l} \sin q \cos m = A \sin B \\ \cos q = A \cos B, \end{array}$$

ferner

$$24) \quad \begin{array}{l} \cos q \cos m = P \cos Q \\ \sin q = P \sin Q, \end{array}$$

woraus zur Berechnung der 2. Paare von Hilfsgrössen A , B , P , Q sich ergibt:

$$25) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} B &= \operatorname{tg} q \cos m, & A &= \frac{\cos q}{\cos B} \\ \operatorname{tg} Q &= \frac{\operatorname{tg} q}{\cos m} & P &= \frac{\sin q}{\sin Q}. \end{aligned}$$

Dann nehmen die Formeln für ∂x und ∂y folgende Gestalt an:

$$26) \quad \begin{cases} \partial x = e \cdot \kappa \cdot R \sin m \sin u - \kappa R \cos \beta \frac{\cos q}{\cos B} \cos(u+B) \partial \lambda - \kappa R \frac{\sin q}{\sin Q} \sin(u+Q) \partial \beta \\ \partial y = e \cdot \kappa \cdot R \sin m \cos u + \kappa R \cos \beta \frac{\cos q}{\cos B} \sin(u+B) \partial \lambda - \kappa R \frac{\sin q}{\sin Q} \cos(u+Q) \partial \beta \end{cases}$$

Was den Winkel q betrifft, so werden wir ihn ohne Zweideutigkeit aus den beiden Formeln erhalten:

$$27) \quad \sin q = \sin C' \frac{\cos b'}{\cos \beta}, \quad \cos q = \sin C' \sin \lambda'' \sin b' - \cos C' \cos \lambda''.$$

Je nachdem q näher an 0° oder an 90° ist, werden wir den genauen Werth aus der ersten oder aus der zweiten Formel finden; die andere bestimmt dann den Quadranten.

In 26.) ist ferner noch in den Gliedern mit $\partial \lambda$ und $\partial \beta$ der Faktor $\frac{60}{206265}$ anzubringen, wenn wir $\partial \lambda$ und $\partial \beta$ in Minuten ausdrücken wollen. Endlich, um möglichst Gleichmässigkeit in den 6 Coefficienten von 26.) herzustellen, wollen wir e in Einheiten der dritten Decimale, sowie ∂x und ∂y oder Δx , Δy statt in ganzen Umdrehungen der Mikrometerschraube in Tausendsteln derselben ausdrücken. So erhalten wir schliesslich für die Formeln, welche unsere Aufgabe lösen, folgendes Schema:

$$\begin{aligned} a) \quad \kappa &= 1 + q \cos m, \quad \lg \kappa = M q \cos m, \quad \alpha_0 = \frac{1000 \cdot 60}{206265} \\ b) \quad \sin q &= \sin C' \frac{\cos b'}{\cos \beta}, \quad \cos q = \sin \lambda'' \sin C' \sin b' - \cos \lambda'' \cos C' \end{aligned}$$

$$c) \quad \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} q \cdot \cos m, \quad \operatorname{tg} Q = \frac{\operatorname{tg} q}{\cos m}$$

$$d) \quad \begin{cases} a = x R \sin m \sin u & a_1 = x R \sin m \cos u \\ b = -\alpha_0 x R \cos \beta \frac{\cos q}{\cos B} \cos(u+B) & b_1 = \alpha_0 x R \cos \beta \frac{\cos q}{\cos B} \sin(u+B) \\ c = -\alpha_0 x R \frac{\sin q}{\sin Q} \sin(u+Q) & c_1 = -\alpha_0 x R \frac{\sin q}{\sin Q} \cos(u+Q) \end{cases}$$

$$e) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + a \cdot e + b \cdot \Delta \lambda + c \cdot \Delta \beta \\ y &= y_0 + a_1 \cdot e + b_1 \cdot \Delta \lambda + c_1 \cdot \Delta \beta. \end{aligned}$$

Die beiden ersten Formeln a.) sind Reihenentwicklungen nach 20.), deren weitere Glieder, da $q \frac{\cos m}{\cos \psi}$ immer sehr klein ist, vernachlässigt werden können. $\cos \psi$ wurde wieder = 1 gesetzt und der Modul der Brigg'schen Logarithmen mit M bezeichnet. Für q ist in $B-M$ eine kleine Tabelle berechnet, welche mit der Parallaxe als Argument den zugehörigen Werth von $\lg q$ liefert. Wie obiges Schema zeigt, haben die Coefficienten a, b, c, a_1, b_1, c_1 eine sehr einfache Zusammensetzung. Ist einmal q berechnet, so ist alles weitere für die logarithmische Berechnung ausserordentlich bequem.

Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate. Auf die Gleichungen e.) ist nun die Methode der kleinsten Quadrate anzuwenden, um aus den auf einen Punkt bezüglichen, bei verschiedenen Librationsphasen angestellten Messungen die wahrscheinlichsten Werthe für die 3 Unbekannten $e, \Delta \lambda, \Delta \beta$ zu ermitteln. x, y sind die gemessenen Coordinaten, welche also mit den Beobachtungsfehlern behaftet sind. Zunächst sind für die Näherungswerthe λ_0, β_0 die Grössen x_0, y_0 zu berechnen, indem das Schema der Gleichungen 1.)—10.) in umgekehrter Reihenfolge angewandt wird. Bei dieser Rechnung

ergeben sich dann auch die Werthe für λ'' , m , C'' , u , mit welchen die Ausdrücke in a.)—e.) zu berechnen sind.

Für die praktische Ausführung der Rechnung ist es von grosser Wichtigkeit, auf irgend eine Weise eine Controle zu erhalten, welche einen etwaigen Fehler in der Berechnung der Coefficienten a , . . . , auf welchen die weitere Rechnung beruht, erkennen liesse.

Eine solche Controle bietet sich nun hier mit verhältnissmässig grosser Leichtigkeit dar. Angenommen, λ , β seien die Werthe der selenographischen Länge und Breite, die sich aus einer Messung unter Voraussetzung der Kugelgestalt ergeben hätten. Diese Werthe sind jedesmal nach den Formeln 1.) bis 10.) berechnet worden, da sich aus ihrer Vergleichung mit den in $B-M$ gefundenen Werthen eine werthvolle Controle für die Richtigkeit der vorausgegangenen Rechnung, namentlich der Librationen, ergibt. Diese selben Werthe können nun aber auch mit Hülfe der beiden Formeln e.) berechnet werden, wenn man in denselben $e = 0$ setzt, und umgekehrt kann mit Hülfe derselben ein zweiter Werth für $x-x_0$, $y-y_0$ abgeleitet werden. Die Controle ist also in den Gleichungen enthalten:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= b (\lambda - \lambda_0) + c (\beta - \beta_0) \\ y - y_0 &= b_1 (\lambda - \lambda_0) + c_1 (\beta - \beta_0) \end{aligned}$$

Sie erstreckt sich aber nur auf die Coefficienten b , c , b_1 , c_1 , während a , a_1 uncontrolirt bleiben. Die aus diesen beiden Formeln berechneten Werthe von $x-x_0$, $y-y_0$ müssen denjenigen gleich sein, die man früher aus den beobachteten x , y und den mit Hülfe von λ_0 , β_0 rückwärts berechneten x_0 , y_0 erhalten hat. Diese Controle ist bei den unten folgenden Rechnungen jedesmal angewandt worden und hat immer vollkommene Uebereinstimmung gezeigt.

Sind die Unbekannten $e, \lambda' = \lambda_0 + \Delta \lambda, \beta' = \beta_0 + \Delta \beta$ aus einer Serie von Messungen nach der Methode der kleinsten Quadrate gefunden, so lässt sich zum Schluss die ganze Rechnung noch auf eine andere Weise in grösserm Umfang controliren. Denkt man sich für 2 gemessene Werthe x, y die Berechnung von λ, β das eine Mal unter Voraussetzung der Kugelgestalt, das andere Mal unter Voraussetzung des Rotationsellipsoides mit dem gefundenen Axenverhältniss ausgeführt, wobei im zweiten Fall auf der Kugel mit dem Radius $r (1 + e)$ die Werthe λ_1, β_1 erhalten worden seien, so muss zwischen der Grösse e und den Differenzen $\lambda_1 - \lambda, \beta_1 - \beta$ eine Beziehung bestehen, in welcher die Coefficienten dieselben sind wie in e.), indem wir wohl annehmen dürfen, dass diese Coefficienten sich nicht merklich ändern, ob wir sie mit den aus λ, β oder aus λ_0, β_0 gefundenen Werthen von u, m, C', λ'' berechnen. In den Gleichungen e.) ist also zu setzen: statt $x_0, y_0 : x, y$, statt $\Delta \lambda : \lambda_1 - \lambda$, statt $\Delta \beta : \beta_1 - \beta$.
Dann hat man:

