Die birationalen Transformationen in der Geometrie der Lage.

Von

Wilhelm Fiedler.

Die birationalen Transformationen oder die rückwärts wie vorwärts eindeutigen Abbildungen zwischen räumlichen Gebilden von gleicher Mächtigkeit oder von derselben Stufe haben bekanntlich ihren Ursprung in den nahe gleichzeitigen Untersuchungen von Magnus («Crelle's Journal» Bd. 8, pag. 51 und «Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie». 1833. § 50 f. und § 63) und von J. Steiner («Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander« 1832. § 59) über die Abbildung der Elementargebilde zweiter Stufe — wenn man absieht von dem besondern Falle der stereographischen Transformation oder der Theorie der reciproken Radien, der ja auch erst im Gefolge dieser Untersuchungen seine genauere Erledigung gefunden hat. In Durchbildung ihrer Grundgedanken gab Cremona in der Abhandlung «Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane («Memorie dell' Accad. delle Scienze dell' Istit. di Bologna» 1863) die Grundlagen der allgemeinen Lösung des Problems der eindeutigen Abbildung zwischen zwei Ebenen und den Nachweis, dass ein gewisser specieller Fall der Transformation n^{ten} Grades mittelst projicirender Regelflächen mit zwei gegebenen Leitcurven also nach dem Typus der Steiner'schen hyperboloidischen Projection hervorgebracht werden könne. Die systematische Stellung der birationalen Transformationen in der Geometrie der Lage wurde nur in dem geometrischen Ausgangspunkt der Untersuchung von Magnus berührt, blieb aber sonst über dem Streben nach analytischer Allgemeinheit vollständig ausser Betracht, und ward in den manichfachen Darstellungen der Geometrie der Lage grossentheils schon in Folge ihres nur einleitenden Characters und ihrer Unvollständigkeit ebenfalls nicht dargelegt. Ich habe die Theorie in den Bearbeitnngen der Werke meines Freundes G. Salmon über analytische Geometrie gegeben im VIII. Kap. der «Höheren ebenen Curven« pag. 358 u. f. und gleichfalls im VIII. Kap. des zweiten Bandes der «Geometrie des Raumes» p. 448—506, 2. Aufl. 1874. In meinen Vorlesungen über diesen Gegenstand, denen ein systematisch vollständiger Curs der Geometrie der Lage vorausgeht, widme ich dem Zusammenhange der Theorie der birationalen Transformationen mit der Geometrie der Lage naturgemäss besondere Aufmerksamkeit. Ich will hier die Hauptzüge desselben in aller Kürze mittheilen, in der Hoffnung, dadurch zu Untersuchungen in dieser Richtung anzuregen.

Bei der Erzeugung von algebraischen Curven und Flächen aus projectivischen Elementargebilden ist immer durch die Erzeugung auch die Abbildung auf ein Elementargebilde von selbst mitgegeben; so bei der Erzeugung der Kegelschnitte die Abbildung seiner Punkte oder Tangenten auf das Strahlbüschel und die gerade Punktreihe, bei der der Flächen zweiten Grades aus reciproken Bündeln oder Ebenen die Abbildung der Flächen zweiten Grades auf die Ebene oder in das Bündel; bei der der Flächen dritter Ordnung aus drei collinearen Bündeln zugleich die Punkt-Abbildung dieser

Flächen auf das Bündel und damit auf die Ebene; bei der der Raumcurven dritter Ordnung und der Congruenz ihrer zweifach schneidenden Geraden aus zwei collinearen Bündeln die Abbildung dieser Congruenz; etc. In der That sind die ersten Beispiele der Abbildung algebraischer Oberflächen auf die Ebene in ihrer analytischen Form bei Clebsch nichts anderes als die algebraischen Formulirungen und eleganten Durchführungen dieser Abhängigkeiten. Und im Verfolg dieser Bestrebungen ist die Theorie der birationalen Raumtransformationen von Cremona entwickelt worden, in natürlicher Erweiterung seiner Theorie der birationalen Transformationen des ebenen Systems. Es wird sich zeigen, dass die einfacheren Bestandtheile beider Theorien in natürlicher Verbindung aus dem System der Geometrie der Lage hervorgehen.

