Bestimmung einiger speziellen Minimalflächen.

von

Dr. Albin Herzog.

Die vorliegende Arbeit behandelt ein Problem, welches im Jahre 1872 an der mathematischen Section der VI. Abtheilung des eidgenössischen Polytechnikums als Preisaufgabe gestellt und im Sommersemester 1874 von Herrn Dr. Lebrecht Henneberg und dem Verfasser gelöst wurde.

Durch Anwendung einer neuen Methode der allgemeinen Lösung jener Aufgabe, welche sich aus einigen [illegible]rrn Prof. Dr. H. A. Schwarz inzwischen in der [illegible]ahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zü[illegible]röffentlichten Formeln ergibt, ist es mir gelungen, [illegible] damals gelieferte Arbeit in einigen Punkten zu ver[illegible]llständigen, namentlich die behandelten Flächen hinsichtlich ihrer geometrischen Eigenschaften noch eingehender zu untersuchen.

In den ersten Abschnitten der nachfolgenden Untersuchung wird die Lösung der gestellten Aufgabe nach drei verschiedenen Methoden allgemein entwickelt und alsdann in den folgenden Abschnitten an einigen speciellen Fällen durchgeführt.

Die gestellte Preisaufgabe hatte folgenden Wortlaut: „*Eine Minimalfläche ist durch die Bedingung analytisch zu bestimmen, dass eine vorgeschriebene ebene Curve eine kürzeste Linie derselben sein soll.*“

Die Lehre von den Minimalflächen steht in inniger Beziehung zu der Theorie der analytischen Functionen. Der Zusammenhang, der zwischen den beiden Gebieten besteht, liegt ausgesprochen in dem von Herrn Prof. Weierstrass aufgestellten Satze, dass zu jeder Function complexen Argumentes eine bestimmte Minimalfläche gehört und umgekehrt. (Weierstrass: Ueber die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist; Monatsbericht der Berliner Akademie der Wissenschaften vom October 1866, pag. 612—619.)

Mit diesem Satze ist für die Auffindung von speciellen Minimalflächen ein unbegrenztes Feld eröffnet; derselbe bildet auch den Ausgangspunkt bei der nachfolgenden Untersuchung. Bezeichnet nämlich $\mathfrak{F}$ [illegible] Function des complexen Argumentes s und wird [illegible] ein vorgesetztes $\mathfrak{R}$ angedeutet, dass der reelle Th[illegible] darauf folgenden complexen Grösse zu nehmen sei, so sin[illegible]

$$x = \mathfrak{R} \int_{s_0}^{s} (1 - s^2)\, \mathfrak{F}(s)\, ds,$$

$$y = \mathfrak{R} \int_{s_0}^{s} i\,(1 + s^2)\, \mathfrak{F}(s)\, ds,$$

$$z = \mathfrak{R} \int_{s_0}^{s} 2\, s\, \mathfrak{F}(s)\, ds$$

die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes einer durch die Function $\mathfrak{F}(s)$ bestimmten Minimalfläche. (Von der Bedeutung der complexen Variabeln s und der Function $\mathfrak{F}(s)$ wird später die Rede sein.)

Gelingt es nun im vorliegenden Falle, die Function $\mathfrak{F}(s)$ aus den gegebenen Bedingungen zu bestimmen, so ist die Aufgabe gelöst.

Allgemeine Lösung.

Bestimmung der Function $\mathfrak{F}(s)$.

I.

Die gestellte Aufgabe verlangt die Bestimmung einer Minimalfläche, welche eine gegebene ebene Curve als kürzeste Linie enthält.

Eine kürzeste Linie auf einer krummen Fläche ist durch die Bedingung charakterisirt, dass die Hauptnormale in jedem Punkte der Curve mit der Normale der Fläche in demselben zusammenfällt. Da nun im vorliegenden Falle die kürzeste Linie eine ebene Curve ist, so liegen die Hauptnormalen ihrer sämmtlichen Punkte in der Ebene der Curve und schneiden sich also, d. h. die kürzeste Linie ist zugleich eine Krümmungslinie der Fläche.

Die Gleichung der Curve, bezogen auf zwei zu einander senkrechte Axen, sei

$$y = f(x).$$

Jede Minimalfläche wird durch parallele Normalen auf die Oberfläche einer Kugel vom Radius 1 conform abgebildet. Lässt man den Mittelpunkt der letztern zusammenfallen mit dem Coordinatenanfangspunkt, so werden bei dieser Abbildung den Punkten der Curve $y = f(x)$ auf der Kugel die Punkte des in der XY-Ebene liegenden grössten Kreises entsprechen.

Durch stereographische Projection der Kugeloberfläche vom Punkte $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 1$ aus auf die Aequatorebene $Z = 0$ enspricht jedem Punkte X, Y, Z der Kugel ein Punkt in der Ebene $Z = 0$, welcher die complexe Grösse s geometrisch darstellt. Bei dieser Projection entspricht der oben erwähnte Kreis sich selbst, d. h. dem in der Ebene s liegenden Einheitskreise. Wenn also ein Punkt der Minimalfläche die gegebene ebene Curve durchläuft, so bewegt sich sein entsprechender Punkt in der Ebene s auf dem Einheitskreis.

Bezeichnet φ den Winkel, welchen die Normale in einem gegebenen Punkte der Curve mit der positiven X-Axe bildet, so ist

$$\frac{dy}{dx} = -\, cotg\, \varphi.$$

Dieser Winkel φ bestimmt denjenigen Punkt des Einheitskreises, welcher dem angenommenen Punkte der Curve entspricht.

