gegründetes Material das Dunkel, in welches sich die Erscheinung einhüllt, aufzuklären vermag und die allenfalls entzifferbaren Gesetze aufzufinden gestattet.

Geometrie und Geomechanik.

Eine Uebersicht zur Kennzeichnung ihres Zusammenhangs nach seiner gegenwärtigen Entwickelung

von

Wilh. Fiedler.

Im Art. 170 meines Werkes »Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage« (2. Aufl. 1875) habe ich bei der Entwickelung der involutorischen Reciprocität des Nullsystems speciell hervorgehoben, dass dasselbe der rein geometrische Ausdruck der beiden Probleme von der Zusammensetzung der Kräfte im Raum und von der Bewegung eines starren Systems und daher eine Hauptgrundlage der graphischen Statik und der Kinematik sei — natürlich unter gleichzeitiger Anführung der Stellen in den Arbeiten von Möbius und von v. Staudt, welche sich auf den so bezeichneten Zusammenhang beziehen. Ich that dies aus der Einsicht, dass damit ein nicht bloss äusserlicher sondern wesentlicher Zusammenhang bezeichnet sei, und auf Grund der in wiederholten Vorlesungen erprobten Erfahrung, dass die weitere Verfolgung dieser Beziehungen ein Beispiel der Anwendung der Geometrie der Lage von ungemeiner Fruchtbarkeit und Reichhaltigkeit darbietet;

ein Beispiel zudem, welches für die mathematisch-technischen Studien von besonderer Wichtigkeit ist. Wenn ich jetzt an diesem Orte davon handle, so geschieht es, weil ich von einem gewissen Abschluss berichten kann, den der Gegenstand eben jetzt erst erfahren hat und der die Aufmerksamkeit wissenschaftlicher Kreise in hohem Grade verdient — ich meine die Arbeiten des englischen Gelehrten R. St. Ball, des Astronomen von Dublin.

Ich will sie hier ein für allemal nennen. Nach einem vorläufigen Beispiel »On the small oscillations of a rigid body about a fixed point under the action of any forces etc.« in den »Transact. of the R. J. Acad. Vol. XXIV. p. 593« (1870) erschien die grundlegende Abhandlung »The Theory of Screws« ibid. Vol. XXV, p. 137—217 (Nov. 1871), welcher ebenda noch folgte »Screw coordinates and their applications to problems in the Dynamics of a rigid body« Vol XXV, p. 259—327 (Jan. 1874); ausserdem gab der Verfasser »Researches in the Dynamics of a rigid body by the aid of the theory of screws« in »Philosoph. Transactions« Vol. 164. (1874) p. 15—40, sowie »A sketch in the Theory of screws; Problems in the Mechanics of a rigid body which has three degrees of freedom« in »Hermathena: A series of papers of Literature, Science and Philosophy by Members of Trinity College, Dublin« No. II. (1874), p. 506—519; endlich als eine neueste Zusammenfassung der ganzen Lehre einen Band in 8^0 von 13 Bogen unter dem Titel: »The Theory of screws; A Study in the Dynamics of a rigid body.« Dublin 1876 — von welchem er selbst berichtet in Bd. 9 der »Mathem. Annalen« p. 541 — 553.

1. Es kann keinem Beobachter der bezüglichen neueren Literatur entgehen, dass die wissenschaftliche Behandlung der Mechanik seit längerer Zeit eine Wandlung im Sinne eines

grösseren Strebens nach geometrischer Anschaulichkeit überhaupt, sowie besonders auch im Sinne eingehenderer Behandlung ihrer eigentlich geometrischen Partien erfährt; fast jedes neue hervorragende Lehrbuch hat davon neuerdings Zeugniss abgelegt. (Man vergleiche besonders das gehaltreiche Werk »Theorie der Bewegung und der Kräfte« von Dr. W. Schell. Leipzig 1870.) Es ist der Durchbruch derjenigen Neuerungen, welche sich an die hervorragenden Namen Chasles, Poinsot und Möbius knüpfen, zu allgemeiner Geltung. Aber erst in der Verbindung mit der neuen Geometrie der geraden Linie, wie sie seit 1865 von Plücker begründet worden ist, konnte diese Bewegung zu einem gewissen systematischen Abschluss gelangen; man weiss, dass Plücker selbst seiner grossen Abhandlung »On a new Geometry of Space« in den »Philos. Trans.« von 1865, p. 725—791, eine kleinere »Fundamental views regarding Mechanics« (»Philos. Trans.« 1866, p. 361—380) folgen liess; und es ist in der That in der Ausführung dessen, was hier nur dunkel angedeutet ist, und in systematischer Verbindung der dabei schon niedergelegten Ergebnisse, dass gegenwärtig ein Ziel erreicht worden ist, das befriedigend genannt werden darf. Das genannte Buch von R. S. Ball kann wohl mit Ehren für das neue Treatise on Mechanics gelten, welches Plücker in den Schlussworten der letzten Abhandlung in Aussicht nahm.

Ihre Wurzeln hat diese Entwickelung im vorigen Jahrhundert, in den Arbeiten von d'Alembert und L. Euler zum geometrischen Verständniss der Bewegung eines starren Systems von drei Dimensionen, zuerst von 1749 und 1750 für die unendlich kleine Bewegung mit der Entdeckung der momentanen Rotationsaxe, sodann 1780 respective 1775 für die endliche Bewegung eines in einem Punkte festgehaltenen Systems, die als einer Drehung um eine diesen Punkt enthaltende Axe äquivalent erkannt wird; oder in einer Abhandlung von Giulio Mozzi von 1763 »Discorso matematico sopra il rotamento momentanei dei corpi«. Denn hier zuerst wurde über das Momentancentrum in einem ebenen starren System hinaus, welches Descartes schon benutzt und Joh. Bernoulli (1742) allgemein nachgewiesen hatte, die Betrachtung auf den Raum von drei Dimensionen erweitert. In Wiederaufnahme dieser Arbeiten hat dann Chasles zuerst 1830 im »Bulletin des sciences mathém.« (t. XIV, p. 322) die Schraubenbewegung als die canonische Form der Bewegung eines starren Systems nachgewiesen und ist in weiterer genauer geometrischer Ausführung darauf zurückgekommen im »Aperçu historique« (deutsche Ausg. p. 454), namentlich aber in den »Comptes rendus« von 1843 (t. 16, p. 1420) und in denen von 1860, 1861 (t. 51, p. 855 etc. und t. 52, p. 77 etc.) — Veröffentlichungen, die bis in die neueste Zeit eine ganze Reihe von beweisenden Commentaren von de Jonquières, Laguerre, Mannheim, Brisse etc. hervorgerufen haben; deren einfachste Zusammenfassung in einer Hinsicht aber das Nullsystem oder der lineare Complex und in anderer die Collineation der Räume in einer gewissen speciellen Form ist. Das erstere nämlich hinsichtlich der Ueberführung des starren Systems aus einer ersten Lage in die zweite: Sie kann auf unendlich viele Arten durch successive Drehungen um je zwei zusammengehörige geradlinige Axen geschehen; solche conjugirte Rotationsaxen sind entsprechende Gerade in der involutorischen Reciprocität des Nullsystems; die sich selbst entsprechenden Geraden, zu denen sämmtliche Transversalen solcher conjugirten Paare gehören, bilden den entsprechenden linearen

Complex, in dem durch jeden Punkt unzählig viele Strahlen in einer Ebene und in jeder Ebene unzählig viele Strahlen durch einen Punkt gehen (Nullebene des Punktes und Nullpunkt der Ebene); den Geraden einer gewissen Richtung entsprechen unendlich ferne Gerade, den Combinationen von Rotation und Translation zugehörig, welche die Ueberführung aus der einen in die andere Lage vollziehen; einer unter jenen Geraden, der Centralaxe der Bewegung, der Axe des Nullsystems oder des Complexes, entspricht endlich die Stellung ihrer Normalebenen, d. h. man hat eine Rotation um dieselbe zu combiniren mit einer Verschiebung, bei welcher sie in sich selbst fortrückt, der Schraubenbewegung entsprechend, durch die das System aus der alten in die neue Lage gelangen kann, der canonischen Form der Bewegung. Beide Betrachtungsweisen, als Nullsystem und als linearer Complex, führen gleich einfach zu der Erkenntniss der metrischen Abhängigkeiten der Nullpunkte der Ebenen und der Nullebenen der verschiedenen Punkte des Raumes sowie der Paare conjugirter Geraden von der Centralaxe; sowie sie die Bedeutung derselben im Sinne der Bewegungsvorgänge zeigen: Der Nullebene des Punktes als der Normalebene seiner Trajectorie, der sich selbst conjugirten oder der Complexgeraden als derjenigen Geraden des Raumes, deren Punkte sich in Normalen zu ihnen selbst fortbewegen. Der Parameter des linearen Complexes, die einzige Constante der auf seine Axe bezogenen Gleichung desselben (siehe meine »Darstell. Geom.« Art. 170), wird weiterhin in doppelter mechanischer Bedeutung hervortreten.

Das andere sodann hinsichtlich der beiden Lagen des starren Systems an sich und in ihrem rein geometrischen Zusammenhange: Collineare Räume in der besondern Form der Congruenz; das Tetraeder der sich selbst entsprechenden vier Punkte und Ebenen in der Weise degenerirt, dass von seinen sechs Kanten eine einzige als Centralaxe reell und im Endlichen ist, die Trägerin von zwei gleichen Reihen und Ebenenbüscheln von gleichem Sinn, deren sich selbst entsprechende Punkte daher in ihrem unendlich fernen Punkte vereinigt liegen, während ihre sich selbst entsprechenden Ebenen imaginär und Berührungsebenen des unendlich fernen imaginären Kugelkreises sind; welcher Letztere sich selbst entspricht, weil eine Kugelfläche vor der Bewegung auch nach derselben eine Kugelfläche ist, während seine Punkte in projectivisch sich entsprechende Paare geordnet zu denken sind, so dass zwei unter ihnen sich selbst entsprechen, deren Tangenten sich im unendlich fernen Punkt der Centralaxe schneiden und daher doppelt zählende Kanten jenes Tetraeders repräsentiren, während ihre Verbindungslinie die sechste Kante wird, somit die unendlich ferne Ebene das einzig relle Ebenpaar desselben gibt. Die Verbindungslinien entsprechender Punktepaare und die Schnittlinien entsprechender Ebenenpaare bilden einen und denselben tetraedralen Complex. Aus drei Punktepaaren $A\,A'$, $B\,B'$ und $C\,C'$ der beiden Räume mit den Sehnenmitten M_a, M_b, M_c und deren Verbindungslinien $M_b\,M_c$ oder m_a, respective m_b, m_c, sowie mit den in M_a, M_b, M_c auf $A\,A'$, $B\,B'$, $C\,C'$ respective errichteten Normalebenen N_a, N_b, N_c und deren Schnittlinien $N_b\,N_c$ oder n_a, respective n_b, n_c erhält man die Centralaxe durch drei ihrer Normalen, nämlich die gemeinsamen Normalen der Paare m_a, n_a; m_b, n_b; m_c, n_c; — eine Construction, die auch noch im Falle unendlich kleiner Bewegung, oder wenn nur die Bewegungsrichtungen von A, B, C bekannt sind, anwendbar bleibt. Oder man bildet mit einem Punkt O als gemeinsamer Ecke die Parallelogramme $O\,A\,A'\,A^*$, $O\,B\,B'\,B^*$, $O\,C\,C'\,C^*$, projicirt die Dreiecke $A\,B\,C$, $A'\,B'\,C'$ orthogonal auf die Ebene $A^*\,B^*\,C^*$ und errichtet im Centralpunkt dieser Projectionen, d. h. im Schnittpunkt der senkrechten Halbirungslinien der drei Sehnen zwischen ihren entsprechenden Ecken, auf ihr die Normale.