Bei der Untersuchung der Projectivität der in einanderliegenden Elementargebilde zweiter Stufe sind nach einander die Fälle der Collineation, der Reciprocität und die der Involutionen beider, also der centrischen harmonischen Collineation und des Polarsystems zu betrachten; bei der Projectivität der Elementargebilde dritter Stufe die Fälle der Collineation, der Reciprocität, der centrischen und geschaarten Involution collinearer Systeme, und der involutorischen Reciprocitäten in den beiden Formen des Polarsystems und des Nullsystems. Sie führen von selbst auf eine Reihe der wichtigsten und einfachsten birationalen Transformationen durch die Betrachtung der doppeltconjugierten Elemente zn einem gegebenen Elemente.

Bekanntlich erhält man so aus zwei vereinigten ebenen Polarsystemen die Magnus-Steiner'sche Verwandtschaft. Wenn man nach Nachweisung seiner Existenz das gemeinsame Tripel harmonischer Pole und Polaren derselben oder das gemeinsame Quadrupel respective im Falle der Gebilde zweiter oder dritter Stufe zum Fundamental-Dreieck oder Tetraeder macht, so werden die gleichbedeutenden linearen Substitutionen durch das Verschwinden aller Coefficienten mit ungleichen Indices specialisiert oder die Polarsysteme werden durch die Gleichungen

$$\varrho\, \xi_i = \alpha_i\, x_i\,, \quad \varrho\, \xi_i = \beta_i\, x_i$$

respective ausgedrückt. Der dem Punkte y_i entsprechende Punkt $y_i{}^*$ im Falle des Gebildes zweiter Stufe ist daher der Schnittpunkt der Geraden

$$\alpha_1\, y_1\, x_1 + \alpha_2\, y_2\, x_2 + \alpha_3\, y_3\, x_3 = 0,$$
$$\beta_1\, y_1\, x_1 + \beta_2\, y_2\, x_2 + \beta_3\, y_3\, x_3 = 0$$

oder man hat

$$y_1^* : y_2^* : y_3^* = y_2\, y_3\, (\alpha_2\, \beta_3 - \alpha_3\, \beta_2) : y_3\, y_1\, (\alpha_3\, \beta_1 - \alpha_1\, \beta_3) : y_1\, y_2\, (\alpha_1\, \beta_2 - \alpha_2\, \beta_1)$$

mit der Umkehrung

$$y_1 : y_2 : y_3 = y_2^*\, y_3^* (\alpha_2\, \beta_3 - \alpha_3\, \beta_2) : y_3^*\, y_1^*\, (\alpha_3\, \beta_1 - \alpha_1\, \beta_3) : y_1^*\, y_2^*\, (\alpha_1\, \beta_2 - \alpha_2\, \beta_1);$$

woraus sich durch $y_i^* = y_i$ eine sich selbst entsprechende Punktegruppe ergiebt, nämlich die der vier gemeinsamen Punkte der beiden Directrixkegelschnitte, und durch

$$y_1^* : y_2^* = (A_1\, A_2\, E_3\, Y_3{}^*) = \frac{(\alpha_2\, \beta_3 - \alpha_3\, \beta_2)\, y_2}{(\alpha_3\, \beta_1 - \alpha_1\, \beta_3)\, y_1} = \frac{\alpha_2\, \beta_3 - \alpha_3 \beta_2}{\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1\, \beta_3}\, (A_2\, A_1\, E_3\, Y_3), \text{ etc.}$$

leicht die Construction von Y^* aus Y mittelst involutorischer Büschel erhalten wird. Offenbar entspricht den zweifach unendlich vielen Geraden

$$\xi_1\, x_1 + \xi_2\, x_2 + \xi_3\, x_3 = 0$$

der Ebene das Gebilde von zweifach unendlich vielen Kegelschnitten durch die Punkte des gemeinsamen Tripels

$$\xi_1 (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) x_2 x_3 + \xi_2 (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) x_3 x_1 + \xi_3 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) x_1 x_2 = 0$$

