# Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden.

Von

**Dr. W. Gröbli.**

(Schluss).

---

## § 8.

Im Bisherigen haben wir die Bewegung dreier Wirbelfäden für einige specielle Werthsysteme der Constanten $m$ bestimmt. Dabei kamen wir bei verschiedenen Gelegenheiten zu besonders einfachen Bewegungen, welche gewissen particulären Lösungen der Differentialgleichungen entsprachen. Wir stellen uns nun noch die Aufgabe, einige particuläre Lösungen der Differentialgleichungen, durch welche die Bewegung dreier Wirbelfäden bestimmt ist, aufzusuchen, ohne den Grössen $m$ bestimmte Werthe beizulegen. Wir werden nämlich gewisse Voraussetzungen über die Bewegung machen, untersuchen ob, und wenn ja unter welchen Bedingungen diese Voraussetzungen mit den Differentialgleichungen verträglich sind und in letzterem Falle die Differentialgleichungen integriren. Zunächst setzen wir voraus, es ändere das Dreieck der drei Wirbelfäden weder Gestalt noch Grösse, dann wollen wir annehmen, das Dreieck ändere seine Grösse, aber nicht die Gestalt, endlich machen wir die Voraussetzung, das Dreieck sei beständig gleichschenklig.

---

## § 9.

### *Das Dreieck der drei Wirbelfäden ändere weder Gestalt noch Grösse.*

Damit die Differentialgleichungen 15) § 2 erfüllt seien, muss entweder das Dreieck gleichseitig sein, oder es müssen die drei Fäden in gerader Linie liegen.

Im ersten Falle dürfen wir, indem wir die Einheit der Länge passend wählen,

$$s_1 = s_2 = s_3 = 1 \tag{1}$$

annehmen. Aus den Differentialgleichungen 17) ergibt sich

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{d\vartheta_2}{dt} = \frac{d\vartheta_3}{dt} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\pi}; \tag{2}$$

es rotirt somit das Dreieck der drei Wirbelfäden mit constanter Geschwindigkeit um den Schwerpunkt. Die Radien der Kreise, in welchen sich die Wirbelfäden bewegen, sind respective

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{\sqrt{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2}}{m_1 + m_2 + m_3} \\ \varrho_2 &= \frac{\sqrt{m_3^2 + m_3 m_1 + m_1^2}}{m_1 + m_2 + m_3} \\ \varrho_3 &= \frac{\sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}}{m_1 + m_2 + m_3}. \end{aligned} \tag{3}$$

Ist $m_1 + m_2 + m_3 = 0$, also der Schwerpunkt im Unendlichen, so bewegen sich die drei Fäden in parallelen Geraden, senkrecht zur Richtung nach dem Schwerpunkte hin, mit der Geschwindigkeit

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}{2}}.$$

Im zweiten Falle empfiehlt es sich, die Differentialgleichungen 3) und 4) § 2 zu benutzen. Machen wir den

Schwerpunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten und gestatten den Grössen $\varrho$, auch negative Werthe anzunehmen, so können wir

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = \vartheta \tag{4}$$

setzen. Da nach Voraussetzung die Grössen $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$ constant sind, so sind die Differentialgleichungen 3) erfüllt; die Gleichungen 4) gehen in die folgenden über

$$\begin{aligned}
\pi \varrho_1 \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{m_2}{\varrho_1 - \varrho_2} - \frac{m_3}{\varrho_3 - \varrho_1} \\
\pi \varrho_2 \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{m_3}{\varrho_2 - \varrho_3} - \frac{m_1}{\varrho_1 - \varrho_2} \\
\pi \varrho_3 \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{m_1}{\varrho_3 - \varrho_1} - \frac{m_2}{\varrho_2 - \varrho_3}\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

Diese Gleichungen multipliciren wir der Reihe nach mit den Factorensystemen

$$\begin{aligned}
&m_1\,, \quad \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_3}\,, \quad m_1 \varrho_1 \\
&m_2\,, \quad \frac{1}{\varrho_3 - \varrho_1}\,, \quad m_2 \varrho_2 \\
&m_3\,, \quad \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2}\,, \quad m_3 \varrho_3
\end{aligned}$$

und addiren jedesmal. Auf diese Weise ergeben sich die folgenden Gleichungen, welche die vorigen in allen Fällen ersetzen

$$\begin{aligned}
0 &= m_1 \varrho_1 + m_2 \varrho_2 + m_3 \varrho_3 \\
0 &= \frac{\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_3} + \frac{\varrho_2}{\varrho_3 - \varrho_1} + \frac{\varrho_3}{\varrho_1 - \varrho_2} \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{1}{\pi} \frac{m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2}{m_1 \varrho_1{}^2 + m_2 \varrho_2{}^2 + m_3 \varrho_3{}^2}\,.
\end{aligned} \tag{6}$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen bestimmen die Verhältnisse der Grössen $\varrho$, aus der dritten ergibt sich dann die Winkelgeschwindigkeit. Jedem Werthsysteme der $m$

entsprechen drei Werthsysteme der Verhältnisse der $\varrho$, von denen mindestens eines reell ist. Zu jedem Werthsysteme der $\varrho$, das aber, der zweiten Gleichung 6) zufolge, nicht willkürlich angenommen werden darf, gehören unendlich viele Werthsysteme der Verhältnisse der $m_1$, $m_2$, $m_3$. Hervorzuheben sind noch einige Specialfälle.

1) Es seien zwei der Grössen $m$, etwa $m_2$ und $m_3$, einander gleich. Die beiden ersten Gleichungen 6) sind befriedigt für

$$\varrho_1 = 0, \ \varrho_2 + \varrho_3 = 0,$$

ausserdem existiren noch zwei Werthsysteme für die Verhältnisse der $\varrho$, welche aber nicht reell zu sein brauchen.

2). Es sei die Summe zweier der Constanten $m$ gleich Null, z. B. $m_2 + m_3 = 0$. Man genügt den obigen Gleichungen durch

$$\varrho_1 = 0, \ \varrho_2 = \varrho_3;$$

in diesem Falle existirt aber nur noch ein Wirbelfaden. Daneben gibt es noch zwei Werthsysteme für die Verhältnisse der $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$, welche reell oder imaginär sein können, je nach den Werthen der Grössen $m$.

3). Es sei

$$m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2 = 0. \tag{7}$$

Eine Lösung der Gleichungen 6) ist

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3 &= \frac{m_2 - m_3}{m_1} = \frac{m_3 - m_1}{m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_3} \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

die drei Fäden bleiben also in Ruhe. Die beiden andern Werthsysteme der $\varrho$ genügen den Gleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \varrho_1 + m_2 \varrho_2 + m_3 \varrho_3 &= 0 \\ m_1 \varrho_1{}^2 + m_2 \varrho_2{}^2 + m_3 \varrho_3{}^2 &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Aus diesen erhalten wir, wenn wir mit $\varkappa$ eine willkürliche Constante bezeichnen

$$
\begin{aligned}
\varkappa\varrho_1 &= m_2 m_3 (2m_1 - m_2 - m_3) + (m_2 - m_3)\sqrt{-m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3)} \\
\varkappa\varrho_2 &= m_3 m_1 (2m_2 - m_3 - m_1) + (m_3 - m_1)\sqrt{-m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3)} \qquad 10) \\
\varkappa\varrho_3 &= m_1 m_2 (2m_3 - m_1 - m_2) + (m_1 - m_2)\sqrt{-m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3)}\,.
\end{aligned}
$$

Die rechte Seite der dritten Gleichung 6) erscheint in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, man erhält den wahren Werth der Winkelgeschwindigkeit aus irgend einer der Gleichungen 5). Durch Combination dieser kann man sich leicht symmetrische Ausdrücke für $\frac{d\vartheta}{dt}$ herstellen; ein solcher Ausdruck ist z. B.

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{m_2 m_3 \varrho_1 + m_3 m_1 \varrho_2 + m_1 m_2 \varrho_3}{\pi (m_1 + m_2 + m_3)\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3}. \qquad 11)$$

4). Es sei

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0. \qquad 12)$$

Die beiden ersten der Gleichungen 6) sind befriedigt für $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$ und zwar ist diese Lösung, welche für unser Problem keine Bedeutung hat, doppelt zu zählen. Aus der ersten Gleichung 6) ergibt sich

$$\frac{\varrho_2 - \varrho_3}{m_1} = \frac{\varrho_3 - \varrho_1}{m_2} = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{m_3} \qquad 13)$$

und nun geht die zweite dieser Gleichungen in

$$\frac{\varrho_1}{m_1} + \frac{\varrho_2}{m_2} + \frac{\varrho_3}{m_3} = 0 \qquad 14)$$

über. Aus 14) und der ersten Gleichung 6) ergibt sich jetzt, wenn $\varkappa$ eine willkürliche Constante bedeutet,

$$\varrho_1 = \frac{m_2{}^2 - m_3{}^2}{m_2\, m_3}\,\varkappa$$
$$\varrho_2 = \frac{m_3{}^2 - m_1{}^2}{m_3\, m_1}\,\varkappa \qquad 15)$$
$$\varrho_3 = \frac{m_1{}^2 - m_2{}^2}{m_1\, m_2}\,\varkappa.$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist durch die Gleichung

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{1}{\pi\varkappa^2}\,\frac{m_1\, m_2\, m_3}{m_2\, m_3 + m_3\, m_1 + m_1\, m_2} \qquad 16)$$

bestimmt.