Nun gestattet jede Minimalfläche noch eine zweite conforme ebene Abbildung, bei welcher den beiden Schaaren von Krümmungslinien zwei Schaaren von parallelen Geraden $p =$ const., $q =$ const. entsprechen; das Vergrösserungsverhältniss bei dieser Abbildung ist der Quadratwurzel aus der Länge des Hauptkrümmungsradius in dem betrachteten Punkte der Minimalfläche umgekehrt proportional. Da nun im vorliegenden Falle die gegebene geodätische Linie zugleich eine Krümmungslinie der Fläche ist, so wird sie sich bei der Abbildung auf die Ebene, deren Punkte die complexe Grösse $p + qi$ geometrisch darstellen, verwandeln in eine Gerade einer der beiden Schaaren $p =$ const., $q =$ const. und zwar kann dieselbe beliebig gewählt werden. Der Einfachheit wegen soll vorausgesetzt werden, es sei die Gerade $q = 0$, also die reelle Axe. Ausserdem kann man, indem man noch über den Massstab passend verfügt, einen beliebigen Punkt der Curve $y = f(x)$ annehmen und festsetzen, er soll dem Punkte $p = 0$, $q = 0$ der Geraden $q = 0$ entsprechen. Dann aber ist zu jedem Punkte der Curve der entsprechende Punkt in der Geraden $q = 0$ bestimmt. Bezeichnet man nämlich mit dl das Linienelement der Minimalfläche, mit $d\lambda$ das Linienelement in der Ebene des complexen Argumentes $p + qi$ und mit ϱ den positiven Hauptkrümmungsradius in dem betrachteten Punkte der Fläche, dann ist

$$\frac{d\lambda}{dl} = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}.$$

Längs der Geraden stimmt aber $d\lambda$ überein mit dp, weil dort $q = 0$ ist; es ist also auch

$$\frac{dp}{dl} = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}.$$

Das Längenelement der geodätischen Linie ist:

$$dl = \varrho d\varphi,$$

wo ϱ den Krümmungsradius der Curve bezeichnet, und daraus folgt

$$\frac{dp}{\varrho d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{d\varphi} = \sqrt{\varrho}. \qquad 1)$$

Für die Punkte des Einheitskreises, welcher bei der Abbildung auf die Kugel der Curve $y = f(x)$ entspricht, ist

$$s = e^{i\varphi}, \text{ also}$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = ie^{i\varphi} = is. \qquad 2)$$

Durch Division der Gleichungen 1) und 2) ergibt sich

$$\frac{dp}{ds} = \frac{\sqrt{\varrho}}{is} \quad \text{und somit:}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dp}{ds}\right)^2 = \mathfrak{F}(s) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\varrho}{s^2}.$$

$\mathfrak{F}(s)$ ist eine Function des complexen Argumentes s, welche erklärt ist für sämmtliche Punkte einer analytischen Linie, nämlich des Einheitskreises. Dieselbe lässt sich daher, einem bekannten Satze der Functionentheorie zufolge, nur auf eine einzige Weise analytisch fortsetzen.

Um jedoch die mit der Bildung von x, y, z verbundenen Integrationen ausführen zu können, ist es nöthig, dass man in jedem speciellen Falle ϱ als analytische Function von s auszudrücken im Stande sei.

Aus der gestellten Bedingung, dass die gegebene geodätische Linie der Fläche eine ebene Curve sein soll, ergibt sich, dass die Ebene der Curve eine Symmetrieebene der Fläche sein muss, indem durch die Stellung des Problems keine Seite der Ebene vor der andern irgendwie bevorzugt ist. Ferner werden sich die Symmetrieen, welche die Curve selbst besitzt, auch auf die Fläche übertragen, in der Weise nämlich, dass jede durch eine Symmetrieaxe der Curve hindurchgelegte, die XY-Ebene senkrecht schneidende Ebene eine Symmetrieebene der Fläche sein muss.

II.

Führt man die zu s conjugirte Grösse s_1 und die zu $\mathfrak{F}(s)$ conjugirte analytische Function $\mathfrak{F}_1(s_1)$ ein, dann erhält man für das Quadrat des Linienelementes der Minimalfläche den Ausdruck

$$dl^2 = (1 + ss_1)^2 \,\mathfrak{F}(s)\, \mathfrak{F}_1(s_1)\, ds\, ds_1 \qquad 1)$$

Es ist ferner

$$dz = s\, \mathfrak{F}(s)\, ds + s_1 \mathfrak{F}_1(s_1)\, ds_1 .$$

(Siehe die früher erwähnte Abhandlung von Herrn Prof. H. A. Schwarz: »Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen« aus dem XIX. Jahrgange der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich pag. 250).

Bezieht sich nun dl auf die gegebene kürzeste Linie, so hat man zu setzen

$$s = e^{i\varphi}, \quad s_1 = e^{-i\varphi}, \quad dz = 0, \quad \text{also}$$

$$0 = i\,[s^2 \mathfrak{F}(s) - \frac{1}{s^2}\, \mathfrak{F}_1(s_1)]\, d\varphi,$$

woraus folgt

$$\mathfrak{F}_1(s_1) = s^4\, \mathfrak{F}(s).$$

Substituirt man für $\mathfrak{F}_1(s_1)$ diesen Werth in die Gleichung 1), so erhält man

$$dl^2 = 4\, s^4\, \mathfrak{F}(s)^2\, d\varphi^2, \quad \text{also}$$

$$\mathfrak{F}(s) = \pm \frac{1}{2s^2} \cdot \frac{dl}{d\varphi},$$

oder wenn man für $\frac{dl}{d\varphi}$ den Krümmungsradius ϱ der Curve einsetzt

$$\mathfrak{F}(s) = \pm \frac{\varrho}{2s^2}.$$

Man gelangt also zu dem nämlichen Ausdruck für $\mathfrak{F}(s)$, wie bei Anwendung der ersten Methode. Allerdings bleibt dabei das Zeichen von $\mathfrak{F}(s)$ noch durch eine besondere Untersuchung zu bestimmen, wovon indessen um so eher abgesehen werden kann, als eine Aenderung des Zeichens von $\mathfrak{F}(s)$ nur bewirkt, dass alle drei Coordinaten das entgegengesetzte Zeichen erhalten.