welche mit $\xi_i = o$ in zwei Gerade nämlich die gleichnamige Fundamentallinie $x_i = o$ und einen Strahl durch die entsprechende Ecke A_i zerfallen. Wenn zwei Punkte des gemeinsamen Tripels in die Kreispunkte der Ebene fallen, so erhält man die Kreisverwandtschaft. Zwei Polarsysteme im Raum führen vom Punkt y_i zur Schnittlinie seiner entsprechenden Ebenen und von den dreifach unendlich vielen Punkten des Raumes zu den dreifach unendlich vielen Strahlen eines tetraedralen Complexes von leicht bestimmbarem Doppelverhältniss. Denkt man drei Polarsysteme im Raum, so besitzen dieselben im Allgemeinen kein gemeinsames Quadrupel und man muss also, wenn man die beiden ersten in derselben vereinfachten Substitutionsform ausdrückt, das dritte durch die allgemeine lineare Substitution mit $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ darstellen. Dem Punkte ist dreifach conjugiert ein anderer Punkt, der Schnitt der drei entsprechenden Ebenen; das Entsprechen ist ein involutorisches; der Ebene und der geraden Reihe entsprechen respective eine Fläche und eine Raumcurve dritter Ordnung, etc. (Vergl. Magnus «Aufgaben und Lehrsätze» Bd. 2, § 83.) Die gemeinsamen Punkte der drei Directrixflächen der Polarsysteme entsprechen sich selbst. Die Untersuchung der allgemeinen Reciprocität in vereinigten Gebilden zweiter Stufe führt auf ganz Analoges. Man zeigt die Existenz von drei involutorisch entsprechenden Elementenpaaren, die ein Dreieck $A_1 A_2 A_3$ bilden und von denen zwei A_2, $A_2 A_1$ und A_3, $A_3 A_1$ zugleich ineinanderliegend sind, während das dritte A_1, $A_2 A_3$ getrennt liegt. (Vergl. meine «Darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage» § 160.) In Bezug auf diess Dreieck als fundamental erhalten die Substitutionen der Reciprocität die einfache Form

$$m\xi_1' = \alpha_{11} x_1,\ m\xi_2' = \alpha_{23} x_3,\ m\xi_3' = \alpha_{32} x_2;$$
$$\varrho\xi_1 = \alpha_{11} x_1',\ \varrho\xi_2 = \alpha_{32} x_3',\ \varrho\xi_3 = \alpha_{23} x_2'.$$

Dem Punkte y_i entspricht ein Punkt y_i^* als doppeltconjugiert nach den Relationen

$$y_1^* : y_2^* ; y_3^* = -y_2 y_3 (\alpha_{23} + \alpha_{32}) : y_1 y_2 \alpha_{11} : y_1 y_3 \alpha_{11}$$
$$= -\frac{\alpha_{23} + \alpha_{32}}{y_1} : \frac{\alpha_{11}}{y_3} : \frac{\alpha_{11}}{y_2};$$

mit der Umkehrung

$$y_1 : y_2 : y_3 = -\frac{\alpha_{23} + \alpha_{32}}{y_1^*} : \frac{\alpha_{11}}{y_3^*} : \frac{\alpha_{11}}{y_2^*};$$

woraus zur Construction sich ergiebt

$$y_2^* : y_3^* = y_2 : y_3,$$

oder entsprechende Punkte liegen auf demselben Strahl aus A_1, und

$$y_1^* : y_2^* = (A_1\, A_2\, E_3\, Y_3^*) = -\frac{\alpha_{23} + \alpha_{32}}{\alpha_{11}}\, \frac{y_3}{y_1}$$
$$= -\frac{\alpha_{23} + \alpha_{32}}{\alpha_{11}}\, (A_3\, A_1\, E_2\, Y_2).$$

Den Geraden $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ entsprechen die Kegelschnitte durch die Fundamentalpunkte

$$-\xi_1 x_2 x_3 (\alpha_{23} + \alpha_{32}) + \xi_2 x_1 x_2 \alpha_{11} + \xi_3 x_1 x_3 \alpha_{11} = 0,$$

welche für $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, oder $\xi_3 = 0$ respective zerfallen in die Paare von Geraden

$$\alpha_{11} x_1 (\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) = 0,\ x_3 \left\{\alpha_{11} \xi_3 x_1 - (\alpha_{23} + \alpha_{32}) \xi_1 x_2\right\} = 0,$$
$$x_2 \left\{\alpha_{11} \xi_2 x_1 - (\alpha_{23} + \alpha_{32}) \xi_1 x_3\right\} = 0,$$

d. h. für Gerade durch die Ecken A_1, A_2, A_3 in die Fundamentallinien $A_2\, A_3$, $A_1\, A_2$, $A_1\, A_3$ und je eine Gerade durch die Ecke A_1, A_3, A_2 respective; so dass den Fundamentalpunkten die Reihen der zugehörigen Seiten entsprechen.