---

## § 10.

### *Das Dreieck der drei Wirbelfäden ändere seine Grösse, aber nicht seine Gestalt.*

Aus den Gleichungen 15) § 2 ergibt sich zunächst, dass die Differentialquotienten

$$\frac{d(s_1{}^2)}{dt}, \quad \frac{d(s_2{}^2)}{dt}, \quad \frac{d(s_3{}^2)}{dt}$$

constant sein müssen. Den Fall, dass diese Differentialquotienten verschwinden, haben wir eben behandelt, das Dreieck ändert dann auch seine Grösse nicht. Bezeichnen wir mit $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ gewisse, noch näher zu bestimmende Constanten und verfügen über den Anfangspunkt der Zeit, so können wir schreiben

$$s_1{}^2 = \lambda_1\, t, \quad s_2{}^2 = \lambda_2\, t, \quad s_3{}^2 = \lambda_3\, t. \qquad 1)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Differentialgleichungen 15) § 2 ein und dividiren dieselben der Reihe nach durch $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, so werden die linken Seiten sämmtlich gleich 1; durch Vergleichung der rechten Seiten folgt

$$m_1\,(\lambda_2 - \lambda_3) = m_2\,(\lambda_3 - \lambda_1) = m_3\,(\lambda_1 - \lambda_2). \qquad 2)$$

Diese Doppelgleichung lässt sich durch die drei Gleichungen

$$\lambda_2 - \lambda_3 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1}\,\mu$$
$$\lambda_3 - \lambda_1 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_2}\,\mu \qquad 3)$$
$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_3}\,\mu$$

ersetzen, in welchen $\mu$ eine willkürliche Constante bedeutet. Addirt man diese Gleichungen, so ergibt sich zwischen den Grössen $m$ die Bedingung

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = 0\,, \qquad 4)$$

welche auch unmittelbar aus der Gleichung

$$\frac{1}{m_1}\log s_1 + \frac{1}{m_2}\log s_2 + \frac{1}{m_3}\log s_3 = \text{const.}$$

hervorgeht. An Stelle der Grössen $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ führen wir drei neue Grössen $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ durch die Gleichungen

$$\lambda_1 = \mu\,\mu_1\,, \quad \lambda_2 = \mu\,\mu_2\,, \quad \lambda_3 = \mu\,\mu_3 \qquad 5)$$

ein. Die Gleichungen 3) gehen dadurch in die nachfolgenden über

$$\mu_2 - \mu_3 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1}$$
$$\mu_3 - \mu_1 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_2} \qquad 6)$$
$$\mu_1 - \mu_2 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_3}\,.$$

Unter der Voraussetzung, es bestehe zwischen den Constanten $m$ die Bedingung 4), ist aber

$$\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1} = -\frac{m_3 - m_1}{m_2} + \frac{m_1 - m_2}{m_3}$$
$$\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_2} = -\frac{m_1 - m_2}{m_3} + \frac{m_2 - m_3}{m_1} \qquad 7)$$
$$\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_3} = -\frac{m_2 - m_3}{m_1} + \frac{m_3 - m_1}{m_2}$$

und aus 6) und 7) erhellt die Richtigkeit der folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}\mu_1 &= a - \frac{m_2 - m_3}{m_1}\\ \mu_2 &= a - \frac{m_3 - m_1}{m_2}\\ \mu_3 &= a - \frac{m_1 - m_2}{m_3},\end{aligned} \tag{8}$$

in denen $a$ eine willkürliche Constante bedeutet. Da die Grössen $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ alle das nämliche Vorzeichen besitzen, muss die Constante $a$ entweder grösser sein als der grösste der Ausdrücke

$$\frac{m_2 - m_3}{m_1}, \quad \frac{m_3 - m_1}{m_2}, \quad \frac{m_1 - m_2}{m_3}$$

oder kleiner als der kleinste derselben. Mit Rücksicht auf die Gleichungen 1), 5) und 6) ergibt sich nun aus irgend einer der Gleichungen 15) § 2 für $\mu$ der Ausdruck

$$\mu = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\pi} \frac{\sqrt{2\mu_2\mu_3 + 2\mu_3\mu_1 + 2\mu_1\mu_2 - \mu_1{}^2 - \mu_2{}^2 - \mu_3{}^2}}{\mu_1\mu_2\mu_3}. \tag{9}$$

Damit sind diese Gleichungen befriedigt.

Zwischen den Grössen $\varrho$ und $s$ bestehen nach 12) § 2 die Gleichungen

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2 + m_3)\,\varrho_1{}^2 &= (m_2 + m_3)\,s_1{}^2\\ (m_1 + m_2 + m_3)\,\varrho_2{}^2 &= (m_3 + m_1)\,s_2{}^2\\ (m_1 + m_2 + m_3)\,\varrho_3{}^2 &= (m_1 + m_2)\,s_3{}^2.\end{aligned} \tag{10}$$

Aus den Gleichungen 17) § 2 ergibt sich nun

$$d\vartheta_1 = d\vartheta_2 = d\vartheta_3 = \frac{\varkappa}{2}\,\frac{dt}{t}, \tag{11}$$

wobei zur Abkürzung

$$\varkappa = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\pi} \frac{2\,a^2 + \dfrac{(m_2 - m_3)(m_3 - m_1)(m_1 - m_2)}{m_1 m_2 m_3}\,a - 3}{\mu\,\mu_1\,\mu_2\,\mu_3} \tag{12}$$

gesetzt wurde. Definiren wir $\vartheta$ durch die Gleichung

$$\vartheta = \frac{\varkappa}{2}\log t, \tag{13}$$

so folgt aus 11)

$$\vartheta_1 = \vartheta + \alpha_1\,, \qquad \vartheta_2 = \vartheta + \alpha_2\,, \qquad \vartheta_3 = \vartheta + \alpha_3\,. \tag{14}$$

Von den drei Constanten $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ kann eine willkürlich angenommen werden, die beiden andern sind dann durch die Gleichungen 11) § 2 bestimmt und durch die Bedingung, dass man das Dreieck der drei Fäden in positivem oder negativem Sinne umfahren muss, um der Reihe nach zu den Fäden 1, 2, 3 zu gelangen, je nachdem man die in 9) vorkommende Wurzel mit negativem oder positivem Zeichen nimmt.

Aus 1), 10), 13) und 14) ergeben sich die Gleichungen der Bahnen, welche von den Fäden beschrieben werden, nämlich

$$\begin{aligned}
\varrho_1 &= \sqrt{\frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\,\mu\,\mu_1\, e^{\frac{\vartheta_1 - \alpha_1}{\varkappa}}} \\
\varrho_2 &= \sqrt{\frac{m_3 + m_1}{m_1 + m_2 + m_3}\,\mu\,\mu_2\, e^{\frac{\vartheta_2 - \alpha_2}{\varkappa}}} \\
\varrho_3 &= \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\,\mu\,\mu_3\, e^{\frac{\vartheta_3 - \alpha_3}{\varkappa}}}\,.
\end{aligned} \tag{15}$$

Die Bahnen sind, diesen Gleichungen zufolge, logarithmische Spiralen und zwar können alle drei durch Drehung um den Anfangspunkt mit einander zur Deckung gebracht werden.

Bei gegebenen Werthen der Grössen $m$ sind, da $a$ eine willkürliche Constante bedeutet, unendlich viele Gestalten des Dreiecks möglich. Das Dreieck ist rechtwinklig, wenn $a$ einer der Grössen

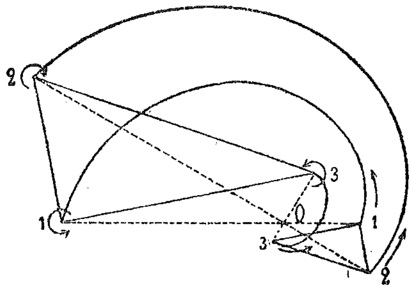
$$-\frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\,, \quad -\frac{m_3 - m_1}{m_3 + m_1}\,, \quad -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

gleich ist, von denen stets zwei die Bedingungen erfüllen, denen $a$ unterworfen ist. Die gleichschenklige Gestalt des Dreiecks ist unmöglich.

Figur 6 entspricht den Annahmen

$$m_1 : m_2 : m_3 = 3 : -2 : 6$$
$$a = 2.$$

Fig. 6.