2. Sprechen wir weiterhin von solchen unendlich kleinen Bewegungen des starren Systems, so kann eine solche als Schraubenbewegung oder Windung definirt werden und ist bestimmt durch ihre Axe, eine gewisse Gerade des Raumes; durch einen derselben associirten linearen Parameter p, der diejenige Grösse der Verschiebung in ihr angibt, welche die Drehung um die Winkeleinheit im Bogenmaass begleitet, und den man den Pfeil der Windung oder Schraube nennen kann, und durch den Rotationswinkel α' oder die Amplitude, welche eben unendlich klein gedacht werden mag. Man sieht, die Bewegung des starren Systems erfordert zu ihrer Bestimmung sechs algebraische Grössen, wovon vier die Lage der Axe angeben, indess die fünfte die Schraube und die sechste die Windung oder Schraubenbewegung definirt; die fünfte dieser Grössen, der Pfeil, ist Null bei reiner Rotation und unendlich gross bei reiner Verschiebung. Zu denselben Ergebnissen hinsichtlich der zur Bestimmung eines starren Systems erforderlichen Bedingungen führen natürlich auch andere Betrachtungen; so war z. B. von rein geometrischer Seite her Mannheim bei seinen Studien zu dieser Theorie dazu geführt worden, auszusprechen, dass sechs Bedingungen wie das Liegen eines Punktes in einer gegebenen Fläche ein starres System fixiren, während fünf solche Bedingungen eine bestimmte Bewegung ge-

statten, bei welcher jeder Punkt im Allgemeinen eine Trajectorie oder ein Curvenelement beschreibt; dass vier solche Bedingungen einfach unendlich viele Bewegungen zulassen, bei welchen einem Punkt im Allgemeinen eine Trajectorienfläche als Ort des Büschels der möglichen Trajectorien entspricht; während endlich bei drei solchen Bedingungen eine zweifach unendliche Menge von Bewegungen möglich bleibt, so dass dem Punkte im Allgemeinen ein Trajectorienbündel zukommt. Und in seiner im »Recueil des Mém. des savants étrangers« t. XX. und im »Journal de l'école polyt.« Cah. 43 (1868, 1870) veröffentlichten »Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable« gelangte Mannheim zu zwei wichtigen Sätzen; nämlich 1) dass im Falle der einfach unendlich unbestimmten Bewegung zwei gerade Linien existiren, deren Punkten nicht Trajektorienflächen sondern nur Trajectorien zukommen, nämlich den Punkten der einen reine Rotationen um die jedesmalige andere; Gerade, welche daher von den Normalen der Trajectorienflächen aller Punkte des Systems geschnitten werden (bereits 1866 im t. XI. des »Journal de Mathém.« angezeigt) und somit durch die Normalen der Trajectorienflächen von vier gegebenen Punkten als ihre gemeinsamen Transversalen bestimmt sind — analog wie bei der Bewegung in der Ebene die Normalen der Trajectorien aller Punkte durch das Momentancentrum gehen oder die Normalebenen der Trajectorien der Punkte einer Ebene bei der bestimmten Bewegung im Raum durch den Nullpunkt derselben. Und 2) dass im Falle der zweifach unendlich unbestimmten Bewegung ein einfaches Hyperboloid als Ort derjenigen Punkte existirt, welche bei allen Bewegungen des Systems nur in den Strahlen eines Büschels statt in denen eines Bündels fortschreiten können.

Dieselben Ergebnisse sind als specielle Fälle allgemeinerer Sätze in denjenigen Untersuchungen von Ball wiedergefunden worden, welche sich auf Bewegungen beziehen, die nach der zweiten respective dritten Stufe frei sind; und das Hyperboloid des zweiten Satzes insbesondere war schon vor Mannheim in den Untersuchungen Plücker's über die dreigliedrige Gruppe von linearen Complexen characteristisch hervorgetreten.

Geometrischerseits hat Mannheim von dem ersten derselben einen vortrefflichen Gebrauch gemacht in dem «Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces» im «Journal de Mathém». t. XVII (1872); er gibt in grosser Vollständigkeit die geometrische Theorie des unendlich dünnen Strahlenbündels, d. h. der Strahlencongruenz, welche eine Gerade bei der einfach unendlich unbestimmten Bewegung hervorbringt, wesentlich mit Benutzung eines Hilfsmittels zur graphischen Behandlung des windschiefen Flächenelements, welches ich als eine einfache Anwendung der Lehre von den Ebenen **H'** («D. Geom.» Art. 46, 3. 4; Art. 49, 5) in der Theorie der Regelflächen zu entwickeln pflege und das daher a. a. O. (p. 753 in einer Note zu p. 415, 6) angegeben ist; Mannheim erhält dann aus der Voraussetzung, dass die Strahlen der Congruenz Normalen derselben krummen Fläche sind, die nothwendige Realität jener beiden Geraden (Satz von Sturm) und die Krümmungstheorie der Oberflächen. (Siehe auch die geistreiche kleine Arbeit desselben: «Sur la surface gauche, lieu des normales principales de deux courbes» im «Journal de Mathém». t. XVII, p. 406 und die Noten im t. 74 der «Comptes rendus» p. 372, p. 856, 928 zum

Theorem von Meusnier und zur Berührung dritter Ordnung zwischen zwei Flächen.) Derselbe treffliche Geometer hat aber auch die Trajectorien der einzelnen Punkte der Geraden bei der bestimmten Bewegung derselben («Comptes rendus» März 1873) und die Trajectorienflächen der Punkte eines starren Systems bei der einfach unendlich unbestimmten Bewegung unter vier Bedingungen («Recueil des savants étrangers» t. XXII) untersucht und interessante Ergebnisse angezeigt, deren Ableitung und hier und da Vervollständigung leicht ist. Sie bilden die Erweiterung der Sätze über die Bewegung der Geraden in der Ebene, wonach die Tangenten der Trajectorien ihrer Punkte eine Parabel umhüllen, während ihre Krümmungscentra einen Kegelschnitt bilden, so dass die Schnittpunkte des Letzteren mit der Geraden Punkte von Trajectorien mit dem Krümmungskreis Null oder ruhende Punkte wären, wie sie nur in den imaginären Geraden vom Momentancentrum der Ebene nach ihren imaginären Kreispunkten liegen können; es mag dabei angeführt werden, dass der Satz über die Vertheilung der Krümmungscentra in einem Kegelschnitt als von Rivals herrührend durch Bresse in Cah. 35 des «Journal de l'école polyt.» in weitläufiger analytischer Form publicirt ist, dass er aber sehr einfach und völlig direct geometrisch bewiesen werden kann. Im Raum bilden die Tangenten der Trajectorien der Punkte einer Geraden ein hyperbolisches Paraboloid, dessen eine Richtungsebene zu ihrer conjugierten Geraden normal ist; die Schmiegungsebenen derselben bilden somit die Developpable einer cubischen Parabel, die Krümmungsaxen ein Hyperboloid und die Krümmungscentra eine Raumcurve fünfter Ordnung, die Schmiegungskugelmittelpunkte eine Raumcurve dritter Ordnung, etc. Und diejenigen Punkte des Raumes, welche in ihren Trajectorien Inflexionspunkte bilden, liegen in einer imaginären Fläche vierter Ordnung, deren reelle Doppelcurve die Parabel ist, in welcher nach Resal (»Journal de l'école polyt.» cah. 37, p. 244) die Punkte von der Normalacceleration Null enthalten sind; die andern Punkte, denen stationäre Schmiegungsebenen der Trajectorien entsprechen, oder die Punkte mit verschwindender suracceleration binormale nach der Terminologie der französischen Kinematik, bilden eine Fläche dritter Ordnung, so dass im Allgemeinen drei Gerade existieren, deren sämmtliche Punkte diese Eigenschaft besitzen und sodass dieselbe immer dann, wenn vier Punkte einer Geraden sie haben, allen Punkten dieser Geraden zukommt, etc. Dagegen bilden die Normalen der Trajectorienflächen der Punkte einer Geraden ein Hyperboloid und da dasselbe im Allgemeinen zwei zur Geraden rechtwinklige Erzeugende besitzt, so haben zwei Punkte der Geraden Trajectorienflächen, welche dieselbe berühren, etc. Ausser Paraboloiden und Hyperboloiden treten hier Raumcurven dritter bis sechster Ordnung, Regelflächen vierten und sechsten Grades, krumme Flächen dritter bis achter Ordnung hervor, als reiches Material zu eingehenden geometrischen Untersuchungen in kinematischer Richtung. Z. B. in folgender Weise: Diejenigen Punkte des Raumes, welche bei einer der durch die vier Bedingungen zulässigen Bewegungen Trajectorien beschreiben, welche eine Haupttangente der zugehörigen Trajectorienfläche berühren, liegen auf einer Fläche dritter Ordnung, welche den imaginären Kugelkreis und die beiden Geraden der reinen Rotationen enthält; es giebt also mindestens eine reelle Gerade im Raum, deren sämmtliche Punkte sich nach Elementen der Haupttangenten ihrer Trajectorienflächen bewegen. Analog werden die nach parabolischen, nach geodätischen und nach Krümmungslinien sich bewegenden Punkte des Raumes untersucht, sowie die von besondern Krümmungsverhältnissen der respectiven Trajectorienflächen.