Entsprechende Punkte fallen zusammen, wenn man hat

$$x_1 : x_2 : x_3 = -(\alpha_{23} + \alpha_{32})\, x_2\, x_3 : \alpha_{11}\, x_1\, x_2 : \alpha_{11}\, x_1\, x_3$$

oder $$\alpha_{11}\, x_1^2 + (\alpha_{23} + \alpha_{32})\, x_2\, x_3 = 0,$$

d. h. auf dem Polkegelschnitt der Reciprocität, wie aus dem Begriff desselben im Zusammenhalt mit der Construction hervorgeht. In Folge dessen ist der einer Geraden der Ebene entsprechende Kegelschnitt durch die drei Fundamentalpunkte und durch seine zwei Schnittpunkte mit dem Polkegelschnitt respective durch die von ihm in ihr gegebene Involution harmonischer Pole bestimmt.

Man weiss, dass das involutorische Tripel entsprechender Elementenpaare der Reciprocität aus den Berührungspunkten A_2, A_3 des Polkegelschnitts mit dem Polarkegelschnitt und dem Schnittpunkt A_1 ihrer gemeinsamen Tangenten besteht. Ich bemerke den Specialfall, wo Pol- und Polar-Kegelschnitt concentrische Kreise und somit A_2, A_3 die Kreispunkte der Ebene sind, während A_1 der gemeinsame Mittelpunkt der Kreise ist. Dann entspricht jeder geraden Linie der Ebene ein Kreis, welcher durch ihre Schnittpunkte mit dem Polkreis und durch A_1 hindurchgeht und jedem Kreise der Ebene wieder ein Kreis, oder man erhält die Theorie der reciproken Radien. Es lohnt der Mühe, dieselbe von diesem Gesichtspunkte aus zu behandeln.

Wenn man als ursprüngliche Elemente der Polarsysteme und der Reciprocität die Geraden nimmt, so erhält man eine involutorische birationale Transformation der ξ_i, bei welcher im ersten respective im zweiten Falle den Strahlbüscheln Kegelschnitte entsprechen, die dem gemeinsamen respective dem involutorischen Tripel eingeschrieben sind, und dort eine sich selbst entsprechende Gruppe von Geraden, hier ein sich selbst entsprechender Kegelschnitt, der Polarkegelschnitt der Reciprocität, existiert, in beiden Fällen mit analogen Beziehungen zur Construction entsprechender Elemente wie vorher. Im Falle der vereinigten Polarsysteme und in dem der reciproken Gebilde zweiter Stufe sind die erhaltenen birationalen Transformationen involutorisch nach zwei verschiedenen Typen; nämlich im ersten Falle so, dass die Paare entsprechender Elemente mit den Fundamentalelementen involutorische Büschel respective Reihen bilden und nur eine Gruppe sich selbst entsprechender Elemente existirt; im andern Falle so, dass sie mit einem Fundamentalelement perspectivisch liegen und auf seinen Strahlen respective an seinen Punkten involutorische Reihen oder Büschel bestimmen und dass somit zu dem Träger dieses ihnen perspectivischen Gebildes als Centrum oder Axe ein Kegelschnitt als Ort der übrigen sich selbst entsprechenden Punkte respective als Enveloppe der übrigen sich selbst entsprechenden Geraden hinzutritt, respective als Axe oder als Centrum und Pol der involutorischen Verwandtschaft zweiten Grades.

Die Reciprocität der Räume führt bei analoger Untersuchung zwar zunächst auf eine Abbildung des Punktraumes in einen tetraedralen Complex, aber bei näherer Betrachtung auch auf eine birationale Transformation von Punkt zu Punkt. (Vergl. § 168 meines Buches).

