2) In vollkommen eiweissfreier Nahrung kann Leim allein den thierischen Organismus nicht erhalten; das Gewicht desselben sinkt.
3) Dasselbe gilt vom Tyrosin in eiweissfreier Nahrung.
4) In eiweissfreier Nahrung vermag Leim mit Tyrosin zusammen den thierischen Organismus zu erhalten; das Gewicht desselben bleibt stabil oder steigt sogar.
5) Der Zusatz von Tyrosin zu eiweissfreier, leimhaltiger Nahrung vermindert die Harnstoffausscheidung, sodass weniger N ausgeschieden als aufgenommen wird.

Ueber die Symmetrie;

nebst einigen andern geometrischen Bemerkungen

von

Wilh. Fiedler.

Gelegentlich der zweiten Auflage meines Werkes »Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage« (Leipzig 1875) fiel es mir auf, dass die Behandlung der Symmetrie in den Lehrbüchern der Geometrie eine wesentlich unvollständige sei, selbst in solchen von neuerem Datum, deren Verfasser sich die Aufgabe gestellt haben, in den Elementen mit Rücksicht auf neuere Anschauungen und Methoden zu reformiren. Ich hatte mehrfachen Anlass, mich brieflich darüber zu äussern, denn das Thema der Reform liegt jetzt in der Luft, und halte es für zweckmässig, die Sache hier in aller Kürze darzulegen. Mit diesem Punkte hängt ja viel änderes zusammen.

Nach der Natur meiner Untersuchungen erhielt ich die Symmetrieen überall als spezielle Formen der involutorischen Collineation oder der Involution gleichartiger Gebilde; also die Symmetrie in der Punktreihe als den Fall der Involution von zwei Reihen, wo einer der Doppelpunkte der unendlich ferne Punkt derselben ist (p. 63), und die Symmetrie im Strahlbüschel respective Ebenenbüschel als denjenigen Fall der Involution solcher Gebilde, wo die Doppelstrahlen respective Doppelebenen rechtwinklig zu einander sind (p. 111); die Symmetrie im ebenen System in den beiden Formen der Specialisirung der involutorischen Collineation, wo die Axe respective das Centrum der Collineation unendlich fern liegen (p. 66, 67) als Symmetrie in Bezug auf ein Centrum und Symmetrie in Bezug auf eine Axe — insbesondere orthogonale Symmetrie in Bezug auf eine Axe, wenn die Richtung des Centrums zur Axe rechtwinklig ist — die vollkommenere Axen-Symmetrie, weil nicht bloss die Reihen auf den Strahlen durch das Centrum, sondern auch die Büschel aus den Punkten der Axe symmetrisch sind; die Symmetrie im Strahlen- und Ebenen-Bündel als Involution desselben in der speciellen Form, wo der sich selbst entsprechende Einzelstrahl, die Scheitelkante des Büschels der sich selbst entsprechenden Ebenen, rechtwinklig auf der sich selbst entsprechenden Ebene, der Ebene des Büschels der sich selbst entsprechenden Strahlen, steht; die Symmetrie im räumlichen System zuerst in den Specialisirungen der centrischen Involution collinearer Räume (p. 146, 696), wo die Collineationsebene respective das Collineationscentrum unendlich fern ist, im letztern Falle insbesondere in der zur Collineationsebene normalen Richtung, weil dann nicht nur die Reihen in den Strahlen nach dem Centrum, sondern auch die Ebenenbüschel um Strahlen in der Collineationsebene und die Strahlenbüschel in Ebenen nach dem Centrum aus Punkten ihres Schnittes mit der Collineationsebene symmetrisch sind; — die beiden Formen der Symmetrie in Bezug auf ein Centrum und in Bezug auf eine Ebene; endlich die Symmetrie räumlicher Systeme in Bezug auf eine Axe, wie sie die Flächen zweiten Grades in Bezug zu jeder ihrer Axen, die Rotationsflächen in Bezug auf die Rotationsaxe zeigen (p. 357 f., p. 441 f.) als derjenige Specialfall der geschaarten Involution collinearer Räume (p. 698), wo die eine der beiden sich selbst entsprechenden Geraden unendlich fern und insbesondere wo sie in den Normalebenen der andern liegt, weil in diesem Falle nicht nur die Systeme in allen diesen Ebenen centrisch symmetrisch sind, sondern auch alle die Systeme in den durch die sich selbst entsprechende Gerade im endlichen Raum gehenden Ebenen orthogonale Axensymmetrie besitzen, etc. Es sind Specialformen dieser allgemeinen Beziehungen, welche fast mit Nothwendigkeit zu diesen selbst hinleiten oder, wie man wenigstens unter dem darstellend geometrischen Gesichtspunkt sagen muss, Specialformen, die von den allgemeinen nicht wesentlich verschieden sind. Eben darum aber ist ihr naturgemässes Hervortreten in den Elementen der Geometrie von grosser Wichtigkeit für die Entwickelung. Und da diess für alle in gleicher Weise stattfindet, wie ich sogleich des Näheren angeben will, so war es um so unerwarteter, dass die Schriften über Elementargeometrie, welche mir bekannt sind, die eine Art der Symmetrie räumlicher Figuren, die in Bezug auf eine Axe, vollständig übergehen.