Wenn die Beweglichkeit eines Punktes nach allen Richtungen eine nach dritter Stufe freie ist, in einer Fläche und einer Curve respective noch in zweiter und erster Stufe frei, so dass die vorigen Erörterungen diese Anschauungsform erschöpfen, so hat, wie schon bemerkt, das starre System oder der feste Körper als höchste eine Bewegungsfreiheit nach sechster Stufe; es prägt sich diess in der bekannten Zerlegung der allgemeinen Bewegung in drei gleichzeitige Verschiebungen nach und drei gleichzeitige Rotationen um drei zu einander normale Axen ebenso aus wie in dem Möbius'schen Satze, dass ein Körper, welcher um sechs von einander unabhängige Axen rotiren kann, jede beliebige Bewegung erhalten könne («Ueber die Zusammensetzng unendlich kleiner Drehungen» in «Crelle's Journal» Bd. 18, p. 189. 1838); es ist Freiheit zu sechsfach unendlich vielen Windungen oder zu Windungen nach einem Schraubensystem von sechs Dimensionen — im ersten Falle der elementaren Zerlegung haben drei der componierenden Windungen den Pfeil Null und die drei andern den Pfeil unendlich. Und man sieht leicht, dass durch Beschränkung eines Punktes oder mehrerer Punkte auf eine bezügliche Fläche oder Curve die Freiheit der Bewegung, doch immer nur in speciellen Formen, auf jede der unter der sechsten liegenden Stufen eingeschränkt werden kann, z. B. auf die erste Stufe in der besondern Form der Rotation durch Fixierung von zwei Punkten, oder durch die Vorschrift, dass fünf Punkte sich in festen Flächen bewegen, etc.; auf die dritte ebenso speciell durch die Fixierung eines Punktes wie durch die Beschränkung von drei Punkten auf respective bestimmte Flächen, etc. Aber es verdient besondere Hervorhebung, dass Freiheit der Bewegung nach fünfter Stufe oder nach einem Schraubensystem von fünf Dimensionen in allgemeinster Form durch die Benutzung des bekannten einfachen Mechanismus erreicht werden kann, den man das Universalgelenk oder den Hookeschen Schlüssel nennt. Man denke an der einen Welle eines Universalgelenks eine Schraube angeschnitten und durch die Mutter mit derselben ein starres System verknüpft; die andere Welle desselben aber sei durch ein zweites Universalgelenk mit einer festen Axe verbunden — dann hat jenes starre System Freiheit der Bewegung von fünf Stufen in voller Allgemeinheit.

3. Aber es ist an der Zeit, von den Kräften als den Ursachen der Bewegung zu sprechen und zu erinnern, dass Poinsot in seiner Abhandlung von 1804 «Sur la composition des Momens et la composition des Aires», welche man in t. VI (Cah. 13) des «Journal de l'école polyt.» (1806) findet, den Nachweis geliefert hat, dass jedes Kräftesystem im Raum von drei Dimensionen in einziger Art auf eine canonische Form reduciert werden kann, nämlich auf eine Einzelkraft und auf ein in einer Normalebene zu derselben wirkendes Kräftepaar; sowie dass diese Centralaxe des Kräftesystems ausgezeichnet ist durch den Umstand, dass das zugehörige resultierende Paar das kleinste unter allen ihm zukommenden Axenmomenten hat (p. 193 a. a. O.). Auch dass Möbius in dem inhaltreichen VI. Kap. des ersten Bandes seines «Lehrbuch der Statik» (1837) und im 10. Band von «Crelle's Journal» dieselbe Theorie behandelt und die geometrische

Reciprocität eingehend untersucht hat, welche durch dieselbe gegeben wird — eben das Nullsystem der früheren Betrachtungen; und endlich, dass Cremona die Lehren vom Kräftepolygon und vom Seilpolygon in der graphischen Statik auf die Orthogonalprojection reciproker Figuren im Nullsystem nach der Richtung der Axe desselben oder der Centralaxe gegründet hat.

Die Bemerkung, dass die canonische Form des Kräftesystems mit der canonischen Form der Bewegung starrer Körper vollständig übereinstimmt; nicht nur in sich selbst, insofern Einzelkraft und Translation und Kräftepaar und Rotation einander entsprechen und insofern dieselbe Zahl von Bestimmungsgrössen für jene, wir wollen sagen den Winder, wie für diese (die Windung) erfordert werden, nämlich vier zur Bestimmung der Wirkungslinie der Einzelkraft, ein linearer Parameter p, der Pfeil, der den Quotienten aus dem Momente des Paares durch die Einzelkraft ausdrückt (er bestimmt mit jenen zusammen eine Schraube wie früher) und die Intensität α'' der Kraft; sondern auch hinsichtlich der geometrischen Relationen, in denen sie — die canonischen Formen des Kräftesystems und der Bewegung — zu den Ergebnissen anderer Zerlegungen, den Paaren windschiefer Einzelkräfte und den Axen conjugierter Rotationen etc., stehen — welches Alles für beide in gleicher Weise durch das Nullsystem oder den linearen Complex ausgedrückt wird — diese Identität eröffnet augenscheinlich die Aussicht auf eine dem entsprechende Behandlungsform nicht bloss der Kinematik und der Statik, sondern auch der Dynamik starrer Systeme.

Eine solche ist von Battaglini in einer Reihe von Abhandlungen zur Bewegung starrer Systeme, zur Zusammensetzung der Kräfte, über Momente und Trägheitsmomente, über Dynamen in Involution (1869—71) (vergl. «Giornale di Matematiche» Vol. X u. XI p. 133, 175, 181, 207, 295; 62, 359 oder Jahrg. 1872, 1873) mit den Hilfsmitteln der tetraedralen Coordinaten und der Liniengeometrie unternommen worden. Zu einer solchen Behandlung auf Grund derselben Methoden haben ferner namentlich die linien-geometrischen Abhandlungen von F. Klein in den «Math. Annalen» Bd. II, p. 198 und p. 366 (1869) und Bd. IV, p. 403 (1871) wichtige Beiträge geliefert. Anderseits ist durch Everett die Methode der Quaternions auf diese Untersuchungen angewendet worden («Messenger of Mathematics». New Series. Nro. 39, 45, 53; 1874—1875.) in nächster Verwandtschaft der Grundideen wie der Ergebnisse zu den Arbeiten von Ball und in genauem Anschluss an diese, von denen ich noch näher berichte; wie diess auch Clifford «On Biquaternions» in Aussicht nahm, worauf ich bereits in den Citaten der letzten Aufl. der «Analyt, Geom. des Raumes» nach G. Salmon Bd. II, p. 682 aufmerksam gemacht habe. Und Lindemann hat («Mathem. Annalen» Bd. VII, p. 56) die unendlich kleinen Bewegungen starrer Körper bei allgemeiner projectivischer Maassbestimmung untersucht und die bezüglichen Modificationen der Gesetze von Chasles und Möbius, sowie Erweiterungen der Theorie entwickelt, welche wieder von Ball unter Beschränkung auf die gewöhnliche Maassbestimmung selbständig entdeckt worden waren. Die Erweiterung auf die allgemeine Maassbestimmung soll aber ebenso wie die auf Mannichfaltigkeiten von n Dimensionen im Folgenden bei Seite gelassen werden, um von der eigentlichen Mechanik nicht zu entfernen.

4. Für diese wird vorausgesetzt, dass das starre System während der Untersuchung seiner Anfangslage un-

endlich nahe bleibt, und dass auf dasselbe nur Kräfte wirken, welche bei der nämlichen Lage die nämliche Grösse haben, sowie dass in demselben eine stetige Schöpfung von Arbeit oder Energie nicht möglich ist; das erste schliesst Kräfte wie die eines widerstehenden Mittels und der Reibung von der Betrachtung aus; das zweite beschränkt die Untersuchung auf Kräfte, welche in der Natur existieren. Das Letztere harmoniert nach heutiger Kenntniss mit der Voraussetzung der gewöhnlichen Maassbestimmung. Beides macht das betrachtete System zu einem dynamisch conservativen nach jetzigem Sprachgebrauch.

Die Zusammensetzung von Bewegungen, also von Windungen, und von Kräftesystemen, also von Windern, zu resultirenden Windungen und Windern ist natürlich das erste der zu untersuchenden Probleme, und das erste Hauptergebniss ist die Uebereinstimmung der Regeln der Zusammensetzung für beide Fälle. Es fliesst aus der Bestimmung der Arbeitsgrösse, welche in der Bewegung des Systems oder in einer bestimmten Windung gegen ein gegebenes Kräftesystem oder einen Winder verrichtet wird, einer Arbeit, die aus der Summe der Arbeiten der componierenden Kräfte in den componierenden Bewegungen besteht und deren Ausdruck das Product einer gewissen symetrischen Function der geometrischen Bestimmungsgrössen der beiden Schrauben (des virtuellen Coefficienten ω_{12}) in die Intensität α'' des Winders und die Amplitude α' der Windung ist:

$$\alpha_1' \, \alpha_2'' \, \omega_{12} \text{ oder } \alpha_1' \, \alpha_2'' \, [(p_1 + p_2) \cos \lambda - d \sin \lambda]$$

für d als die kürzeste Entfernung der beiden Schraubenaxen von einander, λ als den Richtungsunterschied derselben und p_1, p_2 als die bezüglichen Pfeile. Diese Arbeit ist also Null, d. h. das der Windung um die Schraube 1 allein fähige System bleibt unter der Einwirkung eines Winders nach der Schraube 2 in Ruhe, oder die betrachteten Schrauben sind reciprok, wenn ω_{12} verschwindet, d. h. für

$$p_1 + p_2 = d \tan \lambda,$$

und insbesondere wenn $d = 0$ oder wenn $\lambda = 0$ für $p_1 + p_2 = 0$, und wenn $\lambda = 90°$ für $d = 0$; auch sind zwei Schrauben vom Pfeil Unendlich reciprok, weil ein Kräftepaar einen Körper nicht bewegen kann, der nur verschiebbar ist; und Schrauben vom Pfeil Unendlich und vom Pfeil Null sind auch sich selbst reciprok, jenes nach dem vorigen, dieses weil für die Identität beider Schrauben die Arbeit gleich $2\, p\, \alpha_1'\, \alpha_2''$ ist. Die allgemeine Bedingung der Reciprocität ist eine Relation der Lage der beiden Schrauben oder der linearen Complexe, welche sie repräsentiren — nach F. Klein («Mathem. Annalen» Bd. 2, p. 366. Der virtuelle Coefficient ist die simultane Invariante der beiden linearen Complexe dieses Aufsatzes) als Involution bezeichnet, und geometrisch durch die Eigenschaft ausgedrückt, dass die Paare der Nullpunkte der Ebenen eines Büschels, welches einen gemeinsamen Strahl der Complexe zur Scheitelkante hat, eine Involution in diesem Strahl bilden, welche seine Schnittpunkte mit den Directrixen der Congruenz sämmtlicher gemeinsamer Strahlen zu Doppelpunkten hat; eine Relation, so dass gemäss der Zahl von fünf Bedingungen, welche eine Schraube bestimmen, zu fünf gegebenen Schrauben eine bestimmte Zahl — in der That eine einzige Schraube —, zu vier gegebenen Schrauben ein einfach unendliches System, d. h. eine Regelfläche, zu drei eine Congruenz von reciproken Schrauben existirt, zu zwei ein Complex — und zu einer Schraube ein vierfach unendliches System oder mit andern Worten von vier Dimensionen, nämlich in jeder Geraden des Raumes eine ihr reciproke, deren Pfeil durch das Verschwinden des virtuellen Coefficienten bestimmt wird — man findet, dass die reciproken Schrauben von gegebenem Pfeil durch einen Punkt respective in einer Ebene ein Büschel bilden, für den Pfeil Null die Nullebene respective den Nullpunkt der Möbius'schen Theorie.