Man führt diese Untersuchung zweckmässig in folgender Art. Man zeigt zuerst, dass es vier Paare involutorisch entsprechender Elemente giebt, welche ein Tetraeder bilden, in dem jede Ecke einer durch sie selbst gehenden Fläche entspricht. Unter Festsetzung einer bestimmten Zuordnung wählt man dieses Tetraeder zum Fundamental-Tetraeder projectivischer Coordinaten, um die Substitutionsformeln der Reciprocität zu vereinfachen. Sie werden beispielsweise für die Zuordnung der Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 zu den Flächen A_3, A_4, A_1, A_2 oder $A_4\,A_1\,A_2$, $A_1\,A_2\,A_3$, $A_2\,A_3\,A_4$, $A_3\,A_4\,A_1$

$$\varrho\,\xi_1' = \alpha_{13}\,x_3\,,\ \varrho\,\xi_2' = \alpha_{24}\,x_4\,,\ \varrho\,\xi_3' = \alpha_{13}\,x_1,$$
$$\varrho\,\xi_4' = \alpha_{42}\,x_2\,;\ \varrho\,\xi_1 = \alpha_{31}\,x_3\,,\ \text{etc.}$$

Die Pol- und die Polar-Fläche der Reciprocität durchdringen sich dann in dem windschiefen Vierseit $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$; die Reihen in seinen Seiten entsprechen den Ebenenbüscheln durch dieselben; indess die Reihen in den Kanten $A_1 A_3$, $A_2 A_1$ den Büscheln durch $A_2 A_4$, $A_1 A_3$ und umgekehrt entsprechen.

Dem Punkte y_i entspricht dann als doppeltconjugiert die Gerade p, welche die Schnittlinie der Ebenen

$$\alpha_{13}\,y_3\,x_1 + \alpha_{24}\,y_4\,x_2 + \alpha_{31}\,y_1\,x_3 + \alpha_{42}\,y_2\,x_4 = 0,$$
$$\alpha_{31}\,y_3\,x_1 + \alpha_{42}\,y_4\,x_2 + \alpha_{13}\,y_1\,x_3 + \alpha_{24}\,y_2\,x_4 = 0$$

ist. Man sieht aber aus dem Resultate der Subtraction dieser beiden Gleichungen in der Form

$$(y_3\,x_1 - y_1\,x_3)(\alpha_{13} - \alpha_{31}) + (y_4\,x_2 - y_2\,x_4)(\alpha_{24} - \alpha_{42}) = 0$$

sofort, dass die Gerade p von der Schnittlinie t der Ebenen

$$y_3\,x_1 = y_1\,x_3\,,\quad y_4\,x_2 = y_2\,x_4$$

getroffen wird, d. h. dass p die von Y ausgehende Transversale der beiden einander entsprechenden Tetraederkanten $A_2\,A_4$, $A_1\,A_3$ in einem Punkte Y^* schneidet, dessen Coordinaten aus denen des ursprünglichen Punktes durch die Substitution

$$x_1^* : x_2^* : x_3^* : x_4^* = -x_1\,x_2\,x_4\,(\alpha_{24} + \alpha_{42}) : x_1\,x_2\,x_3\,(\alpha_{13} + \alpha_{31})$$
$$: -x_2\,x_3\,x_4\,(\alpha_{24} + \alpha_{42}) : x_1\,x_3\,x_4\,(\alpha_{13} + \alpha_{31})$$
$$= -\frac{\alpha_{24} + \alpha_{42}}{x_3} : \frac{\alpha_{13} + \alpha_{31}}{x_4} : -\frac{\alpha_{24} + \alpha_{42}}{x_1} : \frac{\alpha_{13} + \alpha_{31}}{x_2}$$

mit der Umkehrung

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = -\frac{\alpha_{24}+\alpha_{42}}{x_3^*} : \frac{\alpha_{13}+\alpha_{31}}{x_4^*} : -\frac{\alpha_{24}+\alpha_{42}}{x_1^*} : \frac{\alpha_{13}+\alpha_{31}}{x_2^*}$$

erhalten werden. Man erhält zur Construction z. B. mit C_{14} als einem durch die Constanten der Reciprocität bestimmten Punkte der Kante $A_1 A_4$ und für P als den gegebenen Punkt sowie P^* als den ihm doppelt conjugierten

$$x_2^* : x_3^* = -\frac{\alpha_{13}+\alpha_{31}}{\alpha_{24}+\alpha_{42}} : \frac{x_4}{x_1} = (A_4 A_1 E_{14} C_{14}) : (A_4 A_1 E_{14} P_{14})$$
$$= (A_4 A_1 P_{14} C_{14}) = (A_2 A_3 E_{23} P_{23}^*).$$