In der That, der Weg zur elementaren Ableitung dieser Beziehungen ist der wesentlich gleiche für alle Fälle; ich will ihn, obwohl diess das systematisch Richtige wäre, nicht durch sie alle hindurch verfolgen, sondern nur bei den Figuren in der Ebene und bei denen im Raum von drei Dimensionen im Anschluss an die übliche Auffassung erläutern, im Anschluss nämlich an die Bestimmung und Construction geradliniger Figuren in der Ebene und ebenflächiger Körper im Raum aus der hinreichenden Anzahl nach Grösse und Aufeinanderfolge gegebener Bestimmungsstücke. Ist aus denselben ein Polygon $A\,B\,C\,D\ldots$ hergestellt, so werde es ein zweites Mal in $A'\,B'\,C'\,D'\ldots$ aus denselben Stücken in derselben Ordnung gebildet. Dann können beide Polygone auf viererlei Weise so in dieselbe Ebene gelegt werden, dass die begrenzten Geraden $A\,B$, $A'\,B'$ einander decken; erstens nämlich a) in deckender Lage beider Figuren, so dass die Paare entsprechender Punkte $A\,A'$, $B\,B'$, $C\,C'$, $D\,D'$, etc. sämmtlich vereinigt liegen; sodann b) einer Drehung der einen Figur um eine der Seiten, z. B. $A'\,B'$ um 180° entsprechend, in axensymmetrischer Lage mit $A\,B$ ($A'\,B'$) als Axe, so dass die entsprechenden Punkt-Paare $C\,C'$, $D\,D'$ etc. je in einerlei Normale zur Axe und gleichweit entfernt von ihr auf verschiedenen Seiten liegen; ferner c) einer Drehung der einen der beiden Figuren aus der Deckungslage a) um die senkrechte Halbirungslinie von $A\,B$ und um 180° entsprechend in axensymmetrischer Lage mit dieser senkrechten Halbirungslinie als Axe, und endlich d) einer Drehung der einen der beiden Figuren aus der axensymmetrischen Lage a) um dieselbe senkrechte Halbirungslinie von AB und um 180° entsprechend in centrisch symmetrischer Lage mit dem Mittelpunkt der Strecke AB ($B'A'$) als Centrum. Andere Vereinigungen der Figuren mit Deckung entsprechender Seiten und daher andre Symmetrielagen ebener Figuren sind offenbar unmöglich.

Für räumliche Systeme gibt es solcher Symmetrielagen dreierlei, wie aus folgenden Andeutungen erhellen wird; es wäre nicht am Orte, hier ausführlicher darüber zu sein.

Natürlich liesse sich an Stelle der geschlossenen Raumform, die ich benutze, die Ecke oder das Bündel gebrauchen und dadurch erinnern, dass die sorgfältige Betrachtung der Symmetrie im Bündel schon die Frage erledigt. Aber das Bündel ist nicht elementar (wenn schon die Ecke), es will in die Scheidung von Planimetrie und Stereometrie nicht passen. Die Frage: Ist diese Scheidung pädagogisch nothwendig? scheint mir aber eben die Cardinalfrage der Reform zu sein.