Es ist klar, dass bei jedem Grade der Freiheit die Rückwirkung der Bedingungen oder Widerstände, durch welche die Beweglichkeit des Systems beschränkt ist, einen Winder nach einer dem System reciproken Schraube hervorbringen oder repräsentiren wird; und ausserdem dass die Bedingung des Gleichgewichts einfach darin besteht, dass die einwirkenden Kräfte einen Winder nach einer solchen Schraube constituiren.

Da nun für die Windungen um Schrauben 1, 2, 3 mit Amplituden α'_1, α'_2, α'_3, welche einander neutralisiren, oder von denen jede der Resultante der beiden andern entgegengesetzt gleich ist, die Summe ihrer Arbeiten gegen einen beliebigen Winder — ich will sagen nach der Schraube i und mit der Intensität α''_i — Null sein muss, so hat man als die Bedingung für jene Neutralisation identisch für alle i die Gleichung:

$$\alpha'_1\,\omega_{1i} + \alpha'_2\,\omega_{2i} + \alpha'_3\,\omega_{3i} = 0\,;$$

und ebenso für drei Winder, welche sich das Gleichgewicht halten, identisch für alle i

$$\alpha''_1\,\omega_{i1} + \alpha''_2\,\omega_{i2} + \alpha''_3\,\omega_{i3} = 0.$$

Mit drei bestimmten Schrauben i eliminirt man im ersten Falle die Amplituden, im zweiten die Intensitäten und erhält in beiden Fällen dieselbe Relation der geometrischen Bestimmungen der Schrauben 1, 2, 3 zum Beweis, dass für die Zusammensetzung der Windungen und der Winder die gleichen Gesetze gelten. Das Problem der Zusammensetzung von zwei Windungen respective zwei Windern selbst wird aber durch eine windschiefe Regelfläche dritten Grades gelöst, welche sich bei Plücker zuerst («Philos. Transact.» Vol. 155 p. 756, Formel [88] 1865 und «Neue Geometrie des Raumes» p. 97, Formel [143]) findet und die von Cayley als Cylindroid bezeichnet worden ist. Wenn nämlich um zwei zu einander rechtwinklige sich schneidende Schrauben 1, 2 in x, y respective mit den Pfeilen p_1, p_2 Windungen von den Amplituden $\Theta' \cos \lambda$ und $\Theta' \sin \lambda$ ausgeführt werden, so erhalten wir eine resultirende Rotationsaxe Θ mit der Amplitude Θ' im Abstand z von der Ebene $x\,y$ gleich

$$\sin \lambda \cos \lambda \, (p_1 - p_2) \text{ und mit } y = x \tan \lambda,$$

und die ihr gleichgerichtete Componente der Verschiebung $\Theta' (p_1 \cos^2 \lambda + p_2 \sin^2 \lambda)$. Die resultirende Windung hat die durch λ bestimmte Richtung, dazu den Pfeil

$$p = p_1 \cos^2 \lambda + p_2 \sin^2 \lambda,$$

proportional also dem inversen Quadrat des gleichgerichteten Halbmessers in einem Kegelschnitte $p_1 x^2 + p_2 y^2 = \varrho$; und ihre Axe liegt auf der cubischen Conoidfläche

$$z (x^2 + y^2) = (p_1 - p_2) \, x \, y,$$

welche die Axen y und x einfach, z aber doppelt enthält und von den Halbirungsebenen («Darstell. Geom.» Art. 46, 3; 49, 5.) $y = \pm z$ in congruenten Ellipsen vom Axenverhältniss $\sqrt{2}$ geschnitten wird, deren Projectionen in $x\,y$ die in O sich berührenden gleichen Kreise aus den Punkten $\pm \frac{1}{2} (p_1 - p_2)$ der x Axe

$$[x \mp \tfrac{1}{2} (p_1 - p_2)]^2 + y^2 = \tfrac{1}{4} (p_1 - p_2)^2$$

sind, welche mit ihren Projectionen in $x\,z$ respective symmetrisch und in Deckung congruent gelegen sind. Die $x\,y$

Projectionen der Erzeugenden bilden daher ein Strahlbüschel aus O, in welchem diejenigen von gleicher $x\,z$ Projection den Paaren einer Involution entsprechen, die in der Richtung von x ihren Pol hat, deren Doppelstrahlen also in den 45^0 Linien liegen (vergl. «Darstell. Geom.» Art. 114), singuläre Erzeugenden der Fläche angehörend, welche in der Richtung der z den grössten Abstand $(p_1 - p_2)$ von einander haben.

Wenn ich erwähne, dass Plücker die Fläche a. a. O. erhielt als den Ort der Axen aller linearen Complexe eines einfach unendlichen linearen Gebildes (erster Stufe also) oder eines Complexbüschels, so sieht man im Zusammenhalt mit dem Früheren, dass dies dem gefundenen Auftreten in der Zusammensetzung der Windungen und Winder ganz genau entspricht; man schliesst, dass zwei Schrauben das Cylindroid bestimmen, was sich in der That leicht bestätigt, und man erkennt, dass die Resultante zweier Windungen oder Winder nach denselben ihm angehören und durch ihre Richtung allein bestimmt werden muss. In der That für i, k, l als drei Schrauben desselben Cylindroids von den Richtungswinkeln λ_i, λ_k, λ_l, um welche Windungen mit den Amplituden α_i', α_k', α_l' sich neutralisiren, müssen sowohl die resultirenden Rotationswinkel als die Verschiebungsgrössen Null sein, d. h. aus beiden Ursachen die Gleichungen

$$\alpha' \cos\lambda_i + \alpha_k' \cos\lambda_k + \alpha_l' \cos\lambda_l = 0,\ \alpha_i' \sin\lambda_i + \alpha_k' \sin\lambda_k + \alpha_l' \sin\lambda_l = 0$$

bestehen oder man hat

$$\alpha_i' : \alpha_k' : \alpha_l' = \sin(\lambda_k - \lambda_l) : \sin(\lambda_l - \lambda_i) : \sin(\lambda_i - \lambda_k);$$

d. h. die Regel der Zusammmensetzung von Windungen und Windern mit Hilfe des Cylindroids, welche dem Parallelogramm der Kräfte und Geschwindigkeiten etc. der Elementarmechanik entspricht und wirklich das Alles als specielle Fälle in sich fasst. Sie liefert die Axe und die Amplitude und der oben erwähnte Kegelschnitt gibt den entsprechenden Pfeil. Wenn der Kegelschnitt eine Hyperbel ist, so sind die zwei ihren Asymptoten parallelen unter den Schrauben des Systems vom Pfeil Null, d. h. ihren Axen entsprechen reine Rotationen als Windungen — wie Mannheim gefunden hatte — oder Einzelkräfte als Winder. Im Allgemeinen gehört zu jedem Punkte P eine Trajectorienebene, die Normalebene zur Schnittlinie der beiden Ebenen, welche P mit den Schrauben vom Pfeil Null bestimmt. Offenbar bleiben die Gesetze vom geschlossenen Polygon der sich equilibrirenden Winder und der sich neutralisirenden Windungen fortbestehen. So erweist sich, dass der Winder und die Windung dem Punktesystem ebenso entsprechen wie die Einzelkraft und die Trajectorie dem einzelnen Punkte.

5. Das Cylindroid löst aber auch die Fragen über die Reciprocität, wie dieselbe oben definirt worden ist. Dazu bemerkt man zunächst, dass eine Schraube, die zu zwei andern Schrauben reciprok ist, reciprok sein muss zu allen Schrauben des Cylindroids, welches jene beiden mit einander bestimmen, weil ja jede Schraube desselben als Resultante aus Componenten in diesen dargestellt werden kann. Da nun eine beliebige Gerade im Raum das Cylindroid in drei Punkten schneidet und in jedem derselben einer Schraube des Schrauben-Gebildes zweiter Stufe begegnet, welches diese Fläche darstellt, so muss, falls sie die Axe einer dem Cylindroid reciproken Schraube sein soll, für diese drei die eine oder die andere besondere Form der Relation der Reciprocitätsbedingung für $d = 0$ erfüllt sein; also die Rechtwinkligkeit für die eine und das Verschwinden der Pfeilsumme für die beiden andern, wie es allein möglich ist, weil einerseits die gemeinschaftliche Normale von zwei Schrauben

des Cylindroids nur die Doppelgerade desselben sein kann, und anderseits nach der Axen-Symmetrie der Kegelschnitte derselbe Pfeil $p_1 \cos^2 \lambda + p_2 \sin^2 \lambda$ den Richtungen λ und $(\pi - \lambda)$ entspricht. Man erhält daher die Axen der durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehenden zu einem Cylindroid, d. i. zu zwei gegebenen reciproken Schrauben, indem man von ihm aus auf die Erzeugenden desselben die Normalen fällt; jede derselben schneidet dann in Folge der speciellen metrischen Eigenschaften des Cylindroids noch zwei zu den Axen x, y symmetrische und daher mit gleichem Pfeil begabte Schrauben in demselben, und es ist der Pfeil von diesen, welcher mit entgegengesetztem Zeichen der betrachteten Geraden beigelegt werden muss, insofern sie dem Cylindroid reciprok sein soll. Die so bestimmten Geraden durch einen Punkt P bilden aber einen Kegel zweiten Grades — weil erstens die $x\,y$ Projection der Curve ihrer Fusspunkte in den Erzeugenden der Fläche offenbar ein Kreis ist, und weil zweitens ein seine Doppelgerade enthaltender Kreiscylinder das Cylindroid ausser dieser zweifach zählenden Geraden und den von ihrem unendlich fernen Punkte nach den Kreispunkten der Ebene $x\,y$ gehenden Erzeugenden nur in einer Ellipse schneiden kann, eben dem Orte der Fusspunkte jener Normalen. Dieser Kegel zerfällt für einen Punkt des Cylindroids in die Normalebene seiner Erzeugenden und die Ebene nach der Erzeugenden desselben vom nämlichen Pfeil. Offenbar endlich kann auch allgemein die Ebene seiner elliptischen Basis in der Fläche direct gefunden werden; denn sie enthält einerseits den Fusspunkt Q der zur Doppelgeraden Parallelen aus P auf dem Cylindroid, anderseits eine gerade Erzeugende desselben, nämlich diejenige welche mit der durch Q gehenden einerlei

Pfeil hat. Diese schneidet die Ellipse in zwei Punkten, von denen der eine in der Doppelgeraden liegt, der andere der Fusspunkt der zu ihr Normalen aus P und zugleich der Berührungspunkt ihrer Ebene mit dem Cylindroid ist. Man findet ebenso leicht, dass die in einer willkürlichen Ebene liegenden Reciproken eines Cylindroids Tangenten eines Kegelschnittes und zwar einer Parabel sind. *Die zu einem Cylindroid Reciproken bilden also einen Complex zweiten Grades*, und alle im Cylindroid auftretenden Pfeile kommen den Schrauben in jedem Complexkegel und an jedem Complexkegelschnitt desselben der Reihe nach zu.