Das Doppelverhältniss der Punkte P, P^* in Bezug auf die Schnittpunkte der Geraden PP^* mit den Kanten $A_1 A_3$, $A_2 A_4$ ist von den Coordinaten von P abhängig, nämlich gleich

$$-\frac{\alpha_{24}+\alpha_{42}}{\alpha_{13}+\alpha_{31}} \cdot \frac{x_2 x_4}{x_1 x_3}$$

Für $x_1 = 0$ oder Punkte in der Ebene $A_2 A_3 A_4$ sind x_1^*, x_2^*, x_4^* gleich Null oder die entsprechenden sind in A_3, für $x_2 = 0$ in A_4, für $x_3 = 0$ in A_1, für $x_4 = 0$ in A_2; etc.

Für zweifach unendlich viele Lagen fällt der Punkt P mit dem ihm entsprechenden Punkte P^* zusammen, nämlich für

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = -\frac{\alpha_{24}+\alpha_{42}}{x_3} : \frac{\alpha_{13}+\alpha_{31}}{x_4} : -\frac{\alpha_{24}+\alpha_{42}}{x_1} : \frac{\alpha_{13}+\alpha_{31}}{x_2}$$

oder für die Punkte der Fläche zweiter Ordnung

$$x_1 x_3 (\alpha_{13}+\alpha_{31}) + x_2 x_4 (\alpha_{24}+\alpha_{42}) = 0,$$

die Polfläche der Reciprocität; nach dem Begriff der Letztern geht dann der dem Punkte doppeltconjugierte Strahl p durch ihn hindurch und der Schnittpunkt mit der Transversale der Kanten $A_1 A_3$, $A_2 A_4$ liegt in ihm selbst.

Den Punkten der Ebene

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

entsprechen die Punkte der Fläche dritter Ordnung

$$-\xi_1\frac{\alpha_{24}+\alpha_{42}}{x_3}+\xi_2\frac{\alpha_{13}+\alpha_{31}}{x_4}-\xi_3\frac{\alpha_{24}+\alpha_{42}}{x_1}+\xi_4\frac{\alpha_{13}+\alpha_{31}}{x_2}=0$$

oder

$$(\alpha_{13}+\alpha_{31})(\xi_2 x_2+\xi_4 x_4)x_1 x_3=(\alpha_{24}+\alpha_{42})(\xi_1 x_1+\xi_3 x_3)x_2 x_4,$$

welche die sechs Kanten des Tetraeders enthält und somit die Ecken desselben zu Doppelpunkten hat, wie es nach dem Vorigen sein muss. Dieselbe geht nach dem vorher Entwickelten auch durch den Kegelschnitt, welchen die gegebene Ebene mit der Polfläche der Reciprocität gemein hat, und enthält daher in derselben Ebene noch eine gerade Linie, offenbar die in ihr gelegene Transversale der Kanten $A_1 A_3$, $A_2 A_4$ — was Alles sich aus ihrer Gleichungsform leicht bestätigt. Wenn die Ebene durch einen der Fundamentalpunkte geht, so zerfällt die Fläche dritter Ordnung in eine Ebene und einen Kegel zweiten Grades, der die drei dieser Ebene nicht angehörigen Tetraederkanten enthält; z. B. für $\xi_1 = 0$ in die Ebene $x_3 = 0$ und in den Kegel

$$(\alpha_{13}+\alpha_{31})(\xi_2 x_2+\xi_4 x_4)x_1=(\alpha_{24}+\alpha_{42})\xi_3 x_2 x_4,$$

der den Querschnitt der Polfläche mit der gegebenen Ebene aus dem Punkte A_3 projiciert.