Man denke sich also das Netz eines Polyeders gezeichnet, copire es in drei congruenten Exemplaren und bilde sodann aus ihnen das Modell des Polyeders zweimal so, dass dieselbe obere Seite der Ebene der Netze zur Aussenfläche der Polyeder I, II wird, das dritte Mal (III) aber so, dass die andere untere Seite der Netzebene Aussenfläche wird. Die entsprechenden Ecken seien mit denselben Buchstaben AA', BB', CC' etc. bezeichnet und zur leichtern Verfolgung der möglichen Zusammenlegungen sei eine der Flächen $ABCD$ der Polyeder ein Rechteck und diese werde mit der entsprechenden Fläche $A'B'C'D'$ zunächst a) zur Deckung der Körper I, II zusammengelegt. Aus dieser Lage a) drehe man den Körper II um je 180° um die drei Axen, deren zwei erste respective $A'B'$,

$C'D'$; $B'C'$, $D'A'$ senkrecht halbiren, und deren dritte im Mittelpunkt von $A'B'C'D'$ auf seiner Ebene senkrecht steht, in die Lagen b), c), d); man erhält Axensymmetrie in Bezug auf die jedesmalige Drehungsaxe als Axe.

Die Körper I und III können nicht zur Deckung gebracht werden, sondern ihre einfachste Aneinanderlegung mit Deckung der Punktpaare AA', BB', CC', DD' ist die Lage a*) der Symmetrie in Beziehung auf die Ebene $ABCD$; von dieser ausgehend drehen wir wieder das Polyeder III um die drei Axen b, c, d des Rechtecks um 180° und erhalten in der Lage b*) und in der Lage c*) Symmetrie in Bezug auf die Ebenen respective, welche die Gegenseitenpaare AB, CD; BC, DA des Rechtecks senkrecht halbiren, in der Lage d*) aber Symmetrie in Bezug auf den Mittelpunkt des Rechtecks $ABCD$ als Centrum. Man sieht leicht, dass andere Symmetrielagen der Polyeder nicht möglich sind, und damit auch, dass es Symmetrien räumlicher Figuren ausser nach diesen drei Typen nicht geben kann.

Dass dabei die Zusammenlegung der Figuren mit einem Paar entsprechender Seiten respective Flächen, welche dadurch zur Axe oder Ebene der Symmetrie werden, respektive das Centrum oder die Axe derselben enthalten, nur zur Vereinfachung der Vorstellung angenommen, aber keineswegs nothwendig ist, sieht man sofort; man wird auch leicht finden, dass die Vorausschickung der symmetrischen Vereinigung von begrenzten Strecken, von Linienwinkeln und von Flächenwinkeln und die Mitinbetrachtnahme der Symmetrieverhältnisse der Gebilde zweiter Stufe um einen Punkt herum oder der Bündel die Beweiskraft der einfachen Anschauungsoperationen, die ich vorgeführt habe, noch erhöht; man wird sich dann auch den grossen Vortheil sichern, der für den Lehrer in diesem Aufbau des Zusammengesetzten aus dem Einfachen liegt und die Symmetrien der ebenen Systeme und Bündel in den symmetrischen Räumen, sowie die der Reihen und Büschel in jenen sorgfältig erörtern. Und alles dies erfordert, wie man sieht, keineswegs die Einführung anderer Anschauungen der modernen Geometrie als höchstens die consequentere Behandlung — nicht etwa Einführung! — der Elementargebilde erster, zweiter und dritter Stufe, gegen welche gewiss nichts eingewendet werden kann; und es geht selbst ohne diese, wenn sich auch natürlich ihre Einführung wie überall belohnt. Auch die charakteristischen Eigenschaften der Symmetrielagen ebener wie räumlicher Systeme lassen sich ohne irgend welche Neuerungen und also selbst mit Vermeidung der Erwähnung der unendlich fernen Elemente — bekanntlich des Abscheu's mancher Pädagogen — klar legen und aussprechen.