Bei passender Wahl der Zeiteinheit erhält man

$$s_1{}^2 = 28\,t\,, \qquad s_2{}^2 = 21\,t\,, \qquad s_3{}^2 = 7\,t\,;$$
$$\varrho_1{}^2 = 16\,t\,, \qquad \varrho_2{}^2 = 27\,t\,, \qquad \varrho_3{}^2 = t\,;$$

$$\varrho_1 = 4\,e^{\frac{\sqrt{3}}{5}(\vartheta_1 - \alpha_1)}$$

$$\varrho_2 = 3\sqrt{3}\,e^{\frac{\sqrt{3}}{5}(\vartheta_2 - \alpha_2)}$$

$$\varrho_3 = e^{\frac{\sqrt{3}}{5}(\vartheta_3 - \alpha_3)}\,;$$

$$\vartheta_2 - \vartheta_3 = \alpha_2 - \alpha_3 = \frac{\pi}{2}$$

$$\vartheta_3 - \vartheta_1 = \alpha_3 - \alpha_1 = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{6}\,.$$

## § 11.

*Das Dreieck der drei Wirbelfäden sei beständig gleichschenklig.*

Wir wollen annehmen es sei $s_2 = s_3$. Aus der ersten Gleichung 15) § 2 ergibt sich $\frac{d(s_1^2)}{dt} = 0$. Verfügt man über die Einheit der Länge, so darf man

$$s_1 = 1 \tag{1}$$

setzen. Die linken Seiten der zweiten und dritten Gleichung 15) sind einander gleich, damit es auch die rechten Seiten seien, muss zwischen den Grössen $m$ die Bedingung

$$m_2 + m_3 = 0 \tag{2}$$

bestehen und dann ergibt sich

$$-\frac{m_2}{\pi} dt = \frac{s_2^2 \, d(s_2^2)}{(s_2^2 - 1)\sqrt{4 s_2^2 - 1}}. \tag{3}$$

Durch Integration dieser Gleichung folgt, bei passender Bestimmung der Integrationsconstanten,

$$\begin{aligned} \frac{2m_2}{\pi} t &= -\sqrt{4s_2^2 - 1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \log\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{4s_2^2 - 1}}{\sqrt{3} - \sqrt{4s_2^2 - 1}}\right), \quad \frac{1}{2} \leqq s_2 < 1 \\ \frac{2m_2}{\pi} t &= -\sqrt{4s_2^2 - 1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \log\left(\frac{\sqrt{4s_2^2 - 1} + \sqrt{3}}{\sqrt{4s_2^2 - 1} - \sqrt{3}}\right), \quad 1 < s_2 < \infty. \end{aligned} \tag{4}$$

Aus den Gleichungen 12) § 2 erhält man

$$\begin{aligned} \varrho_1^2 &= \frac{m_2^2}{m_1^2} \\ \varrho_2^2 &= s_2^2 + \frac{m_2(m_2 - m_1)}{m_1^2} \\ \varrho_3^2 &= s_2^2 + \frac{m_2(m_2 + m_1)}{m_1^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Der ersten dieser Gleichungen zufolge bewegt sich der Faden 1 in einem Kreise, dessen Mittelpunkt mit dem Schwerpunkte der Wirbelfäden zusammenfällt.

Die erste Gleichung 17) § 2 geht über in

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{m_1}{\pi}\frac{1}{s_2^2}.$$

Durch Elimination von $t$ aus dieser Gleichung und aus 3) ergibt sich

$$d\vartheta_1 = -\frac{m_1}{m_2}\frac{d(s_2^2)}{(s_2^2-1)\sqrt{4s_2^2-1}} \tag{6}$$

und nun durch Integration und passende Wahl der $x$-Axe

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_1 &= \frac{m_1}{m_2\sqrt{3}}\log\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{4s_2^2-1}}{\sqrt{3}-\sqrt{4s_2^2-1}}\right), \qquad \frac{1}{2} \leqq s_2 < 1\\ \vartheta_1 &= \frac{m_1}{m_2\sqrt{3}}\log\left(\frac{\sqrt{4s_2^2-1}+\sqrt{3}}{\sqrt{4s_2^2-1}-\sqrt{3}}\right), \qquad 1 < s_2 < \infty.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Mittelst der Formeln 11) § 2 ergeben sich für $\vartheta_2$ und $\vartheta_3$ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_2 &= \vartheta_1 - \operatorname{arctg}\left(\frac{m_1}{2m_2-m_1}\sqrt{4s_2^2-1}\right)\\ \vartheta_3 &= \vartheta_1 - \operatorname{arctg}\left(\frac{m_1}{2m_2+m_1}\sqrt{4s_2^2-1}\right).\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ersetzt man hierin, den Gleichungen 5) gemäss, $s_2$ durch $\varrho_2$ respective $\varrho_3$, so erhält man die Gleichungen der Bahnen, welche die Fäden 2 und 3 durchlaufen. Diese Bahnen sind Spiralen, die Kreise

$$\left.\begin{aligned}\varrho_2^2 &= \frac{m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2}{m_1^2}\\ \varrho_3^2 &= \frac{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}{m_2^2}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

sind asymptotische Kreise derselben; für $s_2 > 1$ sind überdiess die Geraden

$$\left.\begin{aligned}x_2 &= \frac{2m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2}{m_1^2}\\ x_3 &= \frac{2m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}{m_2^2}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Asymptoten. Hervorzuheben ist noch der Fall $2\,m_2 = m_1$; es ist dann $\vartheta_2 - \vartheta_1 = -\frac{\pi}{2}$. Im Uebrigen möge das § 5 für $m_2 = m_1$ Gesagte genügen.

---

## § 12.

Im Bisherigen kamen wir zweimal zu Lösungen der Differentialgleichungen für die Bewegung dreier Wirbelfäden, denen eine Bewegung der Wirbelfäden in parallelen geraden Linien entsprach. Es waren diess die Fälle, § 4 und § 9,

$$m_1 = m_2 = -m_3\,, \qquad m_1\,\varrho_1{}^2 + m_2\,\varrho_2{}^2 + m_3\,\varrho_3{}^2 = 0$$

und

$$s_1 = s_2 = s_3\,, \qquad m_1 + m_2 + m_3 = 0.$$

Die Aufgabe, alle Bewegungen zu bestimmen, bei denen die Bahnen parallele Gerade sind, lässt sich mittelst der Differentialgleichungen 1) § 2 leicht erledigen und dahin beantworten, dass die eben erwähnten die einzigen sind.

Ebenso lässt sich die Frage nach solchen Lösungen der Differentialgleichungen beantworten, bei denen das Dreieck der drei Wirbelfäden stets rechtwinklig sein soll. Die beiden § 4 und § 10 gefundenen sind die einzigen.

Hiermit verlassen wir das Problem der Bewegung dreier Wirbelfäden, und gehen dazu über, die Bewegungen von vier Wirbelfäden, unter Voraussetzung einer Symmetrieebene, zu bestimmen.

## Ueber die Bewegung von vier Wirbelfäden, unter Voraussetzung einer Symmetrieebene.

### § 13.

Für die Bewegung in der $x\,y$-Ebene ist eine Symmetrieaxe vorhanden. Wir machen diese zur $y$-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Anfangspunkt wir willkürlich in ihr annehmen. Es seien 1, 2, 3, 4 die vier Fäden und zwar 3 und 4 die symmetrisch zu 1 und 2 gelegenen. Dann ist

$$\begin{aligned} x_3 &= -x_1\,, & x_4 &= -x_2 \\ y_3 &= \phantom{-}y_1\,, & y_4 &= \phantom{-}y_2\,. \end{aligned} \qquad 1)$$

Damit die Voraussetzung, es solle die $y$-Axe Symmetrieaxe der Bewegung sein, mit den Differentialgleichungen 2) § 1 verträglich sei, müssen die durch Gleichung 1) § 1 definirten Grössen $m$ den Bedingungen

$$m_1 + m_3 = 0\,, \qquad m_2 + m_4 = 0 \qquad 2)$$

genügen und zwar sind diese Bedingungen auch hinreichend.

Von den vier allgemeinen Integralen

$$\begin{aligned} \Sigma m_1\, x_1 &= \text{const.}\,, & \Sigma m_1\, y_1 &= \text{const.} \\ \Sigma m_1\, \varrho_1{}^2 &= \text{const.}\,, & P &= \text{const.} \end{aligned}$$

werden die beiden mittlern hinfällig, indem die linken Seiten identisch verschwinden. Das erste Integral wird

$$m_1\, x_1 + m_2\, x_2 = \text{const.} \qquad 3)$$

und spricht den Satz aus, dass der Schwerpunkt der Fäden 1 und 2 sich parallel der $y$-Axe bewegt. Da Alles was für 1 und 2 gilt, in entsprechender Weise für 3 und 4 seine Gültigkeit hat, so werden wir in der Folge nur von den Fäden 1 und 2 reden. Mit Benutzung der Gleichungen

$$\begin{aligned}\varrho_{12}{}^2 &= \varrho_{34}{}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ \varrho_{14}{}^2 &= \varrho_{23}{}^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ \varrho_{13}{}^2 &= 4x_1{}^2, \qquad \varrho_{24}{}^2 = 4\,x_2{}^2\end{aligned} \tag{4}$$

ergibt sich aus dem letzten der obigen Integrale die Gleichung

$$\left\{\frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\right\}^{m_1 m_2} \frac{1}{x_1{}^{m_1 m_1}\, x_2{}^{m_2 m_2}} = \text{const.} \tag{5}$$

Die Differentialgleichungen

$$m_1 \frac{d x_1}{d t} = \frac{\partial P}{\partial y_1}, \quad m_1 \frac{d y_1}{d t} = -\frac{\partial P}{\partial x_1}$$

gehen über in

$$\begin{aligned}\frac{d x_1}{d t} &= -\frac{m_2}{\pi}(y_1 - y_2)\left(\frac{1}{\varrho_{12}{}^2} - \frac{1}{\varrho_{14}{}^2}\right) \\ \frac{d y_1}{d t} &= -\frac{m_2}{\pi}\left(\frac{x_1 - x_2}{\varrho_{12}{}^2} - \frac{x_1 + x_2}{\varrho_{14}{}^2}\right) - \frac{m_1}{\pi}\frac{1}{2x_1}.\end{aligned} \tag{9}$$

Mittelst der Gleichungen 3) und 5) können die Grössen $x_2$ und $y_1 - y_2$ durch $x_1$ ausgedrückt werden und da die Gleichungen 6) die Grössen $y_1$ und $y_2$ nur in der Verbindung $y_1 - y_2$ enthalten, so gehen sie in Gleichungen von der Form

$$\frac{d x_1}{d t} = f_1(x_1), \quad \frac{d y_1}{d t} = f_2(x_1) \tag{7}$$

über. Aus diesen folgt durch Elimination von $t$

$$\frac{d y_1}{d x_1} = f_3(x_1). \tag{8}$$

Durch Quadratur erhält man aus 8) und der ersten Gleichung 7) $y_1$ und $t$ als Function von $x_1$. Die Bewegung des ersten Fadens ist damit bestimmt, nach 3) und 5) auch diejenige des Fadens 2.

Die wirkliche Ausführung aller dieser Rechnungen ist in geschlossener Form nur für specielle Werthe der

Grössen $m_1$ und $m_2$ möglich. Die einfachste Annahme, die man über $m_1$ und $m_2$ treffen kann, ist

$$m_1 = m_2; \tag{9}$$

die ihr entsprechende Bewegung wollen wir nun bestimmen.

---

## § 14.

Für $m_1 = m_2$ geht Gleichung 3) in

$$x_1 + x_2 = \text{const.}$$

über. Die Constante ist entweder gleich Null, oder von Null verschieden. Im letztern Falle kann man durch passende Wahl der Längeneinheit bewirken, dass sie einen speciellen Werth erhält. Hat die Constante den Werth Null, so existirt noch eine zweite Symmetrieaxe, parallel der $x$-Axe. Da wir später allgemein die Bewegung bestimmen werden für $2n$ Wirbelfäden, unter Voraussetzung von $n$ Symmetrieebenen, so können wir davon absehen, den Fall besonders zu behandeln, in welchem die genannte Constante verschwindet. Geben wir nun der Constanten den Werth 2, so lässt sich die obige Gleichung ersetzen durch die beiden Gleichungen

$$x_1 = 1 + x, \qquad x_2 = 1 - x, \tag{10}$$

in denen $x$ die Abscisse von 1 bedeutet in Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Ordinatenaxe die Gerade ist, in welcher sich der Schwerpunkt von 1 und 2 bewegt. Bezeichnet $\lambda$ eine willkürliche, positive oder negative Constante, so lässt sich Gleichung 5) schreiben

$$\frac{(y_1 - y_2)^2 + 4\,x^2}{(y_1 - y_2)^2 + 4}\,\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{\lambda}$$

und hieraus folgt

$$(y_1 - y_2)^2 = 4\,\frac{1-(\lambda+1)\,x^2}{\lambda-1+x^2}$$

$$\varrho_{12}{}^2 = 4\,x^2 + (y_1 - y_2)^2 = 4\,\frac{(1-x^2)^2}{\lambda-1+x^2} \qquad 11)$$

$$\varrho_{14}{}^2 = 4 \quad + (y_1 - y_2)^2 = 4\,\frac{\lambda\,(1-x^2)}{\lambda-1+x^2}\,.$$

Wir wollen $m_1$ als positiv voraussetzen. Durch passende Wahl der Zeiteinheit können wir auch der Grösse $m_1$ einen speciellen Werth ertheilen, wir wollen $m_1 = m_2 = 2\,\pi$ annehmen. Die erste der Gleichungen 6) wird nun, da $d\,x_1 = d\,x$,

$$\frac{d\,x}{d\,t} = -\,\frac{(\lambda-1+x^2)^{3/2}\,(1-(\lambda+1)\,x^2)^{1/2}}{\lambda\,(1-x^2)^2} \qquad 12)$$

und hieraus folgt

$$t = -\int \frac{\lambda\,(1-x^2)^2\,d\,x}{(\lambda-1+x^2)\,\sqrt{(\lambda-1+x^2)\,(1-(\lambda+1)\,x^2)}}\,. \qquad 13)$$

Die zweite der Gleichungen 6) geht über in

$$\frac{d\,y_1}{d\,t} = \frac{x^4 + 2\,(\lambda-1)\,x^2 + \lambda^2\,x + 1 - 2\,\lambda}{\lambda\,(1-x^2)^2}\,. \qquad 14)$$

Aus 12) und 14) ergibt sich durch Elimination von $t$

$$\frac{d\,y_1}{d\,x} = -\,\frac{x^4 + 2\,(\lambda-1)\,x^2 + \lambda^2\,x + 1 - 2\,\lambda}{(\lambda-1+x^2)^{3/2}\,(1-(\lambda+1)\,x^2)^{1/2}}\,. \qquad 15)$$

Ersetzt man hier $x$ durch $-x$, so erhält man

$$\frac{d\,y_2}{d\,x} = -\,\frac{x^4 + 2\,(\lambda-1)\,x^2 - \lambda^2\,x + 1 - 2\,\lambda}{(\lambda-1+x^2)^{3/2}\,(1-(\lambda+1)\,x^2)^{1/2}} \qquad 16)$$

und nun folgt aus 15) und 16)

$$\frac{y_1+y_2}{2} = -\int \frac{(x^4 + 2\,(\lambda-1)\,x^2 + 1 - 2\,\lambda)\,d\,x}{(\lambda-1+x^2)\,\sqrt{(\lambda-1+x^2)\,(1-(\lambda+1)\,x^2)}}\,. \qquad 17)$$

Nimmt man hierzu die erste der Gleichungen 11)

$$\frac{y_1-y_2}{2} = \sqrt{\frac{1-(\lambda+1)\,x^2}{\lambda-1+x^2}}\,, \qquad 18)$$

so erhält man $y_1$ und $y_2$ als Function von $x$, also auch, nach 10), als Function von $x_1$ respective $x_2$.

Die Integrale in 13) und 17) sind im Allgemeinen elliptische. Für die weitere Rechnung hat man folgende vier Fälle zu unterscheiden

$$\infty > \lambda > 1, \quad 1 > \lambda > 0$$
$$0 > \lambda > -1, \quad -1 > \lambda > -\infty .$$

Als Grenzfälle treten auf $\lambda = \infty$, $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = -1$. Von den beiden ersten können wir absehen, da sie auf zwei Wirbelfäden zurückführen. In den beiden andern Fällen sind die Integrale in 13) und 17) logarithmische und algebraische.

---

## § 15.

### I. $\infty > \lambda > 1$.

Damit die in den Gleichungen 13) und 17) unter dem Wurzelzeichen stehende Function vierten Grades von $x$ positiv sei, muss $x$ der Bedingung

$$\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}} \geqq x \geqq -\sqrt{\frac{1}{1+\lambda}}$$

genügen. Bei der Reduction der elliptischen Integrale auf die Legendre'schen Normalintegrale ergibt sich $\frac{1}{\lambda}$ als Modul. Um bei der üblichen Bezeichnung zu bleiben, setzen wir

$$\lambda = \frac{1}{\varkappa}. \tag{19}$$

Die vorige Bedingung für $x$ wird dann

$$\sqrt{\frac{\varkappa}{1+\varkappa}} \geqq x \geqq -\sqrt{\frac{\varkappa}{1+\varkappa}}. \tag{20}$$

Setzen wir

$$x = \sqrt{\frac{\varkappa}{1+\varkappa}} \cos\psi\,, \tag{21}$$

so entsprechen den Werthen $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ die Grenzen von $x$ und es wird

$$\frac{dx}{\sqrt{(\lambda - 1 + x^2)(1-(\lambda+1)x^2)}} = -\frac{\varkappa\, d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}\,.$$

Nach Ausführung einiger leichter Rechnungen ergeben sich aus 13), 17) und 18), bei passender Bestimmung der Integrationsconstanten, folgende Gleichungen

$$t = \frac{2}{\varkappa(1-\varkappa^2)} E(\varkappa,\psi) - \frac{2}{\varkappa} F(\varkappa,\psi) - \frac{\varkappa}{1-\varkappa} \frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}} \tag{22}$$

$$y_1 = -\frac{2\varkappa}{1-\varkappa^2} E(\varkappa,\psi) + \left(\frac{\varkappa^2}{1-\varkappa^2}\cos\psi + \sqrt{\varkappa(1+\varkappa)}\right)\frac{\sin\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}} \tag{23}$$

$$y_2 = -\frac{2\varkappa}{1-\varkappa^2} E(\varkappa,\psi) + \left(\frac{\varkappa^2}{1-\varkappa^2}\cos\psi - \sqrt{\varkappa(1+\varkappa)}\right)\frac{\sin\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}, \tag{24}$$

in denen $F(\varkappa, \psi)$ und $E(\varkappa, \psi)$ die Legendre'schen Integrale erster und zweiter Gattung bedeuten. Wenden wir die Substitution 21) auch auf die Gleichungen 12), 14) und die der letztern entsprechend gebildete Gleichung für $\frac{dy_2}{dt}$ an, so erhalten wir die Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = -\frac{dx_2}{dt} = -\sqrt{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}\frac{\sin\psi\,(1-\varkappa^2\sin^2\psi)^{3/2}}{(1+\varkappa\sin^2\psi)^2} \tag{25}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{2+\varkappa+2\varkappa\sin^2\psi - \varkappa^3\sin^4\psi - (1+\varkappa)\sqrt{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}\cos\psi}{(1+\varkappa\sin^2\psi)^2} \tag{26}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -\frac{2+\varkappa+2\varkappa\sin^2\psi - \varkappa^3\sin^4\psi + (1+\varkappa)\sqrt{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}\cos\psi}{(1+\varkappa\sin^2\psi)^2}\,. \tag{27}$$

Diesen Gleichungen entspricht eine periodische Bewegung. Setzt man nämlich $\psi + 2\pi$ an Stelle von $\psi$, so bleiben die Gleichungen für $x$ und die Geschwindigkeiten ungeändert, bei $t$, $y_1$ und $y_2$ treten additive Glieder hinzu; bezeichnen $K$ und $E$ die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, so wird $t$ um

$$T = \frac{8}{\varkappa}\left(\frac{1}{1-\varkappa^2}E - K\right) \tag{28}$$

vermehrt, $y_1$ und $y_2$ werden um

$$Y = \frac{8\varkappa}{1-\varkappa^2}E \tag{29}$$

vermindert. $T$ ist die Dauer einer Periode, $Y$ die Strecke, um die sich die Fäden während dieser Zeit in der Richtung der negativen $y$-Axe verschoben haben. Setzt man $\psi + \pi$ an Stelle von $\psi$, so geht $x_1$ in $x_2$, $\frac{dx_1}{dt}$ in $\frac{dx_2}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$ in $\frac{dy_2}{dt}$ und umgekehrt über, $t$ wird vermehrt um $\frac{1}{2}T$.

Die Bahn des Fadens 1 ist eine in der Richtung der $y$-Axe periodische Curve; die Periode ist gleich $Y$. Die Bahn von 2 ist dieselbe Curve, nur verschoben um $\frac{1}{2}Y$.

Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Faden 1 im Punkte $x_1 = 1 + \sqrt{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}$, $y_1 = 0$; die Richtung der Geschwindigkeit ist parallel der $y$-Axe. Im selben Augenblicke befindet sich 2 an der Stelle $x_2 = 1 - \sqrt{\frac{\varkappa}{1+\varkappa}}$, $y_2 = 0$; die Richtung der Geschwindigkeit ist ebenfalls der $y$-Axe parallel. $x_1$ nimmt nun ab, $y_1$ zunächst zu oder ab, wir lassen das noch unentschieden, $x_2$ und $y_2$ nehmen ab. Zur Zeit $t = \frac{1}{4}T$ passiren beide Fäden an verschiedenen Stellen, aber mit der nämlichen Geschwindigkeit, die Geraden $x_1 = x_2 = 1$, gehen nun mit vertauschten Geschwindigkeiten weiter, bis zur Zeit $t = \frac{1}{2}T$

$$y_1 = y_2 = -\frac{1}{2}Y,\ x_1 = 1 - \sqrt{\frac{\varkappa}{1+\varkappa}},\ x_2 = 1 + \sqrt{\frac{\varkappa}{1+\varkappa}}$$

geworden ist, u. s. f.

Um die Gestalt der Curven, welche von den Wirbelfäden beschrieben werden, deutlicher zu erkennen, untersuchen wir das Verhalten der Differentialquotienten $\frac{d\,y_1}{d\,t}$, $\frac{d\,y_2}{d\,t}$. Dabei dürfen wir uns nach dem Obigen auf die Werthe von $\psi$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ beschränken. Aus 27) ersieht man unmittelbar, dass in diesem Intervall $\frac{d\,y_2}{d\,t}$ beständig negativ ist. Für $\psi = \frac{\pi}{2}$ ist auch $\frac{d\,y_1}{d\,t}$ negativ, für $\psi = 0$ ergibt sich

$$\frac{dy_1}{dt} = -(2+\varkappa) + (1+\varkappa)\sqrt{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}$$

und dieser Ausdruck kann positiv oder negativ sein. Um die beiden Fälle zu trennen, bestimmen wir dasjenige $\varkappa$, wofür derselbe verschwindet. Es ergibt sich die Gleichung

$$\varkappa^2 + \varkappa - 1 = 0$$

und aus dieser die eine brauchbare Wurzel

$$\varkappa = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618\ldots$$

Ist $k > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ so ist

$$2+\varkappa > (1+\varkappa)\sqrt{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}} > (1+\varkappa)\sqrt{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}\cos\psi$$

und da auch

$$2\varkappa\sin^2\psi - \varkappa^3\sin^4\psi > 0$$

so folgt, dass $\frac{d\,y_1}{d\,t}$ beständig negativ ist. In diesem Falle nehmen $y_1$ und $y_2$ fortwährend ab. Falls $\varkappa < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

ist, so verschwindet $\frac{d y_1}{d t}$ zwischen $\psi = 0$ und $\psi = \frac{\pi}{2}$ wenigstens einmal; der zugehörige Werth von $\psi$ bestimmt sich aus der Gleichung

$$2 + \varkappa + 2\varkappa \sin^2 \psi - \varkappa^3 \sin^4 \psi = (1 + \varkappa) \sqrt{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}} \cos \psi .$$

Wenn $\psi$ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, so nimmt die linke Seite dieser Gleichung zu, die rechte ab. Die Gleichung besitzt daher auch nicht mehr als eine Wurzel. Derselben entspricht ein Maximum von $y_1$, die Bahn besitzt einen Doppelpunkt. Im Grenzfalle $\varkappa = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ geht dieser in eine Spitze über.

Wir wollen auch noch die Wendepunkte bestimmen. Nach 15) ist

$$\frac{dy_1}{dx} = - \frac{x^4 + 2(\lambda - 1) x^2 + \lambda^2 x + 1 - 2\lambda}{(\lambda - 1 + x^2)^{3/2} (1 - (\lambda + 1) x^2)^{1/2}} .$$

Die Bedingung für die Wendepunkte, $\frac{d^2 y_1}{d x^2} = 0$, führt zu einer Gleichung vom fünften Grade, deren eine Wurzel $x = 1$ ist. Wie aus 18) ersichtlich ist, kann $x$ niemals den Werth 1 annehmen, nach Division mit $x - 1$ bleibt die Gleichung vierten Grades

$$f(x) \equiv x^4 + (4 + 3\lambda) x^3 - (2 - \lambda) x^2 - (4 - \lambda) x + 1 - \lambda = 0. \qquad 30)$$

Um die Realität der Wurzeln dieser Gleichung zu untersuchen, müssen wir die Werthe von $\lambda$ bestimmen, für welche zwei derselben zusammenfallen. Damit diess der Fall sei, muss auch die Gleichung

$$f'(x) \equiv 4x^3 + (12 + 9\lambda) x^2 - (4 - 2\lambda) x - 4 + \lambda = 0$$

erfüllt sein. Durch Elimination von $x$ aus dieser und der vorigen Gleichung ergibt sich eine Gleichung sechsten Grades in $\lambda$. Einfacher ist es, $\lambda$ zu eliminiren, man erhält die Gleichung

$$3x^6 + 2x^5 + 13x^4 + 28x^3 - 19x^2 + 2x + 3 = 0,$$

welche die beiden reellen Wurzeln

$$x' = -0{,}30186, \qquad x'' = -1{,}90134 \tag{31}$$

besitzt. Die zugehörigen Werthe von $\lambda$ sind

$$\lambda' = \quad 1{,}48732, \qquad \lambda'' = -0{,}65555. \tag{32}$$

Die Gleichung vierten Grades, welche die Wendepunkte bestimmt, besitzt nun

zwei reelle Wurzeln, wenn $\infty > \lambda > \lambda'$
vier » » » $\lambda' > \lambda > \lambda''$
zwei » » » $\lambda'' > \lambda > -\infty$

ist. Beachtet man, dass sich die Wurzeln dieser Gleichung als die Abscissen der Schnittpunkte der beiden Curven

$$y = (x^2 - 1)(x^2 + 4x - 1)$$
$$y = -\lambda(3x^3 + x^2 + x + 1)$$

mit einander darstellen lassen, so gelangt man leicht zu Grenzen innerhalb welcher die Wurzeln in den verschiedenen Fällen liegen. Aus 30) erhält man noch

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\right) = -\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^2 (\lambda - \sqrt{1+\lambda})$$

$$f(\sqrt{1-\lambda}) = -3\lambda^2\sqrt{1-\lambda}$$

$$f(0) = 1 - \lambda, \quad f(\infty) = +\infty.$$

Mit Benutzung dieser Resultate lassen sich nun die Wendepunkte der Curve, welche vom Faden 1 durchlaufen wird, bestimmen und ebenso der Bahn des Fadens 2, wenn man nur $x$ durch $-x$ ersetzt.

Im vorliegenden Falle ergibt sich, dass zwischen $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ die Curve, welche von 1 beschrieben wird, besitzt

keine reellen Wendepunkte für $0 < \varkappa < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,

einen reellen Wendepunkt für $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < \varkappa < \dfrac{1}{\lambda'}$, drei reelle Wendepunkte für $\frac{1}{\lambda'} < \varkappa < 1$.

Die Ausdrücke

$$T = \frac{8}{\varkappa}\left(\frac{1}{1-\varkappa^2}\,E - K\right)$$

$$Y = \frac{8\,\varkappa}{1-\varkappa^2}\,E, \quad X = 2\sqrt{\frac{\varkappa}{1+\varkappa}},$$

deren letzter die Excursion angibt, welche die Fäden nach der Richtung der $x$-Axe machen, erhalten für $\varkappa = 1$ die Werthe

$$T = \infty,\ Y = \infty,\ X = \sqrt{2}.$$

Nimmt $\varkappa$ ab, so nehmen alle drei Grössen ab und con-

Fig. 7.

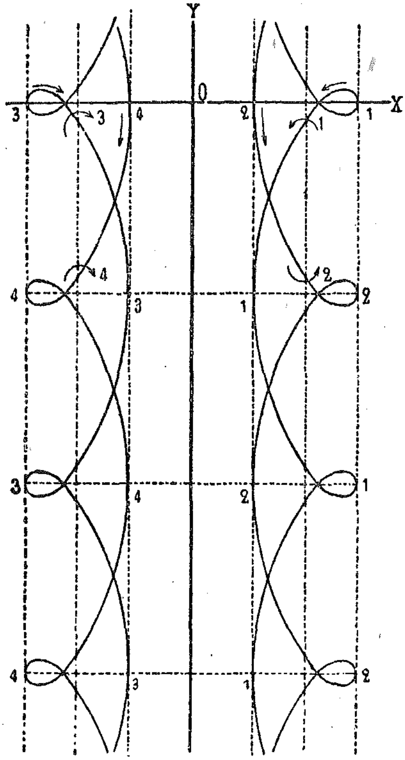
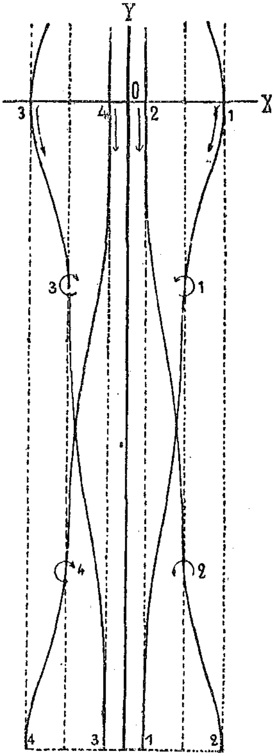



Fig. 8.



vergiren mit $\varkappa$ gegen die Null hin, und zwar die beiden letztern in der Weise, dass auch der Quotient $Y:X$ immer kleiner wird.

Die Figuren 7 und 8, welche den Werthen $\varkappa = \frac{1}{4}$, $\varkappa = \frac{4}{5}$ entsprechen, mögen eine ungefähre Vorstellung von dem Verlaufe der Bewegung geben.

---

## § 16.

### II. $1 > \lambda > 0$.

Bei der Reduction der elliptischen Integrale ergibt sich $\lambda$ als Modul, wir setzen daher

$$\lambda = k. \tag{33}$$

$x$ muss den Bedingungen

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varkappa}} \geqq x \geqq \sqrt{1-k} \tag{34}$$

genügen. Setzen wir

$$x = \sqrt{\frac{1-k^2\sin^2\psi}{1+k}}, \tag{35}$$

so entsprechen den Werthen $\psi = 0$ und $\psi = \frac{\pi}{2}$ die Grenzen von $x$, es wird

$$\frac{dx}{\sqrt{(\varkappa - 1 + x^2)(1-(\varkappa+1)x^2)}} = - \frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}$$

und aus 13), 17), 18) u. s. f. ergeben sich folgende Gleichungen

$$t = - \frac{2\varkappa^2}{1-\varkappa^2} E(\varkappa,\psi) + \frac{\varkappa}{1-\varkappa} \operatorname{tg}\psi \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi} \tag{36}$$

$$y_1 = \frac{2}{1-\varkappa^2} E(\varkappa,\psi) - 2F(\varkappa,\psi) - \left(\frac{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}{1-\varkappa} - \sqrt{1+\varkappa}\right)\operatorname{tg}\psi \tag{37}$$

$$y_2 = \frac{2}{1-\varkappa^2} E(\varkappa,\psi) - 2F(\varkappa,\psi) - \left(\frac{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}{1-\varkappa} + \sqrt{1+\varkappa}\right)\operatorname{tg}\psi \quad 38)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\varkappa\sqrt{1+\varkappa}\,\frac{\sin\psi\cos^3\psi}{(1+\varkappa\sin^2\psi)^2} \quad 39)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{(1+\varkappa)^2 - \varkappa^2\cos^4\psi - (1+\varkappa)^{3/2}\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}{\varkappa(1+\varkappa\sin^2\psi)^2} \quad 40)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -\frac{(1+\varkappa)^2 - \varkappa^2\cos^4\psi + (1+\varkappa)^{3/2}\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}{\varkappa(1+\varkappa\sin^2\psi)^2}. \quad 41)$$

Die Integrationsconstanten sind so bestimmt, dass die Grössen $t$, $\psi$, $y_1$, $y_2$ zugleich verschwinden.

Für $\psi = 0$ ergibt sich aus diesen Gleichungen

$$t = 0,\ x = \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa}},\quad y_1 = 0,\quad y_2 = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = 0,\ \frac{dy_1}{dt} = -\frac{1+2\varkappa-(1+\varkappa)^{3/2}}{\varkappa},\ \frac{dy_2}{dt} = -\frac{1+2\varkappa+(1+\varkappa)^{3/2}}{\varkappa}$$

und für $\psi = \frac{\pi}{2}$

$$t = \infty,\quad x = \sqrt{1-\varkappa},\quad y_1 = -\infty,\quad y_2 = -\infty$$

$$\frac{dx}{dt} = 0,\ \frac{dy_1}{dt} = -\frac{1-\sqrt{1-\varkappa}}{\varkappa},\ \frac{dy_2}{dt} = -\frac{1+\sqrt{1-\varkappa}}{\varkappa}.$$

Sowohl $\frac{dx}{dt}$ als $\frac{dy_1}{dt}$ und $\frac{dy_2}{dt}$ sind im Intervalle $\psi = 0$ bis $\psi = \frac{\pi}{2}$ beständig negativ. Die Richtigkeit dieser Behauptung für die erste und dritte dieser Grössen lehrt der unmittelbare Anblick der betreffenden Gleichungen. Um zu beweisen dass $\frac{dy_1}{dt}$ negativ ist, hat man zu zeigen dass

$$(1+\varkappa)^2 - \varkappa^2\cos^4\psi > (1+\varkappa)^{3/2}\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}$$

ist. Die linke Seite dieser Ungleichheit ist $> 1 + 2\varkappa$, die rechte $< (1+\varkappa)^{3/2}$ und da nun

$$1 + 2\varkappa > (1+\varkappa)^{3/2},$$

so ist unsere Behauptung bewiesen. Vom Augenblicke $t = 0$ an nehmen also $x$, $y_1$, $y_2$ fortwährend ab.

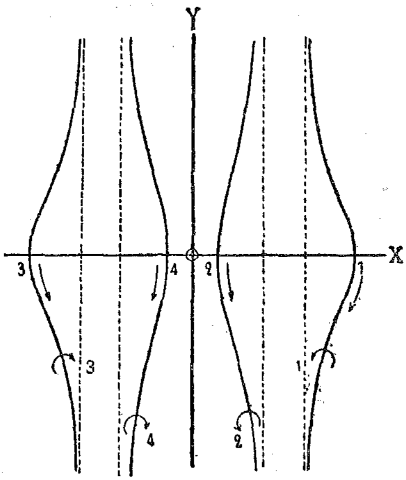
Zur Zeit $t = 0$ befinden sich die Fäden 1 und 2 in der $x$-Axe, es ist

$$x_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa}}, \quad x_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa}}$$

die Richtung der Geschwindigkeit stimmt überein mit der Richtung der negativen $y$-Axe. Sowohl $y_1$ als $y_2$ nehmen beständig ab, der Faden 2 eilt dem Faden 1 voraus und zwar in der Weise, dass die Entfernung der Fäden von einander in's Unbegrenzte wächst. $x_1$ nimmt ab, $x_2$ zu. Die Excursion in der Richtung der $x$-Axe ist

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa}} - \sqrt{1-\varkappa}.$$

Fig. 9.




Die Geraden

$$x_1 = 1 + \sqrt{1-\varkappa}$$
$$x_2 = 1 - \sqrt{1-\varkappa}$$

sind Asymptoten der Curven, welche von den beiden Fäden beschrieben werden. Die Curve 1 schliesst sich viel rascher an ihre Asymptote an als 2. Jede der Curven besitzt für negative $y$ einen Wendepunkt. Figur 9, welche dem Werthe $\varkappa = \frac{24}{25}$ entspricht, möge ein Bild von dem Verlaufe der Bewegung geben.

## § 17.

### III. $\lambda = 1$.

Setzt man

$$x = \frac{\cos\psi}{\sqrt{2}}, \tag{42}$$

so ergeben sich die Gleichungen

$$t = \frac{1}{2}\sin\psi + \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi} - \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) \tag{43}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\sin\psi - \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi} + \sqrt{2}\operatorname{tg}\psi - \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) \tag{44}$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\sin\psi - \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi} - \sqrt{2}\operatorname{tg}\psi - \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right). \tag{45}$$

Die übrigen Formeln erhält man aus den entsprechenden des vorigen Paragraphen, indem man $\varkappa = 1$ setzt.

---

## § 18.

### IV. $0 > \lambda > -1$.

$x$ muss den Bedingungen

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} \geqq x \geqq \sqrt{1-\lambda}$$

genügen. Die Fäden 1 und 2 liegen, da $x > 1$, auf verschiedenen Seiten der Symmetrieaxe. Die Grösse $-\lambda$ ergibt sich als Modul der elliptischen Integrale, setzen wir

$$\lambda = -\varkappa, \tag{46}$$

so gehen die Bedingungen für $x$ in

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa}} \geqq x \geqq \sqrt{1+\varkappa} \tag{47}$$

über. Diese Bedingungen unterscheiden sich von denen des Falles $1 > \lambda > 0$ nur dadurch, dass $\varkappa$ durch $-\varkappa$ ersetzt ist. Es wird daher die Substitution

$$x = \sqrt{\frac{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}{1 - \varkappa}} \tag{48}$$

zu verwenden sein und sämmtliche Formeln können aus den frühern unmittelbar erhalten werden, indem man $\varkappa$ durch $-\varkappa$ ersetzt. In der Gleichung, die sich auf diese Weise für $t$ ergibt, entsprechen positiven Werthen von $\psi$ negative Werthe von $t$. Um diess zu vermeiden, ersetzen wir überall $\psi$ durch $-\psi$, mit andern Worten, wir geben der in den Gleichungen 13) und 17) auftretenden Wurzel das negative Vorzeichen. So erhalten wir folgende Gleichungen

$$t = \frac{2\varkappa^2}{1-\varkappa^2} E(\varkappa, \psi) + \frac{\varkappa}{1+\varkappa} \operatorname{tg} \psi \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi} \tag{49}$$

$$y_1 = \frac{-2}{1-\varkappa^2} E(\varkappa, \psi) + 2F(\varkappa, \psi) + \left(\frac{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\psi}}{1+\varkappa} - \sqrt{1-\varkappa}\right) \operatorname{tg}\psi \tag{50}$$

$$y_2 = \frac{-2}{1-\varkappa^2} E(\varkappa, \psi) + 2F(\varkappa, \psi) + \left(\frac{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\psi}}{1+\varkappa} + \sqrt{1-\varkappa}\right) \operatorname{tg}\psi \tag{51}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\varkappa \sqrt{1-\varkappa}\, \frac{\sin\psi \cos^3\psi}{(1-\varkappa \sin^2\psi)^2} \tag{52}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{(1-\varkappa)^2 - \varkappa^2 \cos^4\psi - (1-\varkappa)^{3/2} \sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\psi}}{\varkappa\,(1-\varkappa\sin^2\psi)^2} \tag{53}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{(1-\varkappa)^2 - \varkappa^2 \cos^4\psi + (1-\varkappa)^{3/2} \sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\psi}}{\varkappa\,(1-\varkappa\sin^2\psi)^2}\,. \tag{54}$$

Für $\psi = 0$ ergibt sich

$$t = 0, \quad x = \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa}}, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{1 - 2\varkappa - (1-\varkappa)^{3/2}}{\varkappa}, \quad \frac{dy_2}{dt} = \frac{1 - 2\varkappa + (1-\varkappa)^{3/2}}{\varkappa}$$

und für $\psi = \frac{\pi}{2}$

$$t = \infty, \quad x = \sqrt{1+\varkappa}, \quad y_1 = -\infty, \quad y_2 = \infty$$

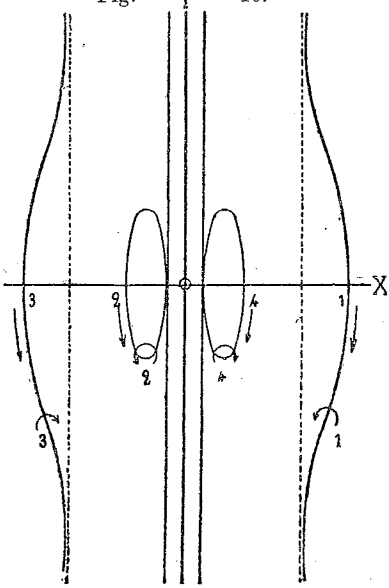
$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{1 - \sqrt{1+\varkappa}}{\varkappa}, \quad \frac{dy_2}{dt} = \frac{1 + \sqrt{1+\varkappa}}{\varkappa}.$$

Für das Intervall $\psi = 0$ bis $\psi = \frac{\pi}{2}$ ist $\frac{dx}{dt}$ beständig negativ. Da $\frac{dy_1}{dt}$ sowohl am Anfang wie am Ende dieses Intervalles negativ ist, so muss die Anzahl der Werthe, für welche es inzwischen verschwindet, eine gerade sein. Damit $\frac{dy_1}{dt} = 0$ sei, muss die Gleichung

$$(1-\varkappa)^2 - \varkappa^2 \cos^4\psi = (1-\varkappa)^{3/2}\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\psi}$$

bestehen. Die linke Seite wächst mit $\psi$, die rechte nimmt ab, es kann daher höchstens eine Wurzel vorhanden sein. Daraus folgt, dass $\frac{dy_1}{dt}$ überhaupt nicht verschwindet, $y_1$ nimmt fortwährend ab. Für $\psi = \frac{\pi}{2}$ ist $\frac{dy_2}{dt}$ positiv, für

Fig. 10.




$\psi = 0$ positiv oder negativ, je nachdem

$$\varkappa \gtrless \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

ist. Im ersten Falle ist $\frac{dy_2}{dt}$ beständig positiv, im zweiten wird es einmal gleich Null; die Curve, welche von 2 durchlaufen wird, besitzt einen Doppelpunkt, eventuell, für $\varkappa = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, eine Spitze. Die Curve 1 besitzt einen Wendepunkt, welches auch der Werth von $\varkappa$ sei, 2 dagegen nur, wenn $\varkappa < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ist. Figur 10 entspricht dem Werthe $\varkappa = \frac{4}{5}$.

## § 19.

### V. $-1 > \lambda > -\infty$.

Wir setzen

$$\lambda = -\frac{1}{\varkappa}, \tag{55}$$

es wird dann $\varkappa$ der Modul der elliptischen Integrale. $x$ muss der Bedingung

$$\sqrt{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}} < x < \infty \tag{56}$$

genügen. Durch Anwendung der Substitution

$$x = \sqrt{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}\,\frac{1}{\cos\psi} \tag{57}$$

erhält man, bei passender Bestimmung der Integrationsconstanten, folgende Gleichungen

$$t = \frac{-2}{\varkappa(1-\varkappa^2)} E(\varkappa,\psi) + \frac{2}{\varkappa} F(\varkappa,\psi) + \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{1}{1-\varkappa}\operatorname{tg}\psi - \frac{1}{1+\varkappa}\operatorname{cotg}\psi\right)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi} \tag{58}$$

$$y_1 = \frac{2\varkappa}{1-\varkappa^2} E(\varkappa,\psi) - \left(\frac{1}{1-\varkappa}\operatorname{tg}\psi + \frac{1}{1+\varkappa}\operatorname{cotg}\psi - \frac{1}{\sqrt{\varkappa(1+\varkappa)}\sin\psi}\right)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi} \tag{59}$$

$$y_2 = \frac{2\varkappa}{1-\varkappa^2} E(\varkappa,\psi) - \left(\frac{1}{1-\varkappa}\operatorname{tg}\psi + \frac{1}{1+\varkappa}\operatorname{cotg}\psi + \frac{1}{\sqrt{\varkappa(1+\varkappa)}\sin\psi}\right)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi} \tag{60}$$

$$\frac{dx}{dt} = (1+\varkappa)\sqrt{\varkappa(1+\varkappa)}\;\frac{\sin^3\psi\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}{(1+\varkappa\sin^2\psi)^2} \tag{61}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{-\varkappa+2\varkappa\sin^2\psi+\varkappa^2(2+\varkappa)\sin^4\psi+\sqrt{\varkappa(1+\varkappa)}\cos^3\psi}{(1+\varkappa\sin^2\psi)^2} \tag{62}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -\frac{-\varkappa + 2\varkappa \sin^2\psi + \varkappa^2(2+\varkappa)\sin^4\psi - \sqrt{\varkappa(1+\varkappa)}\cos^3\psi}{(1+\varkappa\sin^2\psi)^2} \quad 63)$$

Für $\psi = 0$ ist

$$t = -\infty,\ x = \sqrt{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}},\quad y_1 = \infty,\ y_2 = -\infty$$

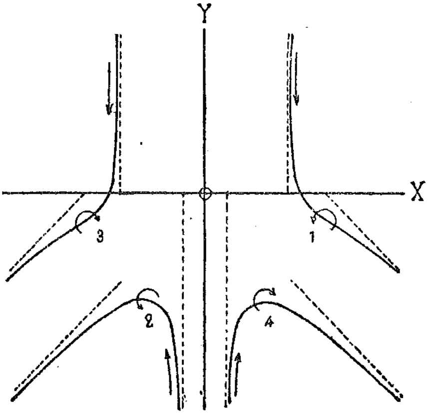
$$\frac{dx}{dt} = 0,\quad \frac{dy_1}{dt} = \varkappa - \sqrt{\varkappa(1+\varkappa)},\quad \frac{dy_2}{dt} = \varkappa + \sqrt{\varkappa(1+\varkappa)}$$

und für $\psi = \frac{\pi}{2}$

$$t = \infty,\quad x = \infty,\quad y_1 = -\infty,\quad y_2 = -\infty$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\varkappa(1+\varkappa)},\quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dt} = -\varkappa.$$

Fig. 11.




$y_1$ nimmt beständig ab, $y_2$ erst zu, dann ab. Die Geraden

$$x_1 = 1 + \sqrt{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}},\qquad x_2 = 1 - \sqrt{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}} \quad 64)$$

sind Asymptoten der Bahnen von 1 und 2. Jede der Curven besitzt noch eine zweite Asymptote; die Gleichungen dieser Asymptoten sind

$$y_1 = -\sqrt{\frac{\varkappa}{1+\varkappa}}\, x_1 + \frac{2\varkappa}{1-\varkappa^2} E + \frac{1}{\sqrt{\varkappa(1-\varkappa)}}$$
$$y_2 = \sqrt{\frac{\varkappa}{1+\varkappa}}\, x_2 + \frac{2\varkappa}{1-\varkappa^2} E - \frac{1}{\sqrt{\varkappa(1-\varkappa)}}. \quad 65)$$

Die Curve, welche von 1 durchlaufen wird, besitzt einen Wendepunkt. Figur 11 entspricht dem Werthe $\varkappa = \frac{1}{2}$.

## § 20.

VI. $\lambda = -1$.

Setzt man

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\cos\psi} \tag{66}$$

so ergeben sich, bei passender Bestimmung der Integrationsconstanten, die Gleichungen

$$t = \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi} - \frac{1}{2\sin\psi} + \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) \tag{67}$$

$$y_1 = -\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi} - \frac{1}{2\sin\psi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{cotg}\psi + \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) \tag{68}$$

$$y_2 = -\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi} - \frac{1}{2\sin\psi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{cotg}\psi + \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) \tag{69}$$

Die übrigen Formeln erhält man für $\varkappa = 1$ aus den entsprechenden des vorigen Paragraphen.

---

# Ueber die Bewegung von $2n$ Wirbelfäden, unter Voraussetzung von $n$ Symmetrieebenen.

## § 21.

Für die Bewegung in der $xy$-Ebene existiren $n$ Symmetrieaxen, welche alle durch denselben Punkt gehen müssen und die ganze Ebene in $2n$ congruente Winkelräume zerlegen. In jedem dieser befindet sich ein Faden. Den Schnittpunkt der Symmetrieaxen machen wir zum Anfangspunkt der Coordinaten, eine der Symmetrieaxen zur $x$-Axe. Von dieser aus in positivem Sinne um den Anfangspunkt herumgehend, sollen die Fäden $1, 2, \ldots\ldots 2n$ der Reihe nach aufeinanderfolgen. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit die vorausgesetzte Bewegung möglich sei, sind

$$m_1 = -m_2 = m_3 = -m_4 = \cdots\cdots = m_{2n-1} = -m_{2n}\,. \tag{1}$$

Wir nehmen $m_1$ als positiv an und können dann, über die Einheit der Zeit verfügend, den gemeinschaftlichen Werth dieser Grössen gleich $2\pi$ setzen.

Bedeuten $\varrho_1, \vartheta_1$; $\varrho_2, \vartheta_2$; $\cdots\cdots \varrho_{2n}, \vartheta_{2n}$ die Polarcoordinaten der Wirbelfäden, so ist

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \cdots\cdots\cdots = \varrho_{2n}\,, \tag{2}$$

ferner

$$\begin{array}{ll} \vartheta_2 = \dfrac{2\pi}{n} - \vartheta_1\,, & \vartheta_3 = \dfrac{2\pi}{n} + \vartheta_1 \\ \vartheta_4 = \dfrac{4\pi}{n} - \vartheta_1\,, & \vartheta_5 = \dfrac{4\pi}{n} + \vartheta_1 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \vartheta_{2n} = 2\pi - \vartheta_1\,, & \vartheta_{2n-1} = \dfrac{(2n-2)\pi}{n} + \vartheta_1\,. \end{array} \tag{3}$$

Um die Bewegung des ersten Fadens zu bestimmen, benutzen wir die Gleichungen

$$m_1\,\varrho_1\,\frac{d\varrho_1}{dt} = \frac{\partial P}{\partial \vartheta_1}\,, \quad m_1\,\varrho_1\,\frac{d\vartheta_1}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial \varrho_1}\,.$$

Aus

$$P = -\frac{1}{\pi}\,\Sigma\, m_1\, m_2 \log \varrho_{12}$$

ergibt sich, mit Benutzung von 2),

$$\frac{\partial P}{\partial \vartheta_1} = -\frac{m_1}{\pi}\,\Sigma m_2 \operatorname{cotg}\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\,.$$

Die Summe ist so zu verstehen, dass man an Stelle des Index 2 nacheinander die Indices 3, 4, $\cdots 2n$ setzt. Mit Rücksicht auf 1) und 3) lässt sich diese Gleichung schreiben

$$\frac{\partial P}{\partial \vartheta_1} = 2\pi \left\{ \operatorname{cotg}\left(\vartheta_1 - \frac{\pi}{n}\right) + \operatorname{cotg}\left(\vartheta_1 - \frac{2\pi}{\pi}\right) + \cdots + \operatorname{cotg}(\vartheta_1 - \pi) \right\}$$
$$+ 2\pi \left\{ \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n} + \operatorname{cotg}\frac{2\pi}{n} + \cdots\cdots\cdots + \operatorname{cotg}\frac{(n-1)\pi}{n} \right\}.$$

Der in der zweiten Klammer stehende Ausdruck verschwindet, weil sich die Glieder von den beiden Enden weg paarweise aufheben und das Mittelglied, welches bei geradem $n$ vorhanden ist, von selbst wegfällt. Die in der ersten Klammer befindliche Reihe ist gleich $n \operatorname{cotg} n\vartheta_1$, und daher ist

$$\frac{\partial P}{\partial \vartheta_1} = 2 n \pi \operatorname{cotg} n \vartheta_1 .$$

Aus der obigen Gleichung für $P$ ergibt sich ferner

$$\frac{\partial P}{\partial \varrho_1} = \frac{2\pi}{\varrho_1}$$

und wir gelangen zu den folgenden Gleichungen

$$\varrho_1 \frac{d\varrho_1}{dt} = n \operatorname{cotg} n \vartheta_1 , \qquad \varrho_1{}^2 \frac{d\vartheta_1}{dt} = -1 . \tag{4}$$

Aus diesen folgt durch Elimination von $t$

$$\frac{d\varrho_1}{\varrho_1} = - n \operatorname{cotg} n \vartheta_1 . d\vartheta_1$$

und hieraus durch Integration

$$\varrho_1 \sin n \vartheta_1 = 1 , \tag{5}$$

wenn wir, was gestattet ist, der Integrationsconstanten einen speciellen Werth beilegen.

Diese Gleichung stellt die Bahn des Fadens 1 dar, wenn wir $\vartheta_1$ von 0 bis $\frac{\pi}{n}$ gehen lassen. Geben wir $\vartheta_1$ alle Werthe von 0 bis $2\pi$, so erhalten wir aus 5) nicht nur die Bahn des ersten Fadens, sondern bei geradem $n$

die Bahnen sämmtlicher Wirbelfäden, bei ungeradem $n$ die Bahnen der Fäden 1, 3, 5, ..... $2n-1$. Die Curven, welche von den Fäden 2, 4, ..... $2n$ beschrieben werden, sind in der Gleichung

$$\varrho_2 \sin n\vartheta_2 = -1$$

enthalten. Wir können daher allgemein sagen, dass die Gleichung

$$\varrho^2 \sin^2 n\vartheta = 1 \tag{6}$$

die Bahnen aller Wirbelfäden repräsentirt. Diese Gleichung stellt eine Curve von der Ordnung $2n$ dar, welche aus $2n$ congruenten Zweigen besteht und für ein ungerades $n$ in die beiden Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\varrho \sin n\vartheta = \pm 1$$

zerfällt. Die Geraden, welche die Winkel zwischen den Symmetrieaxen der Bewegung halbiren, sind Symmetrieaxen der Curve. Aus 6) folgt

$$y^2 = \frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2 n\vartheta}$$

und hieraus für unendlich kleine $\vartheta$

$$y^2 = \frac{1}{n^2}\,.$$

$\varrho$ wird unendlich gross, es sind daher die Geraden parallel den Symmetrieaxen der Bewegung, im Abstande $\frac{1}{n}$ von denselben, Asymptoten.

Aus 5) und der zweiten Gleichung 4) ergibt sich durch Elimination von $\varrho_1$ und durch Quadratur

$$\operatorname{cotg} n\vartheta_1 = nt \tag{7}$$

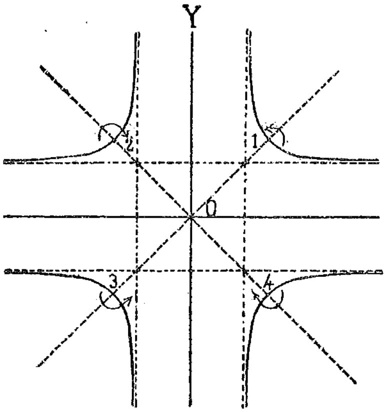
und nun aus 5)

$$\varrho_1{}^2 = 1 + n^2 t^2\,. \tag{8}$$

Die Zeit ist gezählt von dem Augenblicke an, in welchem $\varrho_1 = 1, \vartheta_1 = \frac{\pi}{2n}$ ist. $\varrho_1$ nimmt zu, $\vartheta_1$ ab.

Für die Geschwindigkeit ergibt sich die Gleichung

Fig. 12.




$$w_1^2 = \frac{1 + n^4 t^2}{1 + n^2 t^2} = \frac{1 - n^2 + n^2 \varrho_1^2}{\varrho_1^2}. \qquad 9)$$

Die Geschwindigkeit ist ein Minimum, $w_1 = 1$, für $t = 0$ und nimmt dann beständig zu, indem sie sich der Grenze $n$ nähert.

Figur 12 entspricht der Annahme $n = 2$.

---

(Aus dem physiologischen Laboratorium in Zürich.)

# Ueber den Ersatz des Eiweisses in der Nahrung durch Leim und Tyrosin. II.

Von

**Louis Froelich,** stud. med. aus Lausanne.

Die in Aussicht gestellte Fortsetzung der Versuche des Herrn Dr. Theodor Escher (vgl. diese Vierteljahrsschrift 1876, Seite 36) wurde mir von Herrn Prof. Hermann zur Aufgabe während des Wintersemesters 1876 zu 1877 gemacht.