Betrachtet man eine Gerade als Schnitt ihrer projicierenden Ebenen aus A_1 und A_2 beispielsweise, so entspricht ihr die Raumcurve dritter Ordnung, welche durch die vier Fundamentalpunkte A_1, A_2, A_3, A_4 und durch die zwei Schnittpunkte der gegebenen Geraden mit der Polfläche bestimmt ist, die Durchdringungscurve zweier Kegel zweiten Grades aus A_3 und A_4 durch die je drei anstossenden Kanten neben der ihnen gemeinsamen Geraden $A_3 A_4$. Die Einfachheit dieser Beziehungen lässt von weitern Untersuchungen und von Specialisirungen Nutzen erwarten.

Bei der Untersuchung der zu den Ebenen des Raumes correspondirenden Elemente ergeben sich die dualistisch entsprechenden Resultate; eine birationale involutorische Transformation zwischen den ξ_i und ξ_i^*, bei der die Schnittlinie entsprechender Ebenen immer eine Transversale von $A_1 A_3$, $A_2 A_4$ ist; deren sich selbst entsprechende Ebenen die Polarfläche der Reciprocität umhüllen, bei der den Ebenen eines Bündels die Tangentialebenen einer Fläche dritter Classe entsprechen, welche die Tetraederkanten enthält und daher die Flächen desselben zu singulären Tangentialebenen hat; insbesondere wenn sein Scheitel in einer Fundamentalebene liegt, ein Punkt und ein Kegelschnitt; einem Ebenenbüschel daher die zu zwei Kegelschnitten mit einer gemeinschaftlichen Tangente gemeinsame developpable Fläche dritter Classe.

In beiden Fällen haben wir involutorische Beziehung in der besonderen Form, dass eine Fläche zweiten Grades als Involutionsfläche und zwei in Bezug auf sie einander conjugierte Gerade als Involutionsaxen auftreten. Der Fall der drei Polarsysteme zeigt uns acht Punkte respective Ebenen als Centra und als Ebenen der Involution.

Ziehen wir noch die Reciprocität der Räume in der Form des Nullsystems in Betracht, so entspricht in zwei Nullsystemen jedem Punkte ein durch ihn gehender Strahl, der geraden Reihe eine zu ihr perspectivische Regelschaar; und in drei Nullsystemen ist jeder Punkt des Raumes sich selbst dreifach conjugiert, während ihm zugleich ein Tripel von durch ihn gehenden Strahlen zugeordnet ist. Es ist daraus ersichtlich, dass zwei Polarsysteme und ein Nullsystem oder zwei Nullsysteme und ein Polarsystem gleichfalls auf eine Punktabbildung führen, während die Combination eines Polarsystems und eines Nullsystems die Abbildung des Punktraumes auf einen Strahlencomplex ergiebt — Abbildungen, deren nähere Erläuterung kaum erforderlich ist.

Ich widme den Fällen der Collineation und ihren Combinationen mit denen der Reciprocität noch einige Bemerkungen. In den Gebilden zweiter Stufe haben wir neben der allgemeinen Collineation die centrische involutorische; in jener als einem Punkte doppelt conjugiert die Gerade durch die ihm in beiderlei Sinn entsprechenden Punkte, in dieser den ihm in beiderlei Sinn entsprechenden Punkt. Der erste Fall liefert eine quadratische Transformation von Punkten auf Gerade, wo der geraden Punktreihe die Tangentenschaar eines Kegelschnitts entspricht, der dem Dreiseit der sich selbst entsprechenden Elemente der Collineation eingeschrieben ist. Seine zweifache Wiederholung führt somit zu einer Punktabbildung, bei welcher der geraden Punktreihe die Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten entspricht, die als der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen in den Tangentenschaaren beider ihr correspondirenden Kegelschnitte erhalten wird. (Vergl. § 157 meines angeführten Buches). Man erhält Analoges, wenn man die allgemeine Collineation mit zwei centrisch involutorischen Collineationen combinirt. Verbindet man aber zwei centrisch-involutorische Collineationen oder die allgemeine Collineation mit einem Polarsystem, so entsteht eine Punktabbildung, in der der geraden Punktreihe das Erzeugniss der projectivischen Verbindung zwischen den Tangenten eines Kegelschnitts und den Strahlen eines Büschels d. h. eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt entspricht. (Vergl. a. a. O. § 156). So verbinden sich diese Untersuchungen mit der Lehre von der projectivischen Verbindung der Elementargebilde und der Erzeugnisse oder der Erzeugnisse unter einander. Im Gebilde dritter Stufe sind in gleicher Weise die allgemeine Collineation, die centrisch involutorische, und die geschaart involutorische zu betrachten, von denen die erste für sich allein auf die Abbildung des Punktraumes in den tetraedralen Complex führt (a. a. O. § 167), während die andern in zweifacher Wiederholung oder in Combination mit einander Analoges liefern. Offenbar liefert jeder dieser Fälle in Combination mit einem Polarsysteme oder einem Nullsystem eine Punktabbildung, in der der geraden Reihe eine Curve dritter Ordnung entspricht. Man sieht auch, dass andere Combinationen die Abbildung des Punktraumes in den Ebenenraum geben. So treten alle die Formen der birationalen Transformationen hervor und die einfachen constructiven Zusammenhänge sind vortrefflich geeignet, die speciellen Characterzüge derselben zur Anschauung zu bringen. Ich kehre noch auf einen Moment zur Magnus-Steiner'schen Verwandtschaft zurück, die allein von allen den hier erwähnten aus der Geometrie der Lage entspringenden Transformationen früher Ausbildung gefunden hat. Man weiss wie Steiner sie durch seine windschiefe Projection aus einer Beziehung im Raum von drei Dimensionen zwischen zwei Ebenen hat hervorgehen lassen, und es ist offenbar, dass die birationale involutorische Punktabbildung der allgemeinen Reciprocität der Räume und nicht minder die entsprechende Ebenen-Transformation mit ihren Involutionsaxen an diese Construction erinnern. Wenn man im Anschluss an die Steiner'sche Construction die Abbildung des Gesammtraums mit einem constanten Doppelverhältniss nach Analogie der centrischen Collineation aus Centrum und Axe oder Ebene bei gegebener Characteristik concipiert hat (Vergl. Emil Weyr «Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde» Note D, p. 139 f.), so hat sich hier gezeigt, dass im System der Geometrie der Lage eine birationale involutorische Transformation dritten Grades ähnlich auftritt, bei welcher das Doppelverhältniss eines Paares entsprechender Punkte von den Coordinaten derselben abhängig ist.

Es ist endlich bemerkenswerth, dass die beiden Typen involutorischer Verwandtschaft zweiten Grades, welche im Fall der vereinigten Gebilde zweiter Stufe das System der Geometrie der Lage nothwendig hervorbringt, die beiden einzig möglichen Typen derselben sind.

Wenn man nun erinnert, dass die analytische Ausdrucksweise dem Begriff linearer Gebilde, den die Elemente der Geometrie der Lage als Gebilde aus Elementen fassen und bis zur dritten Stufe entwickeln, ohne Weiteres auf Gebilde aus Curven, Flächen und Complexen und auf beliebige ganze positive nur durch die Zahl der zur Bestimmung von jenen erforderlichen linearen Bedingungen beschränkte Stufenzahl k erweitert; und wenn man bemerkt, dass die algebraische Ausdrucksform der Projectivität (bei welcher jedem Element und jedem Gebilde von bestimmter unter k liegender Stufe des einen ein Element respective ein Gebilde der gleichen Stufe des andern entspricht) die Form der linearen Substitution ist, gleichviel ob in Parametern oder in Coordinaten der gewöhnlichen Art (siehe meine «Darstellende Geometrie» etc. § 152) so sieht man, dass die Uebertragung der Begriffe der Projectivität auf allgemeine Gebilde k^{ter} Stufe algebraisch ohne Schwierigkeit ist und dass dieselbe in gewissem Maasse geometrisch anschaulich wird, sobald man den Begriff eines Raumes von k Dimensionen bildet und so weit nöthig entwickelt. Mit demselben Grade von Anschaulichkeit, lassen sich dann auch die hier gegebenen systematischen Erörterungen auf diese Gebiete übertragen, um einen Zugang zur Theorie ihrer birationalen Transformationen zu bieten.