Die Einführung der perspectivischen Raumansicht bietet allerdings den erheblichen Vortheil, dass man erkennt, wie in der Ebene die centrische Symmetrie und die Axensymmetrie nicht wesentlich verschieden sind, im Raume ebenso die centrische und die Symmetrie in Bezug auf eine Ebene, weil in jeder respective eine Axe und ein Centrum, eine Symmetrieebene und ein Centrum vorhanden ist, und dass die Axensymmetrie im Raum nicht von einer Axe sondern von zwei Axen in ganz gleicher Weise regiert wird.

Und wenn man, wie sehr wohl thunlich, den Anfänger früh auf das Princip der Dualität als das Symmetriegesetz des Systems unserer geometrischen Kenntnisse aufmerksam gemacht hat, so bieten dann freilich die charakteristischen Relationen entsprechender Punkte, Linien und Ebenen in den verschiedenen Formen der Symmetrie das reichhaltigste Beispiel für die Geltung jenes Princips dar, wenn man sie nur correct und vollständig aussprechen will.

Sie lauten für die Symmetrie mit Centrum und Ebene im Raum wie folgt, wenn wir den Ausdruck harmonische Trennung für Halbirung mitgebrauchen:

Je zwei entsprechende Punkte liegen in demselben Strahl durch das Symmetrie-Centrum und sind von diesem durch die Symmetrie-Ebene harmonisch getrennt.

Je zwei entsprechende Ebenen gehen durch denselben Strahl in der Symmetrie-Ebene und sind von dieser durch das Symmetrie-Centrum harmonisch getrennt.

Je zwei entsprechende Gerade liegen in einer Ebene durch das Symmetrie-Centrum und gehen durch einen Punkt der Symmetrie-Ebene und werden durch jenes und durch diese harmonisch getrennt.

Und für die Symmetrie mit zwei Axen:

Je zwei entsprechende Punkte liegen in einer Transversale der Symmetrie-Axen und werden durch diese harmonisch getrennt.

Je zwei entsprechende Ebenen gehen durch eine Transversale der Symmetrie-Axen und werden durch diese harmonisch getrennt.

Je zwei entsprechende Gerade haben mit den Symmetrieaxen unendlich viele gemeinschaftliche Transversalen und werden in diesen und an diesen durch die Schnittpunkte und die Verbindungsebenen mit jenen harmonisch getrennt.

Und was mehr ist, zugleich ergibt sich aus der Dualität zwischen Punkt und gerader Linie in der Ebene, zwischen Strahl und Ebene im Bündel, zwischen Punkt und Ebene und daher auch zwischen der geraden Linie als Reihe und der geraden Linie als Ebenenbüschel im Raum die Einsicht, dass die gefundenen Typen der Symmetrie die sämmtlichen dualen Elementenpaare als die Paare der sich selbst entsprechenden Elemente darbieten, und damit ein neuer immerhin nur für fähigere Köpfe einleuchtender Beweis für die Vollständigkeit der Reihe jener Typen.

Dass dann für solche fähigere Köpfe die Einsicht in die sämmtlichen Formen der collinearen Involution ebenso nahe liegt, als sie durchschlagend das weite Gebiet der Raumanschauungen erleuchten wird, scheint nicht zweifelhaft.

Aber gewiss ist doch, dass der also vernachlässigte Typus der Axensymmetrie im Raum in der Form der Rotationssymmetrie durch die Fülle alltäglicher Anschauungen ganz ebenso nahe lag wie die übrigen Typen. Die Symmetrien ungleichartiger Gebilde oder der Reciprocität d. h. das Orthogonalsystem im Bündel und im Büschel mit Nullkugel respective Nullkreis als Directrix will ich hier nicht erörtern*), sondern es bei der Beschränkung auf den elementaren Begriff der Symmetrie, der nur die alltäglichen Anschauungen formulirt, bewenden lassen. —

Aber da ich mehrfach auf mein Buch zu verweisen hatte, so will ich mir erlauben, zu demselben einige Bemerkungen zu machen, die nützlich sein mögen, wenn sie auch nicht alle unmittelbar oder nothwendig mit dem Vorigen zusammenhängen.