Diese Ergebnisse führen aber leicht zu den weitern, dass *zu vier willkürlich gewählten Schrauben die Schrauben eines Cylindroids* reciprok sind und dass *zu fünf beliebigen Schrauben eine einzige Reciproke* existirt. Denn im ersten Falle muss das System der Reciproken einfach unendlich an Zahl sein oder eine *Fläche* bilden; und wenn man die vier Schrauben nach absteigenden Pfeilgrössen ordnet als 1, 2, 3, 4 und einen Pfeil zwischen den beiden mittelsten wählt, so gibt es auf dem Cylindroid (1, 3) wie auf dem Cylindroid (2, 4) zwei Schrauben mit diesem Pfeil, und die beiden gemeinsamen Transversalen dieser vier, als Schrauben mit entgegengesetzt gleichem Pfeil genommen, bestimmen ein Cylindroid, dessen sämmtliche Schrauben zu 1, 2, 3, 4 reciprok sind, weil jene es zu den gegebenen Cylindroiden und also zu diesen vier Schrauben sind. Und im zweiten Falle ist nur eine *Gruppe* von Schrauben möglich; und da zwei sofort ein ganzes Cylindroid oder ein einfach unendliches System liefern würden, so kann zu fünf gegebenen Schrauben nur *eine* Schraube reciprok sein; womit zugleich gesagt ist, dass in jedem Cylindroid zu einer willkürlich gegebenen Schraube immer eine und nur eine reciproke Schraube existirt.

6. Die Lehre von den Reciproken setzt in den Stand, die zweckmässige Coordinatenbestimmung für diese Untersuchungen aufzustellen. So wie man, in vollkommener Analogie zur Zerlegung der allgemeinen Bewegung, ein Kräftesystem in drei Einzelkräfte nach drei zu einander rechtwinkligen sich schneidenden Geraden und in drei Paare in ihren respectiven Normalebenen elementar zerlegt und diese als seine Coordinaten benutzt, so wird man dieser allgemeineren Auffassung entsprechend eine Zerlegung des Winders respective der Windung nach sechs gegebenen Schrauben vornehmen und die denselben beizulegenden Intensitäten respective Amplituden als die Coordinaten des- oder derselben anzusehen haben. (Vergl. Plücker in der Abhandl. von 1866, p. 362.) Wenn die Schraube ϱ mit der Intensität ϱ'' einen nach den fundamentalen Schrauben $w_1, \ldots, w_6$ zu zerlegenden Winder repräsentirt, so bestimmen sich die zugehörigen Intensitäten $\varrho_1'', \ldots \varrho_6''$ durch die Bemerkung, dass eine Windung nach einer beliebigen Schraube σ gegen ϱ dieselbe Arbeit verrichten muss, wie gegen die sämmtlichen Componenten; man erhält

$$\varrho'' \omega_{\varrho\sigma} = \varrho_1'' \, \omega_{1\sigma} + \varrho_2'' \, \omega_{2\sigma} + \ldots + \varrho_6'' \, \omega_{6\sigma},$$

wenn $\omega_{\varrho\sigma}$ den virtuellen Cœfficienten von σ gegen ϱ und $\omega_{1\sigma}$, etc. denselben von σ gegen w_1, etc. bedeuten. So liefern sechs beliebige Schrauben sechs lineare Gleichungen, aus denen die Coordinaten ϱ_i'' sich bestimmen. Wenn σ zu den fundamentalen Schrauben $w_2, \ldots, w_6$ reciprok ist, so giebt die betreffende Gleichung direct ϱ_1'', weil alle andern Glieder rechts verschwinden,

$$\varrho'' \omega_{\varrho\sigma} = \varrho_1'' \, \omega_{1\sigma}.$$

Ist p der Pfeil der Schraube ϱ und kommen den fundamentalen Schrauben w_i die Pfeile p_i respective zu, so erhält man, indem man σ nach einander mit jeder der Letzteren zusammenfallen lässt, in Erinnerung dass der virtuelle Coefficient einer Schraube auf sich selbst ihr doppelter Pfeil ist, die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varrho''\omega_{\varrho 1} &= \varrho_1'' p_1 + \varrho_2'' \omega_{21} + \ldots \varrho_6'' \omega_{61}, \\
\varrho''\omega_{\varrho 2} &= \varrho_1'' \omega_{12} + \varrho_2'' p_2 + \ldots \varrho_6'' \omega_{62}, \\
&\vdots \\
\varrho''\omega_{\varrho 6} &= \varrho_1'' \omega_{16} + \varrho_2'' \omega_{26} + \ldots \varrho_6'' p_6;
\end{aligned}$$

für σ als zusammenfallend mit ϱ aber

$$\varrho'' p_\varrho = \varrho_1'' \omega_{1\varrho} + \varrho_2'' \omega_{2\varrho} + \ldots + \varrho_6'' \omega_{6\varrho};$$

also durch Multiplikation der Letztern mit ϱ'' und Substitution der vorhergehenden

$$\varrho''^2 p_\varrho = p_1 \varrho_1''^2 + \ldots p_6 \varrho_6''^2 + 2(\varrho_1'' \varrho_2'' \omega_{12} + \ldots . \varrho_5'' \varrho_6'' \omega_{56})$$

zur Bestimmung der Intensität der Resultante aus den Intensitäten der Componenten. Und hier können die fünfzehn Doppelproducte zum Verschwinden gebracht werden durch geeignete Wahl der Fundamentalschrauben; ist w_1 willkürlich, w_2 aus dem vierfach unendlichen System ihrer Reciproken, w_3 aus dem Complex der Reciproken zu w_1, w_2; w_4 aus dem zweifach unendlichen System oder der Congruenz der Reciproken zu w_1, w_2, w_3; sodann w_5 aus dem Cylindroid der Reciproken zu w_1, w_2, w_3, w_4 und endlich w_6 als die Reciproke zu $w_1, \ldots, w_5$ gewählt, so dass die fundamentalen Schrauben sämmtlich in Paaren zu einander reciprok sind, — ein System von Coreciprokalen — was über fünfzehn von den dreissig für sechs Schrauben verfügbaren Bedingungen verfügen heisst, so sind die virtuellen Coefficienten der Fundamentalschrauben in Paaren Null und man erhält

$$\varrho''^2 p_\varrho = p_1 \varrho_1''^2 + \ldots p_6 \varrho_6''^2$$

Und wenn die Arbeit, welche bei einer Windung um α mit der Amplitude α' gegen einen Winder β mit der Intensität β'' gemacht wird, im Allgemeinen die Summe der sechs und dreissig componirenden Arbeitsgrössen ist, so verschwinden unter den vorher gemachten Voraussetzungen dreissig derselben und der Ausdruck der fraglichen Arbeit ist einfach

$$2\,(p_1\,\alpha_1'\,\beta_1'' + \ldots\, p_6\,\alpha_6'\,\beta_6'').$$

Weil man hat $\alpha_i' = \alpha'\,\alpha_i$, $\beta_i'' = \beta''\,\beta_i$, so ist dies gleich

$$2\,\alpha'\,\beta''\,(p_1\,\alpha_1\,\beta_1 + \ldots\, p_6\,\alpha_6\,\beta_6)$$

und somit der virtuelle Coefficient von α und β

$$\omega_{\alpha\beta} = p_1\,\alpha_1\,\beta_1 + \ldots\, p_6\,\alpha_6\,\beta_6$$

und für Schraube α als identisch mit β speciell der Pfeil

$$p_\alpha = p_1\,\alpha_1^2 + \ldots\, p_6\,\alpha_6^2.$$

Die von der Windung von der Amplitude w_1' um w_1 gegen einen Winder von der Intensität Eins in α gethane Arbeit ist $2\,w_1'\,\omega_{\alpha 1}$ und sie muss der Arbeit gleich sein, welche dieselbe Windung gegen einen Winder von der Intensität α_1 in w_1 thut, also dass

$$2\,p_1\,\alpha_1\,w_1' = 2\,w_1'\,\omega_{\alpha 1} \text{ oder } \alpha_1 = \frac{\omega_{\alpha 1}}{p_1}$$

ist, zum Ausdruck der Coordinate durch den virtuellen Coefficienten.

Man kann die Intensitäten der Componenten α_i des in α wirkenden Winders von der Intensität Eins als die Coordinaten von α bezeichnen und erhält die zwischen denselben bestehende metrische Relation, welche zur Bestimmung der absoluten Grössen erforderlich ist, indem man durch den Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten x, y, z Parallelen zu den fundamentalen Schrauben $w_1, \ldots, w_6$ zieht, welchen die Richtungscosinus a_i, b_i, c_i zukommen; denn dann muss

$$(a_1\,\alpha_1 + \ldots a_6\,\alpha_6)^2 + (b_1\,\alpha_1 + \ldots b_6\,\alpha_6)^2 + (c_1\,\alpha_1 + \ldots c_6\,\alpha_6)^2 = 1$$

$$\text{oder } \alpha_1^2 + \ldots\, \alpha_6^2 + 2\,[\alpha_1\,\alpha_2\cos(w_1, w_2) + \ldots] = 1$$

sein. Mit derselben bestimmt sich z. B. die zu fünf Schrauben

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ reciproke Schraube ϱ, weil man aus den Bedingungs-Gleichungen $\Sigma p_i \varrho_i \alpha_i = 0$, $\Sigma p_i \varrho_i \beta_i = 0, \ldots$ $\Sigma p_i \varrho_i \varepsilon_i = 0$ die Verhältnisse ihrer Coordinaten erfährt.

7. Das sind die Grundlagen der Mechanik fester Körper in der neuen Gestalt. Es soll erwähnt werden, dass die einfache Ausdrucksform mittelst des coreciprokalen Systems der sechs Fundamentalschrauben gleichfalls in liniengeometrischen Untersuchungen schon gegeben war, nämlich durch F. Klein in der Abhandlung »zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades«, in »Mathem. Annalen« Bd. 2, p. 203 f., vergl. auch ibid. p. 370.

Der Ausbau fordert die Einführung der Massen in die Bewegungen und die sie hervorbringenden Kräftesysteme, und ich darf diesen Bericht wohl nicht schliessen, ohne auch davon eine Idee gegeben zu haben; ich muss mich aber in diesem Betracht kurz fassen, wenn ich noch von der Durchführung eines bestimmten Falles das Hauptsächlichste mittheilen will.