Diese zweite Methode zur Bestimmung der Function $\mathfrak{F}(s)$ verdient vor der erstern insofern den Vorzug, als dabei von dem Umstande, dass die gegebene geodätische Linie der Fläche zugleich Krümmungslinie derselben sei, kein Gebrauch gemacht wird. Es ist ausreichend zu wissen, in welcher Weise sich diese Curve in der Ebene s abbildet.

III.

Man kann die Aufgabe auch behandeln als Specialfall eines allgemeineren Problems und gelangt dadurch zu Ausdrücken für die Coordinaten x, y, z eines Punktes, die in gewissen Fällen bequemer sind, als die zuerst abgeleiteten, wie sich später bei den behandelten speciellen Beispielen zeigen wird.

Bezeichnet man mit u, v, w drei Functionen desselben complexen Argumentes t, von der Beschaffenheit, dass die Summe der Quadrate ihrer Ableitungen identisch verschwindet, dann sind

$$x = \mathfrak{R}(u), \quad y = \mathfrak{R}(v), \quad z = \mathfrak{R}(w)$$

die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes einer Minimalfläche. (Vergl. die früher citirte Abhandlung von Herrn Prof. Weierstrass.)

Mit Hülfe dieses Satzes kann die Aufgabe allgemein gelöst werden: Eine Minimalfläche zu bestimmen, welche durch eine gegebene analytische Linie hindurchgeht und ausserdem in jedem Punkte derselben eine bestimmte Normalenrichtung hat, die sich nach einem bekannten analytischen Gesetze ändert.

Bezeichnet man nämlich mit x, y, z die Coordinaten eines Punktes der gegebenen analytischen Linie, mit X, Y, Z die Richtungscosinus der Normalen in dem betrachteten Punkte, resp. die Coordinaten seines sphärischen Bildes und setzt man jetzt

$$u = x + i\int (Zdy - Ydz),$$

$$v = y + i\int (Xdz - Zdx),$$

$$w = z + i\int (Ydx - Xdy),$$

so sind

$$x' = \mathfrak{R}(u), \quad y' = \mathfrak{R}(v), \quad z' = \mathfrak{R}(w)$$

die Gleichungen einer Minimalfläche, welche die gestellten Bedingungen erfüllt. (Vergl. Miscellen etc. von Herrn Prof. H. A. Schwarz.)

Die obigen Gleichungen lassen sich anwenden auf das vorliegende Problem. Dasselbe verlangt die Auffindung einer Minimalfläche, welche durch eine ebene analytische Linie hindurchgeht und in jedem Punkte derselben eine gegebene Normale hat, welche in der Ebene der Curve liegt.

Man hat also zu setzen

$$
\begin{aligned}
&z = 0, \quad Z = 0, \quad \text{dann wird} \\
&u = x, \quad v = y, \\
&w = i\int (Ydx - Xdy) \quad \text{und somit} \\
&x' = \mathfrak{R}\,(x), \\
&y' = \mathfrak{R}\,(y), \\
&z' = \mathfrak{R}\, i \int (Ydx - Xdy).
\end{aligned}
$$

Für die Punkte der geodätischen Linie ist aber

$$Y = \sin\varphi, \quad X = \cos\varphi,$$
$$dx = -\sin\varphi\, dl, \quad dy = \cos\varphi\, dl.$$

Ertheilt man nun der Variabeln φ auch complexe Werthe, so ergeben sich als Endgleichungen der gesuchten Minimalfläche

$$x' = -\mathfrak{R}\int \sin\varphi\, dl,$$
$$y' = \mathfrak{R}\int \cos\varphi\, dl,$$
$$z' = -\mathfrak{R}\, il.^{*)}$$

*) Diese Gleichung lässt sich auch aus der Identität $(du)^2 + (dv)^2 + (dw)^2 = 0$ herleiten.

Die beiden Gleichungen

$$u = x, \quad v = y.$$

enthalten den Satz: Die Functionen u und v, deren reelle Theile die beiden ersten Coordinaten eines Punktes der Minimalfläche darstellen, sind durch dieselbe Relation mit einander verbunden, wie die Coordinaten x und y eines Punktes der geodätischen Linie.*)

Specielle Fälle

1.

Die gegebene geodätische Linie sei ein Kreis.