$$b (\lambda_1 - \lambda) + c (\beta_1 - \beta) = -a \cdot e$$

$$b_1 (\lambda_1 - \lambda) + c_1 (\beta_1 - \beta) = -a_1 \cdot e$$

Diese Gleichungen denken wir uns nun nach $\lambda_1 - \lambda, \beta_1 - \beta$ aufgelöst und auf diese Weise die Werthe λ_1, β_1 berechnet. Nehmen wir dann das arithmetische Mittel aller λ_1 und ebenso aller β_1 für eine Serie von Messungen, so wird dieser Mittelwerth sehr nahe mit dem Werth λ' , resp. β' übereinstimmen müssen, den wir nach der Methode der kleinsten Quadrate direct berechnet haben. Auch diese Controle wurde jedesmal ausgeführt. Die Resultate sind unten angegeben.

Endlich kann man noch eine willkommene Bestätigung dadurch erlangen, dass man sowohl für die Serien der λ, β

vor der Ausgleichung (Kugel) als auch für die Serien der λ_1, β_1 nach der Ausgleichung (Ellipsoid) den mittlern Fehler des arithmetischen Mittels bestimmt. Die Bestätigung wird darin liegen, dass diese mittlern Fehler nach der Ausgleichung kleiner sind als sie vor derselben waren. Auch diese Vergleichung ist unten jedesmal angestellt worden.

Die Berechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate wurde nach den bekannten Regeln ausgeführt, wie sie von Encke in den Jahrgängen 1834—1836 des Berliner astron. Jahrbuches zusammengestellt worden sind. Es braucht nur noch $x_0 - x = n$, $y_0 - y = n_1$ gesetzt zu werden, um auch die vollständige Uebereinstimmung in der Bezeichnung zu haben. Aus den Gleichungen e.) ergeben sich die Normalgleichungen, welche nach den Unbekannten $e, \Delta\lambda, \Delta\beta$ aufzulösen sind. Bei der Berechnung der Coefficienten $[aa], \dots$ der Normalgleichungen wurde die bekannte Controlrechnung jedesmal durchgeführt, indem mit $a + b + c = s$ auch die Summen $[as], \dots$ berechnet wurden. Die Auflösung der Normalgleichungen geschah nach der Methode der successiven Elimination, welche bekanntlich auch in einfacher Weise zur Bestimmung der mittlern Fehler der Unbekannten führt, indem »das Gewicht des wahrscheinlichsten Werthes der Unbekannten, die zuletzt allein übrig bleibt, gleich ist dem Coefficienten, welchen die Unbekannte in der letzten Gleichung hat, in welcher sie allein erscheint, versteht sich in Bezug auf die Einheit der Genauigkeit, welche bei den Grundgleichungen angenommen ist.« — Da zu einer andern Annahme keine sichern Anhaltspunkte vorhanden waren, so wurden die Grössen x und y als gleich genau vorausgesetzt.

Resultate. Leider konnten von der grossen Zahl von Messungen in $B-M$ nur verhältnissmässig wenige für den vorliegenden Zweck benützt werden. Zunächst durften natürlich nur solche Punkte in Betracht kommen, welche der Mondmitte ziemlich nahe lagen. Von diesen mussten aber noch alle diejenigen ausgeschieden werden, bei welchen die Librationen in den Momenten der einzelnen Messungen nicht hinreichend starke Verschiedenheiten zeigten. So blieben schliesslich nur die 4 Punkte übrig: Gambart A., Copernicus (beide im 2. Quadranten), Thebit A. und Landsberg (beide im 3. Quadranten), und auch diese hatten schon grössere Entfernungen von der Mondmitte und kleinere Verschiedenheiten in den Librationen als erwünscht sein konnte.

Die folgende Zusammenstellung (pag. 26—29) gibt nun für die vier genannten Mondpunkte die Rechnungsergebnisse. Für die Winkel konnte es genügen, dieselben auf 10" abzurunden, nachdem die Rechnung so weit geführt worden war wie in $B-M$.

Zur Erläuterung dieser 4 Tabellen möge Folgendes hinzugefügt werden:

Die 1. Colonne gibt die Nummer der Beobachtung in $B-M$, die 2. gibt an, von welchen Rändern aus die Messung gemacht wurde, die 3. gibt das λ , welches unter Voraussetzung der Kugelgestalt berechnet wurde, die 4. den in $B-M$ hiefür gefundenen Werth, die 5. den Werth nach der Ausgleichung auf der durch den betreffenden Punkt gelegten Kugel. Die Columnen $l' b' C$ geben die 3 Librationsgrössen in der oben angegebenen Zählweise. Die letzte Colonne gibt den log. des scheinbaren Mondradius in Mikrometerwindungen. Für die Columnen der λ und β sind jedesmal die Mittelwerthe sammt den mittlern Fehlern

1. Gambart, A.

N.		λ	$\lambda(B-M)$	λ_1	β	$\beta(B-M)$	β_1	l'	b'	C	$\lg R$
142	ON	18° 46' 10"	46' 56"	35',1	0° 38' 50"	35' 33"	35',0	1° 42' 0"	-5° 2' 40"	- 3° 27' 0"	1,30285
165	»	34 10	34 23	26,6	64 0	64 25	63,0	6 49 30	-0 47 50	17 6 10	1467
359	»	48 0	41 4	39,8	60 30	48 55	63,0	5 43 50	4 26 50	24 43 30	3019
383	»	24 10	44 3	15,7	49 0	40 55	52,3	5 29 0	5 40 20	24 13 50	3472
517	»	29 50	29 44	17,8	33 20	35 25	37,7	0 16 20	7 10 50	12 21 50	4957
526	OS	31 40	31 21	16,3	52 20	52 44	54,1	-4 19 0	3 14 50	-12 8 30	4197
687	ON	29 0	29 35	18,7	34 0	34 10	38,3	2 44 50	7 7 0	19 32 40	5234
699	»	15 30	69 10	4,0	24 10	67 53	28,6	0 59 50	7 10 0	14 41 40	5555
710	»	28 10	80 31	16,7	31 40	74 33	36,0	1 3 20	7 7 50	14 34 10	5570
9		18° 31' 51" ± 3'4	45' 12" ± 4',6	21',2 ± 3,6	0° 43' 6" ± 4',6	50' 30" ± 5',1	45',3 ± 4,3				

$$\begin{aligned}
 & \lambda_0 = 18^\circ 32',0 & \beta_0 = 0^\circ 43',0 \\
 389,92 \cdot e + 334,86 \Delta \lambda - 75,63 \Delta \beta - 177,39 = 0. & & e = 10,6 \pm 12,9 & & E = 0,012 \pm 0,014 \\
 \dots + 334,86 \Delta \lambda + 6,69 \Delta \beta + 262,15 = 0. & & \Delta \lambda = -11',4 \pm 13',6 & & \lambda' = 18^\circ 20',6 (18^\circ 21',2). \\
 \dots + 361,61 \Delta \beta + 250,35 = 0. & & \Delta \beta = 1',7 \pm 5',0 & & \beta' = 0^\circ 44',7 (0^\circ 45',3).
 \end{aligned}$$

2. Copernicus.

XIII. 2.

N.		λ	λ (B-M)	λ ₁	β	β (B-M)	β ₁	l'	b'	C	lg R
58	ON	19° 82' 20"	81' 37"	76,8	8° 48' 20"	48' 31"	44,5	-0° 50' 30"	-5° 36' 20"	-16° 5' 50"	1,30402
63	»	54 20	57 52	50,3	8 56 50	56 41	53,4	4 25 50	-4 12 40	3 42 20	0602
119	WN	84 40	86 1	78,8	9 60 20	50 48	56,5	-2 19 10	-5 34 30	-17 23 0	0398
141	ON	42 30	43 53	37,7	32 30	28 52	28,9	1 42 10	-5 2 40	- 3 26 50	0290
255	»	57 10	38 45	53,9	34 30	23 7	32,7	6 48 50	1 53 0	22 35 50	2178
360	»	37 40	44 12	34,1	49 50	36 9	48,6	5 43 30	4 26 50	24 43 30	3020
391	»	55 10	55 12	51,6	41 0	40 54	40,1	5 34 30	5 39 40	24 12 10	3496
516	»	48 0	47 54	43,0	3 10	5 3	2,8	0 16 10	7 10 50	12 21 40	4957
726	»	54 10	53 8	48,4	23 20	22 18	22,6	-2 35 20	5 59 10	2 19 30	5407
734	»	50 30	49 28	44,7	18 10	17 14	17,5	-2 32 10	5 57 30	2 12 30	5405
10		19° 56' 39"	55' 48"	51,9	9° 24' 48"	20' 57"	22,8				
		± 4',8	± 5',0	± 4,7	± 7',4	± 6',2	± 7,4				

Becl., über die Gestalt des Mondes.

13

$$\begin{aligned}
 & \lambda_0 = 19^\circ 57',0 & \beta_0 = 9^\circ 25',0 \\
 578,39 \cdot e + 382,49 \Delta \lambda + 157,26 \Delta \beta + 256,26 &= 0. & e = 4,0 \pm 14,9 & E = 0,005 \pm 0,017 \\
 \dots + 336,21 \Delta \lambda - 15,08 \Delta \beta + 366,00 &= 0. & \Delta \lambda = -5',8 \pm 18',5 & \lambda' = 19^\circ 51',2 (19^\circ 51',9) \\
 \dots + 375,26 \Delta \beta + 173,50 &= 0. & \Delta \beta = -2',4 \pm 9',2 & \beta' = 9^\circ 22',6 (9^\circ 22',8).
 \end{aligned}$$

193

3. Thebit, A.

194

Beck, über die Gestalt des Mondes.

N.		λ	$\lambda(B-M)$	λ_1	β	$\beta(B-M)$	β_1	l'	b'	C	$\lg R$
440	WS	5° 23' 20"	24' 14"	10',6	-21° 7' 50"	7' 51"	17',2	1° 45' 50"	-4° 15' 50"	2° 1' 40"	1,30640
473	»	35 0	32 38	25,2	0 0	1 36	7,3	2 37 50	-3 36 30	5 4 10	0713
581	»	45 0	46 30	43,2	14 20	15 9	14,6	5 8 10	-1 27 20	13 17 10	1018
587	»	35 40	30 58	34,1	11 50	15 7	12,1	5 11 40	-1 27 10	13 19 50	1016
596	»	37 50	25 7	37,9	5 30	- 2 14	1,4	5 42 30	-0 6 20	17 19 50	1494
609	»	32 10	43 51	32,7	14 20	7 9	10,1	5 49 40	-0 5 20	17 24 40	1528
622	»	44 0	51 46	44,8	11 50	1 53	7,6	5 55 40	-0 4 40	17 28 50	1547
638	»	29 0	45 34	31,4	5 30	23 45	-3,6	6 23 20	1 22 30	20 52 30	2127
647	»	46 40	28 22	49,6	24 0	5 5	14,9	6 32 20	1 23 20	20 57 40	2172
653	»	41 10	63 37	40,9	54 10	53 37	30,4	5 35 50	5 32 30	24 23 50	4228
657	»	57 40	82 36	57,5	41 0	40 11	17,3	5 37 30	5 32 20	24 23 10	4252
661	»	62 10	90 8	62,2	42 30	41 40	18,8	5 39 30	5 32 10	24 22 30	4280
12		5° 40' 48" ± 3',2	47' 7" ± 6',3	39',2 ± 4,1	-21° 19' 24" ± 5',0	17' 34" ± 5',3	12',3 ± 2,5				

$$\begin{aligned}
 & \lambda_0 = 5^\circ 41',0 & \beta_0 = -21^\circ 19',0 \\
 780,83 \cdot e + 10,65 \Delta \lambda - 538,82 \Delta \beta - 1496,17 = 0. & & e = 47,8 \pm 14,1 & E = 0,055 \pm 0,016 \\
 \dots + 389,94 \Delta \lambda + 1,52 \Delta \beta - 171,54 = 0. & & \Delta \lambda = -1',1 \pm 3',5 & l' = 5^\circ 39',9 (5^\circ 39',2) \\
 \dots + 383,76 \Delta \beta + 247,64 = 0. & & \Delta \beta = 66',5 \pm 20',1 & \beta' = -20^\circ 12',5 (-20^\circ 12',3).
 \end{aligned}$$

4. Landsberg.

N.		λ	$\lambda(B-M)$	λ_1	β	$\beta(B-M)$	β_1	l'	b'	C	$\lg R$
146	ON	26° 31' 30"	31' 1"	18,6	-0°54'40"	58' 38"	57,1	1°49'20"	-5° 1' 10"	- 3°21' 0"	1,30296
238	»	18 10	18 5	6,7	26 40	27 30	27,7	4 16 0	-2 22 20	11 3 20	0918
247	»	27 30	30 29	17,4	23 30	23 30	22,2	6 38 50	1 52 50	22 31 30	2145
382	»	0 30	0 25	-10,3	19 30	19 47	16,2	5 28 30	5 40 20	24 14 0	3470
518	»	22 40	21 50	8,8	58 40	56 18	54,4	0 16 10	7 10 50	12 21 40	4957
527	OS	12 0	11 48	- 4,8	13 30	13 12	11,3	-4 19 0	3 14 50	-12 8 20	4197
686	ON	40 40	41 23	28,3	47 40	47 21	43,6	2 44 40	7 6 50	19 32 50	5232
698	»	28 0	76 21	14,6	49 40	5 24	45,5	0 59 40	7 10 0	14 41 50	5555
709	»	15 30	63 4	2,1	52 20	8 54	48,1	1 3 10	7 8 0	14 34 30	5569
9		26° 21' 50" ± 4',0	33' 48" ± 8',1	9',0 +4,1	-0°38'28" ± 5',8	29' 51" ± 6',0	36',2 +5,7				

$$\begin{aligned}
 & \lambda_0 = 26^\circ 24',0 \quad \beta_0 = -0^\circ 36',0 \quad e = 8,2 \pm 14,3 \quad E = 0,010 \pm 0,018 \\
 785,53 \cdot e + 462,14 \Delta \lambda - 87,00 \Delta \beta + 479,61 = 0. & \quad \Delta \lambda = -15',0 \pm 22',9 \quad \lambda' = 26^\circ 9',0 (26^\circ 9',0). \\
 \dots + 299,75 \Delta \lambda + 11,80 \Delta \beta + 726,32 = 0. & \quad \Delta \beta = -0',4 \pm 6',5 \quad \beta' = -0^\circ 36',4 (-0^\circ 36',2). \\
 \dots + 357,93 \Delta \beta + 1036,14 = 0. &
 \end{aligned}$$

Schlussresultat:

Gambart, A.	$E = 0,012 \pm 0,014$
Copernicus	005 017
Thebit, A.	055 016
Landsberg	010 018
Mittel:	$E = 0,021 \pm 0,012$

derselben berechnet und man sieht, dass diese mittlern Fehler nach der Ausgleichung im Allgemeinen kleiner sind als vor derselben. Für jeden Punkt sind die Normalgleichungen mit ihren Auflösungen angegeben. Neben den Werthen von λ' β' sind in Klammern die Mittelwerthe der λ_1, β_1 , hinzugefügt. Als Näherungswerthe λ_0, β_0 wurden die abgerundeten Mittelwerthe der λ, β genommen.

Die von mir gefundenen Werthe von λ, β weichen bisweilen ziemlich stark von den in $B-M$ angegebenen Werthen ab. In allen diesen Fällen habe ich die Rechnung zweimal und zwar für die Librationen nach zwei verschiedenen Methoden durchgeführt. Ein Grund solcher Abweichungen mag wohl in dem Vorhandensein von Druckfehlern in $B-M$ zu suchen sein. So z. B. ergab sich für die Beobachtung 440 Thebit ein ganz unannehmbares Resultat für λ, β . Der in $B-M$ angegebene Rectascensions- resp. Declinationsunterschied ist 22,656, resp. 14,393. Berechnet man diese Werthe aber rückwärts aus den in $B-M$ gefundenen Werthen von λ, β , so findet man 21,661, resp. 14,391. So lässt sich mit aller Sicherheit annehmen, dass für den Rectascensionsunterschied 21,656 statt 22,656 zu lesen ist. — Eine andere Ursache von Abweichungen mag darin liegen, dass bei den Zusammenstellungen der Rechnungsergebnisse in $B-M$ (S. 69—76) Vertauschungen der Nummern innerhalb einer Serie vorkommen. Da aus jeder Serie der Mittelwerth genommen wurde, so hatte eine

solche Vertauschung gar nichts zu sagen. Für den gegenwärtigen Zweck aber war das nicht gleichgültig, da zu jeder Beobachtung besondere Librationswerthe gehören. Eine derartige Vertauschung scheint mir bei den Beobachtungen 638 und 647 Thebit vorzuliegen. — Endlich scheint es mir, dass an einigen Stellen in $B-M$ auch Rechnungsfehler stattgefunden haben. Dies gilt namentlich für die Beobachtungen des 22. October (Nr. 698—719). Ich vermute, dass die Librationswerthe für diesen Tag fehlerhaft gewesen seien, denn die Resultate für die λ, β in $B-M$ sind für jenen Tag fast durchweg ganz extreme Werthe. Zu diesen Beobachtungen gehören auch 699 und 710 Gamburg, sowie 698 und 709 Landsberg. Der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels der λ, β ist für diese beiden Punkte nach den Resultaten in $B-M$ viel grösser als nach den meinigen. Aehnliches scheint mir von den Beobachtungen des 19. October zu gelten, zu welchen 657 und 661 Thebit gehören. Dies veranlasste mich, mit meinen Resultaten die Rechnung weiter zu führen. Nur 358 Landsberg wurde ausgeschlossen, weil sich hier eine grössere Abweichung zeigte, wobei der Werth in $B-M$ der richtigere zu sein schien.

Wäre die Zahl der Beobachtungen nicht ohnehin schon eine so beschränkte gewesen, so hätten wohl noch weitere Beobachtungen ausgeschlossen werden müssen, namentlich diejenigen, bei welchen entweder die Zenithdistanz oder der Stundenwinkel des Mondes jenseits einer gewissen Grenze liegen. Nach $B-M$ waren die Bilder schon undeutlich und die Mondränder zitternd und wallend bei 18° Höhe. Grosse Stundenwinkel müssten vermieden werden, weil in $B-M$ die Wirkung der Refraction auf die Rectascensionsdifferenzen vernachlässigt und die Correction für Refraction nur an die Declinationsdifferenzen angebracht wurde.

In Bezug auf die oben ausgesprochene Bedingung, dass bei der Messung der gleichen Coordinate auch immer der gleiche Rand benützt werde, zeigt sich glücklicherweise, dass dieselbe nahezu erfüllt ist, indem nur die 3 Beobachtungen 687 Gambart, 119 Copernicus und 527 Landsberg ihr nicht genügen.

Da jede Beobachtung aus einer Rectascensions- und einer Declinationsbestimmung besteht und also 2 Gleichungen liefert, so ergaben die oben benützten Beobachtungen 80 Gleichungen. Die Unbekannten waren die Grösse E und die 4 Paare von Coordinaten λ , β . Indem aus den 4 Werthen von E das Mittel genommen wurde, mit Berücksichtigung der aus den mittlern Fehlern sich ergebenden Gewichte, wurde stillschweigend angenommen, dass jene 4 Punkte in dem allgemeinen Niveau der Mondoberfläche liegen, was natürlich nicht streng richtig ist.

Das Resultat $E = 0,021$ stimmt übrigens mit dem von Kayser für dieselbe Grösse gefundenen Werth 0,0329 wenigstens soweit überein, dass letzterer dadurch eine neue Unterstützung findet.

Wenn es auch nicht möglich war, aus dem benützten Beobachtungsmaterial einen sichern Werth für die gesuchte Grösse zu erhalten, so glaube ich doch, dass die hier entwickelte Methode, angewandt auf neue, mit grösserer Schärfe und in zweckmässiger Auswahl ausgeführte Beobachtungen, in ziemlich bequemer Weise zu einem guten Resultate führen müsste. Die Messungen könnten auch an Glasphotographien des Mondes angestellt werden. Bei der Berechnung wäre aber, um ganz sicher zu gehen, die schon von Nicollet gesuchte Constante der physischen Libration als weitere Unbekannte einzuführen.

Riga, den 19./31. Mai 1877.