Man weiss, von den beiden Grundbegriffen der Geometrie der Massen — wie man diesen Theil der Mechanik wohl mit Recht nennen kann — entspricht der eine der Translation, der andere der Rotation; jener der Massenmittelpunkt oder fälschlich Schwerpunkt, der Punkt des mittleren Abstandes x sämmtlicher Massenpunkte von einer beliebigen Ebene

$$x \, \Sigma m_i = \Sigma m_i x_i, \text{ etc.};$$

dieser der Trägheitsradius R, in dessen Abstand von der Axe die Masse des Systems concentrirt zu denken ist, um mit dem System die gleiche kinetische Energie der Rotation um dieselbe zu haben, oder für

$$R^2 \, \Sigma m_i = \Sigma m_i r_i^2.$$

Man kennt die geometrische Darstellung der letztern

Grösse, d. h. der Massenvertheilung in Bezug auf die Rotation um Axen aus einem Punkte durch das Poinsot-sche Trägheitsellipsoid, welches für den Massenmittelpunkt O als Centralellipsoid bezeichnet wird, und dessen drei Axen a, b, c die Hauptaxen des Punktes, respektive des Systems genannt werden, und kennt den Satz von Binet, nach welchem die Hauptaxen und Hauptträgheitsradien für einen beliebigen Punkt des Systems aus denen des Massenmittelpunktes abgeleitet werden. Es ist endlich bekannt, dass die Hauptaxen permanente Rotationsaxen für ein um einen Punkt rotierendes System und dass die dem Massenmittelpunkt O entsprechenden natürliche Rotationsaxen eines freien Systems sind; das Letztere sowohl, wenn keine Kräfte auf dasselbe wirken, als wenn die wirkenden Kräfte sich auf ein Paar in zur Axe normaler Ebene reducieren.

Im Zusammenhange mit den vorhergehenden Betrachtungen zeigt man nun leicht, dass die Hauptaxen des Systems OA, OB, OC als Schrauben w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6 mit den Pfeilen $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ respective betrachtet ein coreciprocales System bilden, dass sie also geeignet sind, als fundamentale Schrauben zur Coordinatenbestimmung benutzt zu werden; und man zeigt in Verallgemeinerung des letztlich Erinnerten, dass sie für ein freies System zugleich die Eigenschaft haben, dass dasselbe durch einen impulsiven Winder, der nach einer von ihnen wirkt, zur Windung um dieselbe Schraube veranlasst wird — so dass sie als die sechs Hauptträgheitsschrauben des Systems bezeichnet werden können.

Im Allgemeinen ruft ein Winder nach der Schraube β eine Windung des Systems nach einer andern Schraube α hervor, nach der die Coordinaten beider mit den Pfeilen der Fundamentalschrauben verbindenden Relation

$$\beta_i = \frac{\alpha'}{\beta''} \frac{M}{t} p_i \alpha_i .$$

Wenn nun die Winder β, β^* Windungen α, α^* in dieser Weise hervorrufen und wenn α zu β^* reciprok ist, so ist auch stets α^* reciprok zu β, und zwar sowohl für das freie System wie für ein durch Bedingungen auf eine niedrigere Stufe der Freiheit beschränktes System; denn die bezügliche Bedingung lautet

$$p_1^2 \alpha_1 \alpha_1^* + \ldots p_6^2 \alpha_6 \alpha_6^* = 0.$$

Solche Schrauben nennt Ball in seinem Londoner Memoir von 1874 «conjugate screws of inertia», ich will sie als materiell conjugiert bezeichnen. Und indem er bemerkt, dass für ein durch Bedingungen beschränktes System zu jeder Schraube der momentanen Windung statt einer einzigen und bestimmten ein System von Schrauben entspricht, nach deren jeder der veranlassende impulsive Winder wirken kann, weist er nach, dass es in dem die Beweglichkeit des starren Systems definierenden Schraubensystem k^{ter} Stufe immer k und nur k-Schrauben giebt, welche in Paaren materiell conjugiert sind — die k-Hauptträgheitsschrauben des Systems. Im Fall der Freiheit zweiter Stufe z. B. oder wenn das System nach zwei Schrauben und allen aus ihnen resultierenden, also den Schrauben ihres Cylindroids winden kann, bestimmen drei Schrauben im Cylindroid, nach denen Winder wirken, und die ihnen entsprechenden, nach denen das System gewunden wird, durch ihre Richtungen zwei projectivische Reihen, als deren Doppelpunkte die Richtungen der beiden Hauptträgheitsschrauben erhalten werden.

8. Wenn nun das starre System um eine Schraube α mit der Geschwindigkeit α' windet, so wird die Bewe-

gung nach den Fundamentalschrauben w_i mit Windungsgeschwindigkeiten $\alpha'\alpha$ und Verschiebungsgeschwindigkeiten $\alpha' \alpha_i p_i$ zerlegt, und die kinetische Energie des Systems setzt sich aus den je zwei Summanden

$$\frac{1}{2} \alpha'^2 \alpha_i^2 \int r^2 \, d\, M \text{ und } \frac{1}{2} M \alpha'^2 \alpha_i^2 p_i^2$$

oder, da p_i eben der bezügliche Trägheitsradius ist, aus

$$\frac{1}{2} M \alpha'^2 \alpha_i^2 p_i^2 \text{ und } \frac{1}{2} M \alpha'^2 \alpha_i^2 p_i^2$$

zusammen und ist somit überhaupt gleich

$$M \alpha'^2 (\alpha_1^2 p_1^2 + \ldots \alpha_6^2 p_6^2) \text{ oder } M \alpha'^2 u_\alpha^2$$

für u_α als einen von der Vertheilung der Masse im System gegen die Axe von α abhängigen linearen Parameter. Der Winder β von der Intensität β'' bringt durch Einwirkung während des Zeitelementes τ auf das System von der Masse M, welches nur nach der Schraube α winden kann, die Geschwindigkeit α' und resp. die kinetische Energie K hervor nach den Gleichungen

$$\alpha' = \frac{\tau \beta'' \omega_{\alpha\beta}}{M u_\alpha^2}, K = \frac{\tau^2 \beta''^2 \omega_{\alpha\beta}^2}{M u_\alpha^2}$$

Der Vergleich mit dem völlig freien System giebt das seit Euler bekannte Resultat, dass durch die Beschränkung nothwendig immer ein Energieverlust eintritt.

Wenn man nun bedenkt, dass sich in einem Schraubensystem von der Stufe k immer k coreciprocale Schrauben wählen lassen, weil zu $(k-1)$ Schrauben desselben eine ihm angehörige reciproke existiert — als zu $(6-k)$ Schrauben des Reciprocalsystems also zusammen zu fünf Schrauben reciprok — so erhält man als passende Coordinatenbestimmung für die Freiheitsstufe k eine Zerlegung jedes Winders nach diesen k Schrauben und nach irgend $(6-k)$ Schrauben des Reciprocalsystems; und weil die Componenten in den Letzteren durch die dem

System auferlegten Beschränkungen aufgehoben werden, so setzen sich die Componenten in den k Schrauben des Systems allein zu einem resultierenden dem System selbst angehörigen Winder zusammen, der der reducierte Winder für den gegebenen heissen soll.

Mit der Gruppe der k Hauptträgheitsschrauben speciell und für u_i $(i = 1, \ldots k)$ als die ihnen entsprechenden Werthe des Parameters u_α ergiebt sich zwischen den Coordinaten β_i des reducirten Winders und den Coordinaten α_i der Schraube, in welcher die von ihm (und allen den andern impulsiven Windern, denen derselbe reducirte entspricht) hervorgerufene Windung erfolgt, die Relation

$$\frac{\alpha_i' \, u_i^2}{p_i} = \frac{\tau}{M} \beta_i'' ;$$

auch erhält man die Bedingung des Conjugirtseins von Schrauben α, α^* in der Form

$$u_1^2 \, \alpha_1 \, \alpha_1^* + \ldots u_k^2 \, \alpha_k \, \alpha_k^* = 0$$

und die kinetische Energie der Bewegung

$$K = M \, u_\alpha^2 \text{ mit } u_\alpha^2 = u_1^2 \, \alpha_1'^2 + \ldots u_k^2 \, \alpha_k'^2.$$

Speciell im Cylindroid oder bei Freiheit zweiter Stufe hat man

$$u_\alpha^2 = u_1^2 \, \alpha_1^2 + u_2^2 \, \alpha_2^2$$

und erhält zur geometrischen Darstellung von u_α eine Ellipse, deren Durchmesser den u_α der parallelen α indirect proportional sind, während ihre conjugirten Durchmesser die Richtungen materiell conjugirter Schrauben haben und ihre Axen die Schrauben von der maximalen und minimalen kinetischen Energie bei gegebener Windungsgeschwindigkeit liefern. Auch sind die beiden Schrauben im Cylindroid, welche dem gemeinsamen Paar conjugirter Durchmesser dieser Ellipse und des Pfeilkegelschnittes parallel sind, die Hauptträgheitsschrauben des Systems. Jene

Trägheitsellipse oder Ellipse gleicher kinetischer Energie ist für die allgemeine Theorie der nach zweiter Stufe freien Systeme das Analogon eines Ellipsoids, das man gewöhnlich das Trägheitsellipsoid nennt und dessen Bedeutung in der Theorie der Rotation um einen Punkt man kennt, dessen ich auch nachher in der allgemeinen Theorie des Systems mit Freiheit dritter Stufe noch erwähnen werde.

9. Ich kehre zum allgemeinen Fall des Schraubensystems von der Stufe k zurück. Das starre System gehe durch die Windung um eine seiner Schrauben α mit der Amplitude α' aus der Gleichgewichtslage A unter dem Einfluss eines Kräftesystems in die benachbarte Lage B über unter Verbrauch der Energie V_α, der potentiellen Energie der Lagenänderung, die von den Coordinaten der Windung aus A nach B und von den Constanten des Kräftesystems als eine homogene Function zweiten Grades der k Coordinaten $\alpha_1', \ldots \alpha_k$ der Lagenänderung abhängig sein muss, weil man höhere Potenzen derselben gegen die zweiten vernachlässigen kann und die linearen Glieder dem Ausgange von einer Gleichgewichtslage entsprechend fehlen. In Folge der Ueberführung in die Lage B ist das Gleichgewicht aufgehoben und ein Winder nach der Schraube β von den Coordinaten $\beta_1'', \ldots \beta_k''$ hervorgerufen, die man aus

$$\beta_i'' = -\frac{1}{2p_i}\frac{dV_\alpha}{d\alpha_i}$$

erhält. Wenn in dieser Weise den Windungen um α, α^* die reducirten Winder β, β^* entsprechen, so ist die Reciprocität von α und β^* stets mit der Reciprocität von α^* und β verbunden, weil die Bedingung für beide unter der Voraussetzung der Form

$$A_{11}\,\alpha_1'^2 + \ldots + 2\,A_{12}\,\alpha_1'\,\alpha_2' + \ldots + 2\,A_{1k}\,\alpha_1'\,\alpha_k' + \ldots$$

für V_α gleichmässig lautet

$$A_{11}\,\alpha_1'\,\alpha_1^{*\prime} + \ldots + A_{12}\,(\alpha_1'\,\alpha_2^{*\prime} + \alpha_1^{*\prime}\,\alpha_2') + \ldots = 0.$$