Zunächst kann man die Function $\mathfrak{F}(s)$ bestimmen. Dieselbe ist definirt durch die Gleichung

$$\mathfrak{F}(s) = -\frac{\varrho}{2s^2}.$$

Ist nun die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad \text{so ist}$$

$$\varrho = \text{const.} = R, \quad \text{somit}$$

$$\mathfrak{F}(s) = -\frac{R}{2s^2}.$$

Substituirt man diesen Werth in die allgemeinen Gleichungen der Fläche, so ergibt sich

*) Dieser Satz, sowie die Formeln für x', y', z' sind schon früher auf einem andern Wege abgeleitet worden von Herrn Dr. L. Henneberg in seiner Preisschrift über das nämliche Problem.

$$x = \frac{R}{2}\,\mathfrak{R}\,(s + \frac{1}{s}) + C_1,$$

$$y = \frac{R}{2}\,\mathfrak{R}\,i\,(\frac{1}{s} - s) + C_2,$$

$$z = -\,\mathfrak{R}\log s + C_3.$$

Bezeichnet man nun, um die reellen Theile der obigen Ausdrücke auszurechnen, mit ψ die Abweichung und mit r den absoluten Betrag der complexen Grösse s, dann wird

$$x = \frac{R}{2}\,(r + \frac{1}{r})\cos\psi + C_1,$$

$$y = \frac{R}{2}\,(r + \frac{1}{r})\sin\psi + C_2,$$

$$z = -\,R\log r + C_3.$$

Die Constanten C_1, C_2, C_3 sind aus der Bedingung zu bestimmen, dass für den Werth $r = 1$

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0 \quad \text{sein soll.}$$

Hieraus ergibt sich

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0; \quad \text{es ist also}$$

$$x = \frac{R}{2}\,(r + \frac{1}{r})\cos\psi,$$

$$y = \frac{R}{2}\,(r + \frac{1}{r})\sin\psi,$$

$$z = -\,R\log r.$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$r = e^{-\frac{z}{R}}$$

Durch Substitution dieses Werthes in die Ausdrücke für x und y erhält man

$$x = \frac{R}{2}(e^{\frac{z}{R}} + e^{-\frac{z}{R}}) \cos \psi,$$

$$y = \frac{R}{2}(e^{\frac{z}{R}} + e^{-\frac{z}{R}}) \sin \psi.$$

Diese beiden Gleichungen zusammen repräsentiren eine Fläche, die entsteht durch Rotation einer Kettenlinie um die Z-Achse; ψ ist der Winkel, welchen die Meridianebene mit der XZ-Ebene bildet.

Dieses Resultat liess sich von vornherein vermuthen; denn aus der Bedingung, dass die Fläche einen Kreis als kürzeste Linie enthalten soll, ergibt sich sofort, dass sie unendlich viele Symmetrieen besitzen und daher eine Rotationsfläche sein muss. Unter diesen ist aber bekanntlich die Rotationsfläche der Kettenlinie die einzige, welche der Minimalbedingung Genüge leistet.

2.

Die Fläche enthalte eine Cycloide als kürzeste Linie.

Die Gleichungen der Cycloide seien

$$x = R(\alpha - \sin \alpha),$$
$$y = R(1 - \cos \alpha).$$

In erster Linie kann man wieder die Function $\mathfrak{F}(s)$ bestimmen.

Zu dem Zwecke benutzt man die Eigenschaft der Cycloide, dass der Krümmungsradius ϱ in jedem ihrer Punkte gleich der doppelten Normalen ist, also

$$\varrho = 4\,R \sin\frac{\alpha}{2} = 4\,R \sin\varphi,$$

wo φ dieselbe Bedeutung hat, wie früher. Nun ist aber für die Punkte des Einheitskreises

$$e^{i\varphi} = s, \quad e^{-i\varphi} = s_1; \text{ es wird also}$$

$$\varrho = R\,\frac{s^2-1}{is} \text{ und somit}$$

$$\mathfrak{F}(s) = i\,R\,\frac{s^2-1}{s^3};$$

$$x = -\,\Re\int^s i\,R\frac{(1-s^2)^2}{s^3}\,ds,$$

$$y = \Re\int^s R\,\frac{(1-s^2)\,(1+s^2)}{s^3}\,ds,$$

$$z = \Re\int^s \frac{2\,i\,R\,(s^2-1)}{s^2}\,ds.$$

Durch Ausführung der Integrationen ergibt sich

$$\frac{2\,x}{R} = \Re\,i\,(\frac{1}{s^2} - s^2 - 4\log s) + C_1,$$

$$\frac{2\,y}{R} = -\,\Re\,(\frac{1}{s^2} + s^2) + C_2,$$

$$\frac{z}{2\,R} = \Re\,i\,(s + \frac{1}{s}) + C_3.$$

Setzt man wieder wie früher, um das Reelle vom Imaginären zu trennen,

$$s = r\,(\cos\psi + i\sin\psi) = r\,.\,e^{i\psi},$$

so wird

$$\frac{2\,x}{R} = \left(\frac{1+r^4}{r^2}\sin 2\,\psi - 4\,\psi\right) + C_1,$$

$$\frac{2\,y}{R} = -\,\frac{1+r^4}{r^2}\cos 2\,\psi + C_2,$$

$$\frac{z}{2\,R} = \frac{1-r^2}{r}\sin\psi + C_3.$$

Was die Constanten C_1, C_2, C_3 anbetrifft, so sind dieselben so zu bestimmen, dass sich für $r = 1$ die Cycloide ergibt. Für $r = 1$ wird aber

$$x = R\,(\sin 2\,\psi - 2\,\psi) + C_1',$$
$$y = -\,R\cos\psi + C_2',$$
$$z = 2\,R\,C_3;\ \text{es ist also}\ C_3 = 0.$$

Nun ist ferner

$$2\,\psi = 2\,\pi - \alpha,\quad \text{folglich}$$
$$x = R\,(\alpha - 2\,\pi - \sin\alpha) + C_1'$$
$$y = -\,R\cos\alpha + C_2'.$$

Hieraus ergibt sich

$$C_1' = 2\,R\,\pi,\quad C_2' = R.$$

Die Gleichungen der entstehenden Minimalfläche sind also

$$x = \frac{R}{2}\left(\frac{1+r^4}{r^2}\sin 2\,\psi - 4\,\psi\right) + 2\,R\,\pi, \tag{1}$$

$$y = -\,\frac{R}{2}\,\frac{1+r^4}{r^2}\cos 2\,\psi + R, \tag{2}$$

$$z = 2\,R\,\frac{1-r^2}{r}\sin\psi. \tag{3}$$

Die Fläche ist transcendenter Natur; sie enthält eine einfach unendliche Schaar von algebraischen Curven, nämlich von Parabeln und kann mittelst derselben auf sehr einfache Weise erzeugt werden.

Diese Parabeln ergeben sich, wenn man $\psi = const.$ setzt, d. h. wenn man den Punkt s auf einer Geraden durch den Nullpunkt sich bewegen lässt. Dividirt man nämlich die Gleichung 1) durch die Gleichung 2), so ergibt sich

$$\frac{x + 2R\psi - 2R\pi}{y - R} = -\operatorname{tg} 2\psi. \qquad 4)$$

Diess ist aber, wenn man ψ einen constanten Werth ertheilt, die Gleichung einer Ebene, senkrecht zur XY-Ebene. In dieser muss die Curve liegen, welche den Punkten der Geraden $\psi = const.$ entspricht. Ferner erhält man durch Elimination von r aus den Gleichungen 2) und 3)

$$z^2 = 8R^2 \sin^2\psi \left(\frac{R-y}{R\cos 2\psi} - 1\right). \qquad 5)$$

Die Projection der gesuchten Curve auf die YZ-Ebene ist also eine Parabel und da die Curve eben ist, so muss sie selbst eine Parabel sein.

Die Gleichung 4) enthält das Gesetz, nach welchem sich die Ebene dieser Parabel ändert. Um dasselbe zu finden, verfährt man wie folgt:

Bezeichnen x_1 und y_1 die Coordinaten des Mittelpunktes des rollenden Kreises, x_2 und y_2 die Coordinaten des zugehörigen Punktes der Cycloide, dann ist

$$x_1 = R\alpha = 2R\varphi, \quad x_2 = R(2\varphi - \sin 2\varphi),$$
$$y_1 = R, \quad y_2 = R(1 - \cos 2\varphi),$$

Die Gleichung der Verbindungslinie beider Punkte ist also

$$\frac{x - 2R\varphi}{y - R} = \operatorname{tg} 2\varphi, \text{ oder da}$$

$$\varphi = \pi - \psi \text{ ist}$$

$$\frac{x + 2R\psi - 2R\pi}{y - R} = - \operatorname{tg} 2\psi.$$

Allein diese Gleichung stimmt überein mit der Gleichung der Ebene, auf welcher dic Parabel liegt, d. h.

Eine Minimalfläche, für welche eine Cycloide eine geodätische Linie ist, ist eine transcendente Fläche, welche erzeugt werden kann durch Bewegung einer Parabel; der Scheitel dieser Parabel liegt auf der Cycloide; die Ebene derselben steht senkrecht auf der Ebene der Cycloide und enthält die Gerade, welche einen Punkt der Cycloide mit dem zugehörigen Mittelpunkte des rollenden Kreises verbindet.

Es ergibt sich also dieselbe transcendente Fläche, welche von Herrn Catalan bei Gelegenheit einer andern Untersuchung (siehe Journal de l'École polytechnique, Cah. 37, p. 160—163) gefunden worden ist.

Setzt man ψ gleich einem ganzen Vielfachen von π, so geht die zugehörige Parabel in eine gerade Linie über. Für $\psi = n\pi$ wird nämlich

$$x = 2R\pi(1 - n),$$

$$y = - \frac{R}{2}\left(\frac{1 - r^2}{r}\right)^2,$$

$$z = 0.$$

Die Minimalfläche enthält also gerade Linien, welche in der Ebene der Cycloide liegen und zur Y-Axe parallel sind.

Wenn man in den allgemeinen Gleichungen für x, y, z, ψ durch $2\pi - \psi$ ersetzt, so ändern x und z ihre Zeichen y bleibt unverändert, d. h.: Zwei Punkten in der Ebene s, die zur X-Axe symmetrisch liegen, entsprechen auf der Minimalfläche zwei zur Y-Axe symmetrisch gelegene Punkte.

Die Y-Axe ist somit, wie überhaupt jede auf einer Minimalfläche liegende Gerade, eine Symmetrieaxe der Fläche.

Die Y-Axe ergibt sich, wenn man $\psi = \pi$ setzt. In der Ebene s entspricht ihr also der negative Theil der reellen Axe und somit auf der Kugeloberfläche der Halbkreis, welcher durch die Punkte $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 1$; $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -1$ und den Punkt $s = -1$ hindurchgeht. Da nun die Tangentialebenen in einem Punkte der Kugeloberfläche und dem entsprechenden Punkte der Minimalfläche zu einander parallel sind, so folgt, dass die Tangentialebene in einem beliebigen Punkte der Y-Axe diese letztere ganz enthalten muss. Weil sich ferner y nicht ändert, wenn man r ersetzt durch $\frac{1}{r}$, so müssen in jedem Punkte der Y-Axe zwei Tangentialebenen existiren, die mit der XY-Ebene gleiche Winkel bilden.

Je grösser r wird, desto grösser wird auch y; der Winkel der beiden Tangentialebenen nimmt immer mehr ab und im unendlich fernen Punkte der Y-Axe fallen die beiden Tangentialebenen zusammen mit der XY-Ebene. Im Coordinatenanfangspunkte bilden sie einen Winkel von 180°; diese beiden Punkte sind somit uniplanare Doppelpunkte der Fläche.

Für $\psi = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich die Parabel

$$z^2 = 8R(y - 2R)$$

und die Ebene derselben ist

$$x = R\pi.$$

Dieser Parabel entspricht auf der Kugeloberfläche der Halbkreis, welcher durch die Punkte $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 1$; $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -1$ und durch den Punkt $+i$ in der Ebene s hindurchgeht. Hieraus ergibt sich, dass die Normalen der Fläche längs der Parabel in der Ebene derselben liegen müssen. Diese Parabel ist also ebenfalls eine kürzeste Linie der Fläche, ein Resultat, von dem bei der Behandlung des nächsten Specialfalles Gebrauch gemacht wird.

Lässt man ψ übergehen in $\psi + \pi$ und ersetzt man gleichzeitig r durch $\frac{1}{r}$, so ändern sich y und z nicht, während x um $2R\pi$ abnimmt. Auf der Kugel entsprechen aber zwei Punkten mit den Coordinaten r, ψ und $\frac{1}{r}$, $\psi + \pi$ zwei Punkte, die sich diametral gegenüberliegen. Daraus folgt, dass die zugehörigen Punkte parallele Tangentialebenen haben, d. h.

Die Fläche wiederholt sich periodisch und besteht aus congruenten sich in's Unendliche erstreckenden Theilen. Der Abstand zweier Theile, in der Richtung der X-Axe gemessen, ist $2R\pi$.

3.

Bestimmung einer Minimalfläche, welche eine Parabel als kürzeste Linie enthält.

Die Gleichung der Parabel sei

1) $$y^2 = 2px; \text{ dann ist}$$

2) $$\varrho = -p\left(\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\right)^3.$$

Durch Differentiation der Gleichung 1) ergibt sich

$$\frac{y}{p} = \frac{dx}{dy} = -\operatorname{tg}\varphi; \text{ es ist also}$$

$$\varrho = -\frac{p}{\cos^3\varphi} = -8p\frac{s^3}{(1+s^2)^3},$$

$$\mathfrak{F}(s) = 4p\frac{s}{(1+s^2)^3},$$

$$x = 4p\,\Re\int^s \frac{s(1-s^2)}{(1+s^2)^3}\,ds = \Re\,2p\frac{s^2}{(1+s^2)^2} + C_1,$$

$$y = 4p\,\Re\int^s i\frac{s}{(1+s^2)^2}\,ds = -\Re\frac{2pi}{1+s^2} + C_2,$$

$$z = 8p\,\Re\int^s \frac{s^2}{(1+s^2)^3}\,ds =$$

$$= -\Re p\left\{\frac{s(1-s^2)}{(1+s^2)^2} - \operatorname{arctg} s\right\} + C_3.$$

Die Constanten C_1, C_2, C_3 sind aus der Bedingung zu bestimmen, dass für $s = e^{i\psi}$

$$y^2 = 2px, \qquad z = 0 \text{ sein soll.}$$

Hieraus erhält man

$$C_1 = -\frac{p}{2}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = p\,\frac{\pi}{4}.$$

Man hat also zu setzen

$$x = -\frac{p}{2}\,\Re\left(\frac{1-s^2}{1+s^2}\right)^2,$$

$$y = -2p\,\Re\,\frac{i}{1+s^2},$$

$$z = \Re p\left\{\frac{s(s^2-1)}{(1+s^2)^2} + \operatorname{arctg} s + \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Lässt man den Punkt s die reelle Axe durchlaufen, so wird

$$x = -\frac{p}{2}\left(\frac{1-r^2}{1+r^2}\right)^2$$

$$y = 0,$$

$$z = p\left\{\frac{r(r^2-1)}{(1+r^2)^2} + \operatorname{arctg} r + \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Der reellen Axe entspricht also auf der Fläche eine Curve, welche in der XZ-Ebene liegt.

Setzt man nun

$$\frac{1-r^2}{1+r^2} = \cos\frac{\alpha}{2} \text{ oder } r = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4},$$

dann erhält man

$$x = -\frac{p}{4}(1+\cos\alpha),$$

$$z = \frac{p}{4}(\varphi + \pi - \sin\alpha).$$

Die Curve ist also eine Cycloide, welche entsteht, wenn ein Kreis vom Radius $\frac{p}{4}$ sich auf der Geraden $x = -\frac{p}{2}$ fortwälzt.

Auf der Kugel entspricht derselben der grösste Kreis, welcher von der XZ-Ebene ausgeschnitten wird. Daraus folgt, dass die Flächennormalen längs der Cycloide in der Ebene derselben liegen müssen. Es ergibt sich also das Resultat:

Eine Minimalfläche, welche durch die Bedingung analytisch bestimmt ist, dass eine Parabel eine geodätische Linie derselben sein soll, enthält eine Cycloide, welche ebenfalls eine kürzeste Linie der Fläche ist.

Für $r = -1$ sind x und $z = 0$; in diesem Punkte fällt die Tangente der Curve zusammen mit der Z-Axe. Setzt man ferner $r = 0$, so wird

$$x = -\frac{p}{2}, \quad z = \frac{p}{4}\pi.$$

Die Tangente in diesem Punkte ist horizontal.

Lässt man nun den Punkt s die imaginäre Axe durchlaufen und setzt zu dem Zwecke $s = ir$; dann wird

$$x = -\frac{p}{2}\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2,$$

$$y = 0,$$

$$z = p\,\frac{\pi}{4}.$$

Die Querschnittscurve der Fläche mit der XZ-Ebene setzt sich also von der Spitze der Cycloide aus parallel zur X-Axe geradlinig fort.

Ersetzt man in der obenstehenden Gleichung für x r durch $\frac{1}{r}$, so bleibt x unverändert. Daraus folgt, dass in jedem Punkte der Geraden zwei Tangentialebenen existiren, die mit der XZ-Ebene gleiche Winkel bilden. Im Punkte $x = -\frac{p}{2}$, $z = p\frac{\pi}{4}$ bilden die beiden Tangentialebenen einen Winkel von 180° und stehen senkrecht auf der XZ-Ebene; im unendlich fernen Punkte der Geraden fallen die beiden Tangentialebenen zusammen mit der XZ-Ebene. Die beiden erwähnten Punkte sind also uniplanare Doppelpunkte der Fläche.

Es lässt sich ferner zeigen, dass die Fläche eine einfach unendliche Schaar von Parabeln enthält. Bewegt sich nämlich der Punkt s auf einem Kreise, welcher die Punkte $+i$ und $-i$ enthält, so beschreibt der entsprechende Punkt auf der Minimalfläche eine Parabel. Die Ebene dieser Parabel steht senkrecht auf der XZ-Ebene und der Scheitel derselben liegt auf der Cycloide; das sphärische Bild der Parabel ist ein grösster Kreis, welcher durch die Punkte $+i$ und $-i$ in der Ebene s hindurchgeht.

Man findet also, dass die hier behandelte Minimalfläche ganz die nämlichen Eigenschaften hat, wie diejenige, für welche eine Cycloide eine gegebene geodätische Linie ist. Dieses Resultat hätte man auch ohne weitere Rechnung ableiten können. Es hat sich nämlich bei der Behandlung des zweiten Specialfalles ergeben, dass die dort entstehende Fläche ausser der Cycloide noch eine Parabel als geodätische Linie enthält. Nun ist aber eine Minimalfläche vollkommen bestimmt, sobald eine ebene kürzeste Linie derselben gegeben ist, welche nicht eine

Gerade ist, und daraus folgt, dass die in beiden Fällen entstehenden Flächen die nämliche Beschaffenheit haben müssen.

Es ergibt sich also der Satz:

Zwei Minimalflächen, welche dadurch analytisch bestimmt sind, dass die eine eine Cycloide, die andere eine Parabel als kürzeste Linie enthalten soll, sind bis auf Lage und Grösse identisch.

4.

Die gegebene geodätische Linie sei eine Ellipse.

Bei den bisher behandelten Specialfällen wurden immer die Coordinaten x, y, z eines Punktes der Minimalfläche ausgedrückt als die reellen Theile von Functionen der complexen Variabeln s. Diese Wahl der Variabeln hat vor jeder andern den Vorzug, dass die geometrische Beziehung, welche zwischen den Punkten der Ebene s und den Punkten der Minimalfläche durch die Abbildung auf die Kugeloberfläche vermittelt wird, in jedem speciellen Falle leicht die Gestalt der entstehenden Fläche erkennen lässt.

Im vorliegenden Falle kann man mit Vortheil ausser der soeben besprochenen auch noch die dritte Methode der allgemeinen Lösung zur Anwendung bringen; es lässt sich nämlich mit Hülfe derselben ein für die Erzeugung der entstehenden Fläche wichtiges Resultat herleiten.

Die Gleichungen der Ellipse seien

$$x = a \cos u, \qquad 1)$$

$$y = b \sin u, \qquad 2)$$

wo u die excentrische Anomalie bedeutet. Dann erhält man für den Krümmungsradius ϱ den Ausdruck

$$\varrho = \frac{1}{ab}(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{\frac{3}{2}}.$$

Durch Differentiation der Gleichungen 1) und 2) ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{cotg} u = -\operatorname{cotg} \varphi;$$

es ist also

$$\sin^2 u = \frac{b^2}{b^2 + a^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi},$$

$$\cos^2 u = \frac{a^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi}{b^2 + a^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi}.$$

Wenn man diese Werthe in die Gleichung für ϱ substituirt, so findet man

$$\varrho = a^2 b^2 \frac{1}{(b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \text{ oder}$$

$$\varrho = 8a^2 b^2 \frac{s^3}{[(a^2 - b^2)s^4 + 2(a^2 + b^2)s^2 + a^2 - b^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{a-b}{a+b} = p, \text{ dann wird}$$

$$\varrho = \frac{8a^2b^2}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{s^3}{[(s^2 + p)(s^2 + \frac{1}{p})]^{\frac{3}{2}}},$$

und hieraus ergibt sich

$$\mathfrak{F}(s) = -\frac{4a^2b^2}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{s}{[(s^2 + p)(s^2 + \frac{1}{p})]^{\frac{3}{2}}},$$

$$x = -\frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\,\Re\int^s \frac{s(1-s^2)\,ds}{[(s^2+p)(s^2+\frac{1}{p})]^{\frac{3}{2}}},$$

$$y = -\frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\,\Re\int^s \frac{is(1+s^2)ds}{[(s^2+p)(s^2+\frac{1}{p})]^{\frac{3}{2}}},$$

$$z = -\frac{8a^2b^2}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\,\Re\int^s \frac{s^2ds}{[(s^2+p)(s^2+\frac{1}{p})]^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Integrationen in den Ausdrücken für x und y lassen sich leicht ausführen; man erhält

$$x = \Re\,\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1+s^2}{\sqrt{(s^2+p)(s^2+\frac{1}{p})}} + C_1,$$

$$y = \Re\,\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{i(1-s^2)}{\sqrt{(s^2+p)(s^2+\frac{1}{p})}} + C_2.$$

Die Coordinaten x und y sind also die reellen Theile algebraischer Functionen von s, z ist eine elliptisches Integral zweiter Art. Daraus folgt, dass die Fläche in der Richtung der Z-Axe periodisch ist.

Die Constanten C_1 und C_2 sind aus der Bedingung zu bestimmen, dass für $r = 1$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sein soll. Es ergibt sich hieraus

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Die untere Grenze in dem elliptischen Integral für z ist willkürlich, da durch eine andere Wahl derselben nur eine

Verschiebung der Fläche in der Richtung der Z-Axe bewirkt wird. Der Einfachheit wegen soll dieselbe gleich Eins gesetzt werden.

Aus einer früher gemachten Bemerkung geht hervor, dass die Fläche symmetrisch sein muss in Bezug auf die X- und Y-Axe, ebenso in Bezug auf alle drei Coordinatenebenen; der Coordinatenanfangspunkt ist also Mittelpunkt der Fläche. Es genügt demnach, einen Octanten der Fläche zu betrachten. Diese Symmetrieverhältnisse lassen vermuthen, dass der reellen und imaginären Axe in der Ebene s auf der Fläche die Querschnittscurven mit der XZ- und YZ-Ebene entsprechen werden.

Lässt man den Punkt s die reelle Axe durchlaufen, so ist $y = 0$. Man erhält also auf der Fläche eine Curve, die ganz in der XZ-Ebene liegt. Auf der Kugel entspricht ihr der grösste Kreis, welchen die XZ-Ebene ausschneidet. Hieraus ergibt sich, dass die Tangentialebenen der Fläche längs dieses Curvenzweiges einen Cylinder bilden, welcher auf der XZ-Ebene senkrecht steht. Für $s = 1$ ist

$$x = a, \quad z = 0.$$

Die Tangente in diesem Punkte ist parallel zur Z-Axe. Für $s = 0$ wird

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad z = \frac{8\,a^2 b^2}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \int\limits_0^1 \frac{s^2 ds}{[(s^2 + p)(s^2 + \frac{1}{p})]^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun entspricht dem Punkte $s = 0$ auf der Kugeloberfläche der Punkt $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -1$. Daraus folgt, dass die Curve in dem entsprechenden Punkte eine horizontale Tangente hat. Man kann sich hievon auch überzeugen, wenn man $\frac{dz}{ds} : \frac{dx}{ds}$ bildet und untersucht, wann dieser Ausdruck $= 0$ wird.

Lässt man nun den Punkt s die imaginäre Axe durchlaufen von $s = 0$ an bis $s = i\sqrt{p}$ und setzt zu dem Zwecke

$$s = is', \quad ds = ids',$$

wo s' reell ist, dann sind beide Factoren unter dem Quadratwurzelzeichen positiv und man erhält

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{1 - s'^2}{\sqrt{(p - s'^2)(\frac{1}{p} - s'^2)}},$$

$$y = 0.$$

In dem Integrale für z kommen nur rein imaginäre Elemente hinzu, d. h. z behält den für den Punkt $s = 0$ angenommenen Werth während des ganzen Weges von 0 bis $i\sqrt{p}$ bei, ist also constant. Die Querschnittscurve der Fläche mit der XZ-Ebene setzt sich somit vom Punkte

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad z = \frac{8a^2b^2}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 \frac{s^2 ds}{[(s^2 + p)(s^2 + \frac{1}{p})]^{\frac{3}{2}}}$$

aus parallel zur X-Axe bis in's Unendliche geradlinig fort. Zwei Punkte der imaginären Axe, die vom Nullpunkte aus nach beiden Seiten gleich weit abstehen, liefern den nämlichen Punkt dieser Geraden. Es folgt hieraus, dass in jedem Punkte derselben zwei Tangentialebenen existiren, die mit der XZ-Ebene gleiche Winkel bilden. Im Punkte

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad z = \frac{8a^2b^2}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 \frac{s^2 ds}{[(s^2 + p)(s^2 + \frac{1}{p})]^{\frac{3}{2}}},$$

fallen die beiden Tangentialebenen zusammen; dieser Punkt ist also ein uniplanarer Doppelpunkt der Fläche. Je weiter man sich auf der Geraden entfernt, um so kleiner wird der Winkel, welchen die beiden Tangentialebenen mit einander bilden. Für $x = \infty$ nähert sich derselbe einem bestimmten Grenzwerthe, nämlich dem Winkel, welchen die Tangentialebenen der Kugel in den Punkten mit einander einschliessen, die den beiden Werthen $s = i\sqrt{p}$ und $s = -i\sqrt{p}$ entsprechen. Die beiden Tangentialebenen der Fläche, welche zu den oben angeführten Tangentialebenen der Kugel parallel sind, sind Asymptotenebenen der Minimalfläche. Man erhält unendlich viele solche Asymptotenebenen, die sich paarweise in einer geraden Doppellinie der Fläche schneiden.

Bewegt sich nun der Punkt s auf der imaginären Axe von $s = +i$ bis $s = +i\sqrt{p}$, so wird $x = 0$, weil der eine Factor unter dem Quadratwurzelzeichen negativ wird; ferner wird

$$y = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{1 + s'^2}{\sqrt{(s'^2 - p)(\frac{1}{p} - s'^2)}}.$$

Man erhält also eine Curve, die ganz in der YZ-Ebene enthalten ist. Für $s' = 1$, also $s = i$ ist

$$y = b, \quad z = 0.$$

Von diesem Punkte an nehmen y und z, wie aus der Ableitung $\frac{dz}{ds} : \frac{dy}{ds}$ hervorgeht, beständig zu und für $s = i\sqrt{p}$ werden beide unendlich gross. Die Curve verläuft also ähnlich wie eine Hyperbel. