»Journal de Mathém.« 2. sér. t. XIX. p. 113—156) hervorgehoben, dass die glänzende Idee der Krümmungslinien und ihrer entwickelbaren Normalenflächen weit davon entfernt ist, die Schwierigkeiten des Gewölbesteinschnittes zu erledigen, ja dass sie nicht einmal den statischen Bedingungen entspricht, welchen dieselben unterliegen. Alle Praxis hat eben etwas von der Complication der Natur; eine Menge von Bedingungen fordern mehr oder weniger gebieterisch Erfüllung und es ist oft genug unmöglich, allen zugleich zu genügen. Das Gebiet der darstellenden Geometrie an der Hochschule ist die Cultur und Durchbildung der Raumanschauung und sie dient der Praxis um so besser, je mehr sie sich auf diess Gebiet beschränkt und je gründlicher und tiefer sie dasselbe behandelt.

Ueber diejenige Minimalfläche, welche die Neil'sche Parabel zur ebenen geodätischen Linie hat.

Von

Dr. **Lebrecht Henneberg.**

Auf Seite 63 meiner Dissertation (»Ueber solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur geodätischen Linie haben«; Zürich 1875) ist gezeigt worden, dass auf der Ossian Bonnet'schen Biegungsfläche der Minimalfläche, welche die Neil'sche Parabel zur ebenen geodätischen Linie hat, eine Astroide als ebene geodätische

Linie vorkommt. Die Gleichungen der ersteren Fläche hat Herr Dr. Herzog*) in der Form angegeben:

$$U = -i\int^{s} (1-s^2)\,\frac{s^4-1}{s^4}\,ds\;,$$

$$V = \int^{s} (1+s^2)\,\frac{s^4-1}{s^4}\,ds\;,$$

$$W = -i\int^{s} 2s\,\frac{s^4-1}{s^4}\,ds\,.$$

Hieraus folgen für die Minimalfläche, welche die Neil'sche Parabel zur ebenen geodätischen Linie hat, die Gleichungen:

$$U = \int_1^{s} (1-s^2)\,ds - \int_1^{s} \frac{1-s^2}{s^4}\,ds\;,$$

$$V = \int_1^{s} i\,(1+s^2)\,ds - \int_1^{s} i\,\frac{1+s^2}{s^4}\,ds\;, \qquad (1.)$$

$$W = \int_1^{s} 2s\,ds - \int_1^{s} \frac{2}{s^3}\,ds$$

oder

$$U = \int_1^{s} (1-s^2)\,ds - \int_1^{\frac{1}{s}} (1-s^2)\,ds\;,$$

$$V = \int_1^{s} i\,(1+s^2)\,ds + \int_1^{\frac{1}{s}} i\,(1+s^2)\,ds\;,$$

$$W = \int_1^{s} 2\,s\,ds + \int_1^{\frac{1}{s}} 2\,s\,ds\,.$$

*) „Bestimmung einiger speziellen Minimalflächen" pag. 217 bis 274 in dem XX. Jahrgange dieser Zeitschrift.

Bezeichnet man daher mit x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Coordinaten von solchen Punkten der von Herrn Enneper untersuchten Minimalfläche 9. Ordnung, welche zu Punkten s und $\frac{1}{s}$ der Ebene s gehören, so sind

$$x = x_1 - x_2\,, \; y = y_1 + y_2\,, \; z = z_1 + z_2$$

die Coordinaten der Minimalfläche, welche die Neil'sche Parabel zur ebenen geodätischen Linie hat. Der nämliche Zusammenhang besteht natürlich zwischen den Biegungen dieser beiden Flächen.

Aus den Gleichungen (1.) erhält man vermittelst der Substitutionen $s = \varrho\, e^{i\varphi}$ und $\varrho - \varrho^{-1} = r$ für die Coordinaten der Fläche die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} x &= r\left[\cos\varphi - \tfrac{1}{3}(r^2+3)\cos 3\varphi\right], \\ y &= -r\left[\sin\varphi + \tfrac{1}{3}(r^2+3)\sin 3\varphi\right], \\ z &= (r^2+2)\cos 2\varphi\,. \end{aligned} \tag{2.}$$

In Folge der Relation $s = \varrho\, e^{i\varphi}$ sind ferner

$$X = \frac{2\varrho\cos\varphi}{\varrho^2+1}\,, \quad Y = \frac{2\varrho\sin\varphi}{\varrho^2+1}\,, \quad Z = \frac{\varrho^2-1}{\varrho^2+1} \tag{3.}$$

die Cosinus der Winkel, welche die Normale der Fläche mit den Coordinatenaxen bildet.