Schrauben α, α^*, für welche sie erfüllt ist, werden potentiell conjugirt genannt und man zeigt sofort, dass es im Schraubensystem der Stufe k immer k und nur k Schrauben von solcher Lage giebt, dass bei Windung um eine derselben ein reducirter Winder nach ihr selbst hervorgerufen wird; denn dies fordert die Gleichungen

$$\alpha_i'' = -\frac{1}{2p_i}\,\frac{d V_\alpha}{d\alpha_i}, = -\frac{1}{2p_i}\,(A_{i1}\,\alpha_1' + A_{i2}\,\alpha_2' + \ldots A_{ik}\,\alpha_k')$$

oder wegen $\alpha_i'' = \alpha''\,\alpha_i$, $\alpha_i' = \alpha'\,\alpha_i$

$$\alpha''\,\alpha_i\,p_i = -\alpha'\,(A_{i1}\,\alpha_i + \ldots A_{ik}\,\alpha_k),$$

welche zu ihrer Verträglichkeit das Verschwinden der symmetrischen Determinante

$$\begin{vmatrix} A_{11} + \frac{\alpha''}{\alpha'}\,p_1, & A_{12} & , \ldots A_{1k} \\ A_{12} & , A_{22} + \frac{\alpha''}{\alpha'}\,p_2 & , \ldots A_{2k} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ A_{1k} & , A_{2k} & , \ldots A_{kk} + \frac{\alpha''}{\alpha'}p_k \end{vmatrix}$$

erfordern, aus welchem für das Verhältniss $\dfrac{\alpha''}{\alpha'}$ sich k stets reelle Werthe ergeben, von denen jeder mit Hülfe der Gleichungen die Coordinaten einer Schraube bestimmt, welche den Bedingungen genügt. So erhält man die k potentiellen Hauptschrauben des Systems, eine einzige coreciprocale Gruppe, in Bezug auf welche als fundamental die durch die Windung von der Amplitude α' um α gethane Arbeit

$V_\alpha = \alpha'^2\,(A_{11}\,\alpha_1^2 + \ldots + 2\,A_{12}\,\alpha_1\,\alpha_2 + \ldots)$ oder $\alpha'^2\,F\,v_\alpha{}^2$ wird, für F als eine der Masse direct und dem Quadrat der Zeit verkehrt proportionale Constante und für v_α als einen der Schraube α unter dem Einfluss der Function V zukommenden linearen Parameter, der zu dem rein geomtrischen Parameter p_α und dem von der Massenvertheilung im System gegenüber der Schraube α abhängigen u_α als der dritte hinzukommt. In Bezug auf die potentiellen Hauptschrauben als fundamental und mit $v_1, \ldots v_k$ als den ihnen zukommenden Parametern v drückt sich die potentielle Energie der Lagenveränderung als eine Summe von Quadraten aus

$$F\,(\alpha_1'^2\, v_1^2 + \ldots\ \alpha_k'^2\, v_k^2)\,,$$

und diese Ausdrucksform fährt fort zu gelten für jede Gruppe von k potentiell conjugirten Schrauben.

Eine letzte wichtige Gruppe von k Schrauben des Systems erhält man endlich, wenn man die beiden Schrauben β und β^* des Systems gleichzeitig in Betracht zieht, welche zu einer Schraube α desselben in den beiden folgenden Beziehungen stehen: β als diejenige Schraube, nach welcher ein Winder auf das ruhende System wirken muss, um das System in Windung um α zu versetzen, und β^* als die Schraube, in welcher der durch die Windung um α aus einer Gleichgewichtslage heraus hervorgerufene auf das System reducirte Winder wirkt; jene nur vom festen Körper und der Gesammtheit der demselben gestatteten Bewegungen, diese zugleich von dem einwirkenden Kräftesystem abhängig. Es ergibt sich, dass es immer k und nur k Schrauben α im System giebt, für welche die so entsprechenden Schrauben β und β^* zusammenfallen; denn dies fordert nach dem Vorigen die gleichzeitige Erfüllung der k Gleichungen

$$h\,\frac{u_i^2}{p_i}\,\alpha_i'' = -\,\frac{1}{2p_i}\,\frac{dV}{d\alpha_i},\ \text{oder}\ hu_i^2\ \alpha''\,\alpha_i = -\ (A_{11}\,\alpha_1 + \ldots)\ \alpha'$$

d. h. das Verschwinden der symmetrischen Determinante

$$\begin{vmatrix} A_{11} - h\frac{\alpha''}{\alpha'} u_1^2, & A_{12} & , \dots A_{1k} \\ A_{12} & , A_{22} - h\frac{\alpha''}{\alpha'} u_2^2, & \dots A_{2k} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ A_{1k} & , A_{2k} & , \dots A_{kk} - h\frac{\alpha''}{\alpha'} u_k^2 \end{vmatrix}$$

Diess aber bestimmt für $h\frac{\alpha''}{\alpha'}$ stets k reelle Werthe und damit durch das System der Bedingungsgleichungen k Schrauben der verlangten Art; eine Gruppe von Schrauben, welche zugleich auch materiell und potentiell conjugiert sind und die Ball nach dem Vorschlage von R. Townsend als harmonische Schrauben benannt hat. Ich will anmerken, dass für ein Schraubensystem zweiter Stufe der Parameter $v_\alpha = \alpha_1^2 v_1^2 + \alpha_2^2 v_2^2$ auf eine potentielle Ellipse führt, als deren conjugierte Durchmesser zu potentiell conjugierten Schrauben parallel sind, etc. Die ihr mit dem Pfeilkegelschnitt respektive der Trägheitsellipse des Systems gemeinsamen Paare von conjugierten Durchmessern liefern die potentiellen Hauptschrauben und die harmonischen Schrauben des Systems.

10. Mit diesen Mitteln gelangt man nun zur Aufstellung der allgemeinen Differentialgleichungen der Dynamik unveränderlicher Systeme und zur anschaulichen Lösung des allgemeinen kinetischen Problems. (Vergl. z. B. Poisson's «Mécanique» t. 2, Ch. IX, 1. 2. oder Duhamel t. 2., Art. 206—218.

Man denkt den Körper unter dem Einfluss der Kräfte in Bewegung, so dass zur Zeit t die Coordinaten der Windungsbewegung bezogen auf die k Hauptträgheitsschrauben die $\frac{d\alpha_i'}{dt}$ sind; dazu seien β_i'' die Coordinaten eines Winders, der während der kleinen Zeit τ auf den ruhenden Körper wirkend die nämliche Bewegung desselben erzeugt hätte, so dass die Coordinaten desjenigen impulsiven Winders, der in der Zeit τ von der Ruhe aus die Bewegung der Zeit $t+\tau$ hervorbringen würde, $\beta_i'' + \tau \frac{d\beta_i''}{dt}$ sind. Anderseits kann die Bewegung zur Zeit $t+\tau$ angesehen werden als entsprungen aus der Einwirkung des Winders β_i'' während der Zeit τ und der nachfolgenden Einwirkung des hervorgerufenen Winders während der gleichen Zeit, dessen Coordinaten sind

$-\frac{\tau}{2p_i}\frac{dV}{d\alpha_i'}$, so dass man hat $\beta_i'' + \tau \frac{d\beta_i''}{dt} = \beta_i'' - \frac{1}{2p_i}\frac{dV}{d\alpha_i}$.

Nun ist aus

$$\tau\,\beta_i'' = M\,\frac{u_i^2}{p_i}\,\frac{d\alpha_i'}{dt} \quad \text{abzuleiten} \quad \tau\,\frac{d\beta_i''}{dt} = M\,\frac{u_i^2}{p_i}\,\frac{d^2\alpha_i'}{dt^2}$$

und man erhält die allgemeinen Gleichungen des Problems ($i = 1, 2, \ldots k$) in der Form

$$2\,M u_i^2\,\frac{d^2\alpha_i'}{dt^2} + \frac{dV}{d\alpha_i'} = 0\,.$$

(Vergl. «Thomson u. Tait, Natural Philosophy» Vol. I, Art. 329, 330).

Zur Integration derselben setzt man $\alpha_i' = f_i\,\Omega$ für Ω als eine unbekannte Funktion der Zeit und die f_i als Constanten; mit Einführung von V erhält man das System

$$Mu_1^2 f_1\,\frac{d^2\Omega}{dt^2} + (A_{11}f_1 + A_{12}f_2 + \ldots A_{1k}f_k)\,\Omega = 0,$$
$$\vdots$$
$$Mu_k^2 f_k\,\frac{d^2\Omega}{dt^2} + (A_{k1}f_1 + A_{k2}f_2 + \ldots A_{kk}f_k)\,\Omega = 0,$$

welches sich auf die eine Gleichung

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} + \frac{h}{M}\,\frac{\alpha''}{\alpha'}\,\Omega = 0$$

reduzirt mit dem Integral $\Omega = H \sin(st + c)$, wenn man die Grösse $h\frac{\alpha''}{\alpha'}$ und die f_i aus den k Gleichungen

$$f_1\left(A_{11}-h\frac{\alpha''}{\alpha'}u_1^2\right)+f_2 A_{12}+\dots f_k A_{1k}=0,$$
$$\vdots$$
$$f_1 A_{k1}+f_2 A_{k2}+\dots \qquad +f_k\left(A_{kk}-h\frac{\alpha''}{\alpha'}u_k^2\right)=0$$

bestimmt, d. h. nach dem vorhergehenden, wenn die f_i den Coordinaten einer harmonischen Schraube proportional sind. Für f_{ij} als den Werth von f_j, welcher der Benutzung der i^{ten} unter den Wurzeln der Gleichung k^{ten} Grades für $h\frac{\alpha''}{\alpha'}$ entspringt, werden die allgemeinen Lösungen mit $2k$ durch den Anfangszustand zu bestimmenden Constanten

$$\alpha'_i = f_{1i}H_1\sin(s_1 t+c_1)+\dots f_{ki}H_k\sin(s_k t+c_k);$$

und dieselben erhalten zugleich durch die vorausgegangenen Betrachtungen die einfache Interpretation: Man denke die Windung, welche den Körper aus der stabilen Gleichgewichtslage entfernte und die ihm dann ertheilte Windungsbewegung in ihre k Komponenten nach den harmonischen Schrauben zerlegt und zu diesen einzeln k Kreispendel isochron; man denke dieselben alle gleichzeitig mit dem festen Körper mit Amplituden und Winkelgeschwindigkeiten, die den Anfangsamplituden und Geschwindigkeiten der Windungen der entsprechenden harmonischen Schrauben respective proportional sind, in Bewegung gesetzt und man bestimme für den gegebenen Zeitmoment die Bögen der k Pendel, um dem Körper die entsprechenden Windungen um die harmonischen Schrauben von der Gleichgewichtslage aus zu geben — und man erhält die entsprechende Lage des Körpers.

11. Schliesslich will ich dem besonderen Fall eine nähere Betrachtung widmen, in welchem der Körper frei ist nach Windungen um alle Schrauben in einem

System dritter Stufe und in welchem daher das reciproke System dem ersteren gleichartig ist, beide durch 3 (6—3) oder 9 Bedingungen bestimmt. Die Ordnung der Schrauben beider Systeme in einfach unendliche Schaaren von gleichem Pfeil giebt ohne Weiteres den Satz, dass jede dieser Schaaren die eine Regelschaar eines Hyperboloids bildet, dessen andere Regelschaar die Schrauben vom entgegengesetzt gleichen Pfeil im reciproken System umfasst. Diese Hyperboloide bilden ein concentrisches, coaxiales und concyclisches System und man beweist ohne Mühe, dass das Hyperboloid der Schrauben vom Pfeil Null — der Ort der Punkte, denen nach Mannheim in der zweifach unendlich unbestimmten Bewegung nicht Trajectorienbündel sondern nur Trajectorienbüschel entsprechen; und der Ort der gemeinsamen Geraden von drei linearen Complexen nach Plücker («Neue Geom. d. R.» p. 130), deren Axen in den Coordinatenaxen liegen und deren Parameter p_1, p_2, p_3 sind — die Gleichung

$$p_1 x^2 + p_2 y^2 + p_3 z^2 + p_1 p_2 p_3 = 0$$

hat, mit p_1, p_2, p_3 als den Pfeilen, welche seinen Hauptaxen respective im Systeme zukommen, und dass die Schrauben vom Pfeil k dem Hyperboloid

$$(p_1-k) x^2 + (p_2-k) y^2 + (p_3-k) z^2 + (p_1-k)(p_2-k)(p_3-k) = 0$$

angehören. Zugleich bestimmt das Hyperboloid vom Pfeil Null die Pfeile aller Schrauben des Systems, als proportional dem inversen Quadrat seiner ihnen gleichgerichteten Halbmesser; denn aus

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad p_1 x^2 + p_2 y^2 + p_3 z^2 + p_1 p_2 p_3 = 0,$$
$$(p_1-k) x^2 + (p_2-k) y^2 + (p_3-k) z^2 + (p_1-k)(p_2-k)(p_3-k) = 0.$$

folgt
$$kr^2 = - p_1 p_2 p_3,$$

wie diess ebenfalls Plücker (a. a. O. p. 132) von den

Parametern der Complexe der dreigliedrigen Gruppe — Schraubensystem dritter Stufe — ausgesprochen hat. In der Bestimmung dieses Hyperboloids, des Pfeilhyperboloids, ist also die des ganzen Systems und seines reciproken enthalten, wie denn auch damit über seine 9 Constanten verfügt ist. Man sieht, dass von dem System drei Schrauben durch jeden Punkt im endlichen Raume gehen, dagegen nur eine durch einen unendlich fernen Punkt, während in jeder Ebene des Raumes zwei von ihnen liegen und somit die zu einer Ebene parallelen Schrauben des Systems ein Cylindroid bilden und die zu den reellen Kreisschnitten parallelen speciell ebene Strahlbüschel aus zwei Punkten der primären Axe. Die constructive Bestimmung für alles das ist ohne wesentliche Schwierigkeit. Die Bedeutung des Pfeilhyperboloids mag noch durch die Anmerkung — jedes Tripel conjugierter Durchmesser des Pfeilhyperboloids giebt speciell die Richtungen von drei coreciprocalen Schrauben des Systems — erläutert werden, dass die Bedingung des Gleichgewichts unter der Einwirkung der Schwere dahin geht, dass die den Massenmittelpunkt enthaltende Schwerlinie zur Schaar der reciproken Schrauben des Pfeilhyperboloids gehöre, oder dass die Beschränkungen oder Widerstände so beschaffen sein müssen, dass sie die Rotation des Systems um eine bestimmte Gerade durch den Massenmittelpunkt — die zugehörige andere Erzeugende des Pfeilhyperboloids — gestatten.

Im Falle der Rotation um einen festen Punkt, wo das Schraubensystem der statthaften Bewegungen ein Bündel vom Pfeil Null ist, wird das Pfeilhyperboloid illusorisch. Alsdann führt der Ausdruck des Massenparameters

$$u_\alpha^2 = u_1^2\,\alpha_1^2 + u_2^2\,\alpha_2^2 + u_3^2\,\alpha_3^2$$

zur geometrischen Darstellung auf ein Ellipsoid, dessen inverse Halbmesserquadrate den kinetischen Energien des Körpers bei Windung von gegebener Geschwindigkeit um die parallelen Schrauben des Systems proportional sind, oder dessen Halbmesser den Windungsgeschwindigkeiten proportional sind, mit welchen der Körper um die respective parallelen Schrauben des Systems winden muss, um die kinetische Energie Eins zu haben — das Ellipsoid gleicher kinetischer Energie, dessen conjugierte Durchmessertripel zu conjugierten Trägheitsschrauben des Systems parallel sind, und welches im Falle der Drehung des Körpers um einen Punkt in das wohlbekannte Momentellipsoid übergeht.

Das Tripel conjugierter Richtungen, das ihm mit dem Pfeilhyperboloid gemeinsam ist, gehört den Hauptträgheitsschrauben des Systems an, welche im Falle der Rotation um einen Punkt zu den Hauptaxen des Körpers werden; ein Winder nach einer derselben von grosser Intensität aber sehr kleiner Zeitdauer der Wirksamkeit versetzt den Körper in Windung um die nämliche Schraube. Im Allgemeinen findet man die einem solchen impulsiven Winder entsprechende Schraube der momentanen Bewegung, indem man bemerkt, dass die zur Schraube des Winders reciproken Schrauben des Systems als zu vier Schrauben reciprok ein Cylindroid bilden und somit einer Ebene parallel sind; die zu ihr im Ellipsoid gleicher kinetischer Energie conjugierte Richtung gehört der gesuchten Momentan-Schraube an — im speciellen Falle der Rotation um einen Punkt Poinsot's bekannte Construction.

12. Ebenso erhält man für den potentiellen Parameter v_α aus der Gleichung

$$v_\alpha^2 = v_1^2\,\alpha_1^2 + v_2^2\,\alpha_2^2 + v_3^2\,\alpha_3^2$$

ein Ellipsoid als geometrische Darstellung, das Ellipsoid gleicher potentieller Energie, welches für jede Schraube des Systems durch den ihr parallelen Halbdurchmesser als ihm proportional die kleine Amplitude derjenigen Windung angiebt, in welcher die Arbeit Eins gegen die äusseren Kräfte gethan wird; dessen Tripel von conjugierten Richtungen zu potentiell conjugierten Schrauben des Systems gehören und welches zusammen mit dem Pfeilhyperboloid in ähnlicher Weise wie das Vorige zur Construction der Momentanschraube zur Bestimmung der Zurückführungsschraube d. h. der Schraube des durch eine bestimmte Lagenveränderung hervorgerufenen Winders dient. Das einzige Tripel conjugierter Richtungen endlich, welches die beiden Ellipsoide der gleichen Energie gemeinsam haben, gehört den drei harmonischen Schrauben des Systems an; die kleinen Schwingungen des Körpers sind aus einfachen harmonischen Schwingungen um diese Schrauben zusammengesetzt; eine Anfangsverrückung nach einer derselben veranlasst es zu kleinen Windungsschwingungen um die nämliche Schraube; eine Anfangsverrückung um eine Schraube des Cylindroids aus zweien von ihnen macht, dass die Momentschraube der Bewegung des Systems auf diesem Cylindroid oscilliert, ohne es zu verlassen.

In dem sehr speciellen Falle der Rotation um einen Punkt unter dem Einfluss der Schwere wird das potentielle Ellipsoid ein Rotationscylinder um die Schwerlinie durch den Massenmittelpunkt als Axe; die letztere ist eine der drei harmonischen Schrauben und die beiden andern sind die Nullschrauben in dem gemeinsamen Paar conjugierter Durchmesser in der zu jener Schwerlinie conjugierten Diametralebene des Momentellipsoids. In Folge dessen sind die Verticalebenen durch die beiden harmonischen Axen rechtwinklig zu einander.

Das Gegebene mag genügen, um von den heute auf dem besprochenen Gebiete erlangten Resultaten eine deutliche Vorstellung zu geben und ich versage mir daher hier weitere Ausführungen; zu solchen wäre vielfacher Anlass, nicht bloss in der eingehenden Besprechung der Fälle der Freiheit von den Stufen vier und fünf, und insbesondere des Falles vom vollkommen freien System, die hier gar nicht berührt wurden; oder in der der Fälle des Gleichgewichts von Kräften, über welche so viele merkwürdige geometrische Sätze bekannt sind (vergl. die Abhandlung von R. Sturm in «Annali di Matem.» 2. ser. t. VII.) — also in Ansehung des Materials an Problemen, sondern auch in Hinsicht der verwendeten Untersuchungsmittel. Es ist offenbar, dass insbesondere die Strahlencomplexe vom zweiten Grade vielfach von Wichtigkeit sein müssen in diesen Untersuchungen; so sind, um nur eines zu erwähnen, von F. Klein und Ball die beiden Complexe als kinetischer und potentieller Complex respektive bezeichnet und gedeutet worden, welche den Gleichungen

$$\Sigma u_i^2 \alpha_i^2 = 0, \quad \Sigma v_i^2 \alpha_i^2 = 0$$

entsprechen. Man sieht leicht, warum darauf hier nicht wohl einzugehen war.

Ich will nur erwähnen, dass besonders die zweckmässige Verdeutschung der Terminologie von Ball mir einiges Bedenken gekostet hat; es galt da speciell für Twist und Wrench, für Pitch, etc. die geeigneten kurzen und deutlichen Worte zu finden oder zu bilden. Die von mir gewählten werden wenigstens der einlässlichen Prüfung werth sein — Twist durch Drillung zu übersetzen, wie meines Erinnerns geschehen, konnte ich mich nicht entschliessen.

An der weitern Durchbildung und Verwerthung dieser Methoden zweifle ich nicht, und künftigen Lehrern der Mechanik sie darzubieten habe ich daher schon seit ihrem ersten allmähligen Heraustreten aus den kinematischen-geometrischen und linien-geometrischen Untersuchungen für erforderlich gehalten. In diesem Interesse, hoffe ich, wird auch diess Referat nützlich sein können.

Notizen.

Aus einem Schreiben von Hrn. Prof. Dr. v. Littrow, datirt: Wien 1876 V 22. Ich danke Ihnen bestens für die mich sehr interessirenden letztlichen Mittheilungen von Correspondenzen meines Vaters. Ein redactionelles Fragezeichen auf pag. 119 veranlasst mich zu der Bemerkung, dass nicht „Kork" sondern „Kocke" zu lesen ist und dass dieser Name sich auf einen Charakter in F. W. Ziegler's längst verschollenem Drama: „Parteywuth" bezieht, das in der Zeit von Cromwell spielt. Der Bösewicht des Stückes: „Sir Gottlieb Kocke, Parlamentsmitglied und Oberrichter des hohen Criminalgerichtes" (wahrscheinlich dem historischen Sir Edward Coke substituirt) wüthet nämlich nach Herzenslust und nennt sich selbst heuchlerisch den „guten alten Gottlieb Kocke".

Unsere neue Sternwarte ist unter Dach, bis auf die Kuppeln, die noch 1—3 Jahre auf sich warten lassen werden. Nun fängt die Noth mit der inneren Einrichtung und dem Herrichten des Gartens an, der nicht weniger als 7000 Kubikklafter Erdbewegung erfordert. Dass mir namentlich das Gelingen der Instrumente keine kleine Sorge macht, können Sie sich denken.

[R. Wolf.]