Ich habe der Abneigung mancher Pädagogen gegen die perspectivische Raumansicht gedacht, und da Grund vorhanden ist zu der Annahme, dass manchem unter ihnen die Gauss'sche Ebene der complexen Zahlen mit ihrem einen unendlich fernen Punkt als Schwierigkeit

*) Dass diese symmetrische Reciprocität die Metrik der Elementargeometrie liefert, ist bekannt. (Vergl. das citirte Werk § 161, p. 661).

entgegensteht, so erlaube ich mir die Bemerkung, dass sachlich wie historisch zu erkennen ist, die Gauss'sche Ebene sei keine Ebene sondern eine Kugel, oder sie sei das Abbild der Kugel durch reciproke Radien oder stereographische Projection, d. h. in einer Transformation zweiten Grades, bei welcher der Anfangspunkt der eine reelle Ausnahmepunkt ist, d. h. ein Punkt ohne eindeutiges Entsprechen. Diess ist in der beregten Ausdrucksweise vernachlässigt. Die Differenz zwischen der Zahl der reellen Punkte der Ebene ($u^2 - u + 1$) und der Menge der imaginären und der reellen Zahlen in der Zahlenreihe ($u^2 - 2u + 2$) wird eben gerade ausgeglichen durch die Festsetzung, dass die Ebene einen unendlich fernen Punkt besitze, statt der u, die die perspective Raumansicht ihr beilegen muss, und das entschied für die Gauss'sche Auffassung; selbst wenn man aber ihren Ausdruck ohne weitere Erläuterung für statthaft halten will, so wird man nicht übersehen dürfen, dass hier die Anschauungsform der Geometrie für Zwecke verwandt wird, die ihr fremd sind, und dass ein solcher Gebrauch nicht Gesetze für die Geometrie machen kann, wenn er auch vielleicht eines oder das andere ihrer Gesetze für seinen Zweck modificiren darf. Die Lehre von den imaginären Elementen des Raumes gab mir Anlass, diess klar zu stellen (p. 508 f.) wie es immer in meinen Vorlesungen geschehen ist. —

Ich will ferner erwähnen, dass die Untersuchungen der Geometrie der Lage mit Nothwendigkeit auf die eindeutigen Transformationen zweiten Grades führen, ebenso bei der Erörterung der ineinanderliegenden Gebilde zweiter Stufe (p. 652), wie bei denjenigen dritter Stufe (p. 707), wo dann der tetraedrale Complex die Punkte des Raumes abbildet, seine Regelschaaren ihre geraden Reihen repräsentiren etc., natürlich auch nicht ausnahmslos eindeutig; und nicht bloss wie bei der Magnus-Steiner'schen Verwandtschaft bei der Vereinigung von zwei Polarsystemen in derselben Ebene oder, was ununtersucht geblieben, im Raume.

Mir scheint speciell das Auftreten des tetraedralen Complexes bei diesen Anlässen ein bedeutungsvoller Fingerzeig dahin, dass die Abbildung auf den Complex der rechte Ausgangspunkt der Theorie der birationalen Transformationen im Raum sei. Mit dem Beispiele des linearen Complexes, mit dem ich das Kap. VIII der neuen Ausgabe der Analyt. Geometrie des Raumes nach G. Salmon (Bd. II, p. 448) 1874 begann, ist das Gebiet solcher Entwickelungen eröffnet aber nicht erschöpft. Ich suche in dieser Richtung die Einheit der birationalen Raumtransformationen. —

Weil die Constructionen der Geometrie der Lage wie der darstellenden Geometrie zumeist auf die der projectivischen Reihen und Büschel in derselben Ebene zurückkommen, so ist die bequeme praktische Gestaltung der Letztern von besonderem Gebrauchswerth; ich habe dieser Entwickelung Sorgfalt gewidmet (§§ 17, 18 und §§ 28, 27 meines Buches), aber einer metrischen Specialisirung nicht ausdrücklich Erwähnung gethan, die das Grundprincip der Einführung perspectivischer Büschel oder Reihen über und aus den projectivischen Reihen und Büscheln gestattet.

Man kann im ersten Falle die perspectivische Axe zur unendlich fernen Geraden machen, so dass die beiden zur Construction benutzten perspectivischen Büschel gleiche und parallele Büschel sind, und man kann im andern Falle das perspectivische Centrum zu einem unendlich fernen Punkt machen, so dass die zur Construction dienenden Reihen speciell ähnliche Reihen sind. Jenes erreicht man bequem mittelst der Gegenpunkte Q', R der Reihen t', t, man zieht die Geraden $Q'Q$, RR' d. h. durch jeden Gegenpunkt den Parallelstrahl zur andern Reihe; die Schnittpunkte A'_1, A_1 dieser Geraden mit der Verbindungslinie AA' von irgend zwei entsprechenden Punkten der Reihen — und ein Paar ausser den Gegenpunkten ist nothwendig bekannt — sind Scheitel gleicher und paralleler Büschel über den Reihen t', t, d. h. jedes Paar paralleler Geraden aus A'_1, A_1 schneidet t' und t in zwei entsprechenden Punkten X', X derselben. Oder im Sinne von p. 95 die eine Diagonale des Brianchon'schen Sechsecks ist unendlich fern und die parallelen Strahlen aus A_1, A_1' sind die beiden andern. (Im Falle der perspectivischen Lage gibt jeder Strahl durch den Schnittpunkt der Reihen die Scheitel solcher Büschel.)

Das andere erreicht man, indem man vom Schnittpunkt zweier entsprechenden Strahlen Transversalen der Büschel T, T' parallel zu zwei andern entsprechenden Strahlen derselben zieht; die Verbindungslinie ihrer Schnitte mit den Strahlen des unbetheiligten dritten Paares gegebener Strahlen gibt durch ihre Richtung das perspectivische Centrum. Es hat einiges Interesse, diejenigen Strahlenpaare der erzeugenden Büschel aufzusuchen, für deren Parallelen die proportionalen perspectivischen Reihen einander gleich werden.

Man kann aber auch speziell die entsprechenden Rechtwinkelpaare q, r und q', r' der Büschel T, T' ausser in dieser Weise verwenden wie folgt: Ist a, a' das dritte gegebene Paar, so schneide man mit der Entfernung von ihrem Schnittpunkte A bis T die Strahlen q, r und ziehe die durch A gehende Verbindungslinie der Schnittpunkte;

und man schneide ebenso mit der Länge $A\,T''$ die Strahlen q', r' und ziehe die durch A gehende Verbindungslinie. Diese Linien sind offenbar die Träger perspectivisch ähnlicher Reihen, die aus den gegebenen Büscheln geschnitten werden, und man sieht sofort, dass sie zu entsprechenden Strahlen der Büschel respective parallel sind. Auch ergibt sich hieraus, dass es auf dem Kegelschnitt, welchen die projectivischen Büschel erzeugen, zwei Punkte A_1, A_2 gibt, welche an Stelle von A benutzt, gleiche perspectivische Reihen aus den erzeugenden Büscheln bilden lassen.

Natürlich können diese Constructionen auch in zusammengesetzten Aufgaben von Nutzen sein, z. B. wenn verlangt wird, die Collineation von zwei Ebenen aus zwei Paaren entsprechender Geraden a, a'; b, b' und den Gegenaxen r, q' zu construiren; man findet zu x die entsprechende Gerade x' mittelst der in a, a' und b, b' gebildeten projectivischen Reihen und diese durch die gleichen und parallelen Büschel aus Scheiteln in der Geraden $(a\,b,\ a'\,b')$. —

In § 39, 3 ist die Frage nach den Characteristiken Δ_A der centrisch-collinearen Systeme in entsprechenden Ebenen $\mathbf{A}, \mathbf{A}_1$ der Centralcollineation im Raum kurz erörtert, aber die Angabe daselbst bedarf einer Ergänzung. Ist b die Breite der Originalebene $\mathbf{A}$ und b_1 die Breite ihres Bildes $\mathbf{A}_1$ zwischen der Collineationsebene $\mathbf{S}$ und der Gegenebene $\mathbf{Q}_1$ und ist Δ die Charakteristik der Raumcollineation selbst, so ist

$$\Delta : \Delta_A = b : b = \sin \alpha : \sin \alpha_1,$$

wenn α und α_1 die Winkel bezeichnen, welche die Ebenen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}_1$ mit der Collineationsebene einschliessen. Man sieht die Charakteristiken Δ_A sind grösser oder kleiner als Δ, welches den projicierenden Ebenen zukommt; für jede bestimmte Neigung α der Originalebene $\mathbf{A}$ gegen die Collineationsebene von ∞ bis Δ

abnehmend, während diese von unendlicher Entfernung bis zum Centrum heran rückt; sodann weiter abnehmend bis zu derjenigen Ebene, deren Bild zur Collineationsebene rechtwinklig ist mit $\Delta_A = \Delta \sin \alpha$; endlich von da ab wieder zunehmend — durch Δ hindurch bis unendlich. Es ist von Interesse, diese Veränderlichkeit innerhalb eines Reliefs, also des Sehkegels, zu untersuchen. Für Ebenen, welche zur Collineationsebene parallel sind, wird Δ_A zum Aehnlichkeitsverhältniss und erhält insbesondere den Werth $\Delta_A = -1$ für zwei Ebenen **A**, $\mathbf{A}_1$, welche so liegen, dass die Gegenebene **R** die Mitte zwischen der Collineationsebene **S** und dem Original **A**, die Gegenebene $\mathbf{Q}_1$ aber die Mitte zwischen **S** und $\mathbf{A}_1$ bildet — wie diess am angeführten Orte (p. 139, unter 4) angegeben ist; es sind die Ebenen in centrischer Symmetrie. Und diese Relation findet natürlich ganz ebenso statt in der centrischen Collineation ebener Systeme für zwei entsprechende Gerade a, a' mit gleichen Reihen von entgegengesetztem Sinn; dieselben werden in der räumlichen Lage bei der Centralprojection einer Ebene durch die projicierende Ebene ausgeschnitten, welche der Ebene der beiden Gegenaxen $q' r$ parallel ist. Die vorher angegebene Lagenbeziehung von s, q', r, a, a' ist die Erscheinung der bezüglichen harmonischen Relation im Ebenenbüschel. Im Fall der Involution vereinigen sich diese Ebenen respective Geraden in eine durch das Centrum gehende, im Fall der centrischen Symmetrie werden sie unbestimmt. —

Eine andere kleine Ergänzung, an die mich diess erinnert, fordert § 134, 11 meines Buches, wo der Schlusssatz ausgefallen ist, wegen dessen das Beispiel dasteht. Man hat gezeigt, dass die Doppelelemente F_1, F_2 vereinigter projectivischer Gebilde erster Stufe von den Paaren

AA', BB' mit AB', $A'B$ drei Paare einer Involution bilden. Also folgt

$$(F_1\, F_2\, A\, A') \barwedge (F_2\, F_1\, B'\, B) \barwedge (F_1\, F_2\, B\, B'),$$

d. h. man hat die Constanz des Doppelverhältnisses erwiesen, welches die sich selbst entsprechenden Elemente mit irgend einem Paare bilden, oder der Charakteristik Δ der Collineation. (§ 19). Ein so fundamentaler Begriff musste in voller unbestreitbarer Allgemeinheit der Begründung nachgewiesen werden, und das konnte nur an dieser Stelle geschehen. —

Eine absichtliche Unterdrückung ferner (§ 159 p. 647) erscheint mir jetzt nicht mehr so zweifellos zweckmässig, nämlich die der näheren Erörterung der Affinität und der Aehnlichkeit als Specialfall der Collineation in allgemeiner d. h. nicht centrischer Lage. Die bezüglichen Betrachtungen bieten allerdings keine Schwierigkeit dar, aber es wäre doch vielleicht besser gewesen, sie nicht ganz dem Leser zu überlassen, wie sie denn auch in meinen Vorlesungen immer gegeben werden. Ihr Platz wäre a. a. O. und für die Gebilde dritter Stufe in § 166. Ihre Aufnahme hätte auch Anlass gegeben, der Eigenthümlichkeiten zu gedenken, welche die Erzeugnisse solcher spezieller Gebilde, also die bezüglichen Congruenzen und Complexe und entwickelbaren Flächen dritter Classe besitzen — eine wesentliche Bereicherung des Uebungsmaterials. Ich denke, eine neue Auflage muss den Raum auch dafür bieten. —

Historisch ist es von einigem Interesse, dass nach neuerlichem Nachweis (»London Math. Society« 1875) das Buch eines sonst unbekannten Autors G. Walker »Conic Sections« (Nottingham 1794) einen ziemlich allgemeinen Specialfall der Collineation von zwei ebenen Systemen behandelt. Sind O und O' zwei feste Punkte und o, o' zwei feste Gerade, so sind die beiden letzten Gegenecken eines Vierseits correspondirende Punkte P, P', welches zwei Gegenecken in O, O' und die beiden andern in o, o' hat; W. hat den Specialfall, wo die eine der beiden festen Geraden o' unendlich fern ist. Man sieht leicht, dass der Schnittpunkt von o mit o' ein sich selbst entsprechender Punkt und dass die Gerade $O\,O'$ die gegenüberliegende sich selbst entsprechende Gerade ist, deren Punktepaare sich involutorisch entsprechen, so dass die Doppelpunkte dieser Involution die beiden andern sich selbst entsprechenden Punkte sind. Das ist Collineation vor Poncelet und Möbius. W. hat seine Transformation besonders auf Winkelrelationen in der Theorie der Kegelschnitte angewendet, und manche Fragen, wie z. B. die nach der Verwandlung eines Vierecks in ein Quadrat verrathen den darstellend geometrischen Gesichtspunkt.

Dass derselbe nicht erst durch Monge's »Géométrie descriptive« wieder erinnert worden ist, zeigen vielleicht schon die literar-historischen Noten, welche ich meinem Werke beigefügt habe, zur Genüge. Monge hat die Bewunderung, die er vollauf verdient, gerade in dem Gebiet, das man seine Schöpfung par excellence nannte und das weder die eigenste noch auch die wichtigste seiner Schöpfungen ist, also vor allem in der darstellenden Geometrie viel zu sehr in der Form der unbedingten Nachahmung erfahren und diese ist in jedem Betracht die schlimmste der Huldigungen, die man einem grossen Manne widmen kann. Das bezeugt nicht bloss die descriptive Geometrie selbst, sondern auch der Einfluss von Monge's Auffassung auf ihre practischen Dependenzen, wie Schattenconstruction, Stereotomie, etc. M. de la Gournerie hat mit vollem Recht vor Kurzem (Liouville's

»Journal de Mathém.« 2. sér. t. XIX. p. 113—156) hervorgehoben, dass die glänzende Idee der Krümmungslinien und ihrer entwickelbaren Normalenflächen weit davon entfernt ist, die Schwierigkeiten des Gewölbesteinschnittes zu erledigen, ja dass sie nicht einmal den statischen Bedingungen entspricht, welchen dieselben unterliegen. Alle Praxis hat eben etwas von der Complication der Natur; eine Menge von Bedingungen fordern mehr oder weniger gebieterisch Erfüllung und es ist oft genug unmöglich, allen zugleich zu genügen. Das Gebiet der darstellenden Geometrie an der Hochschule ist die Cultur und Durchbildung der Raumanschauung und sie dient der Praxis um so besser, je mehr sie sich auf diess Gebiet beschränkt und je gründlicher und tiefer sie dasselbe behandelt.

Ueber diejenige Minimalfläche, welche die Neil'sche Parabel zur ebenen geodätischen Linie hat.

Von

Dr. **Lebrecht Henneberg.**

Auf Seite 63 meiner Dissertation (»Ueber solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur geodätischen Linie haben«; Zürich 1875) ist gezeigt worden, dass auf der Ossian Bonnet'schen Biegungsfläche der Minimalfläche, welche die Neil'sche Parabel zur ebenen geodätischen Linie hat, eine Astroide als ebene geodätische