In meiner Dissertation ist gesagt worden, dass man für $\varphi = \text{const.}$ und $r = \text{const.}$ zwei sich orthogonal schneidende Curvenschaaren dritter und sechster Ordnung auf der Fläche erhält. Da nun $\frac{Y}{X} = tg\,\varphi$ ist, so wird die Fläche längs jeder der Curven dritter Ordnung $\varphi = \text{const.}$ von einem Cylinder berührt, dessen Erzeugende parallel der Ebene $z = o$ sind, und dessen Orthogonalschnitte mit der Ebene $y = o$ den Winkel φ bilden. Die Orthogonalschnitte haben die Gleichung

$(z - 2 \cos 2 \varphi)^3 = 9 \cos 2 \varphi \, \xi^2$, wo $\xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi$,

und sind also Neil'sche Parabeln. Die Scheitelkanten der berührenden Cylinder schneiden die z-Axe in den Punkten $z = 2 \cos 2 \varphi$. Diese Punkte gehören aber den betreffenden Curven dritter Ordnung an. Daher ist die z-Axe eine solche Doppelgerade der Fläche, welche aus lauter uniplanaren Doppelpunkten besteht; die Tangentialebenen sind jedoch nur reell für die Strecke der z-Axe von $z = -2$ bis $z = +2$; der übrige Theil der z-Axe ist isolirt.

Aus den Gleichungen (2.) und (3.) lassen sich leicht die Ebenencoordinaten u, v, w der Fläche berechnen.

Es wird

$$
\begin{aligned}
u &= -\frac{6 \cos \varphi}{\cos 2\varphi \quad r\,(r^2 + 6)}\,, \\
v &= -\frac{6 \sin \varphi}{\cos 2\varphi \quad r\,(r^2 + 6)}\,, \qquad (4.) \\
w &= -\frac{3}{\cos 2\varphi \quad (r^2 + 6)}\,.
\end{aligned}
$$

Hieraus erhält man durch Elimination von r und φ die Gleichung:

$$2 w \, (u^2 - v^2) \, (3 u^2 + 3 v^2 + 2 w^2) + 3 \, (u^2 + v^2) = o.$$

Die Minimalfläche 17. Ordnung, welche die Neil'sche Parabel zur ebenen geodätischen Linie hat, ist von der fünften Classe.

Die homogenen Ebenencoordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 werden für $r = \text{const.}$ ganze Functionen 4. Grades von $tg \; \frac{\varphi}{2}$. Daher sind die geradlinigen Flächen, welche die Minimalfläche längs der Curven $r =$ const. berühren, von der 4. Classe.

Setzt man

$$r \sin \varphi = \frac{q_1}{q_3}, \; r \cos \varphi = \frac{q_2}{q_3},$$

so wird:

$$u_1 = - 6 q_2 q_3^3, \quad u_3 = - 3 (q_1^2 + q_2^2) q_3^2,$$

$$u_2 = - 6 q_1 q_3^3, \quad u_4 = (q_2^2 - q_1^2)(q_1^2 + q_2^2 + 6 q_3^2).$$

Für jede lineare Relation $\alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = o$ sind u_1, u_2, u_3, u_4 ganze homogene Functionen 4. Grades von q_1 und q_2. Man hat daher folgenden Satz:

Auf der vorliegenden Minimalfläche existiren zwei unendliche Schaaren von Raumcurven 5. Ordnung, längs deren die Fläche von geradlinigen Flächen 4. Classe berührt wird. Für $q_1 \pm q_2 + \gamma q_3 = o$ erniedrigt sich diese Classenzahl um 1.

Für jeden die Minimalfläche berührenden Kegel 5. Classe muss zwischen q_1, q_2, q_3, die Relation bestehen:

$$\alpha q_1 q_3^3 + \beta q_2 q_3^3 + \gamma (q_1^2 + q_2^2) q_3^2 +$$
$$\delta (q_2^2 - q_1^2)(q_1^2 + q_2^2 + 6 q_3^3) = o.$$

Diese Gleichung stellt in der Ebene Q eine Curve dar vom 4. Grade, welche durch den Punkt $q_1 = o, q_2 = o$ geht, durch $q_1 \pm i q_2 = o$ und deren auf den Geraden $q_1 \pm i q_2 = o$ gelegene unendlich benachbarte Punkte. In Folge der in meiner Dissertation auf Seite 60 hergeleiteten Sätze sind die Berührungscurven der Kegel 5. Classe von der 12. Ordnung.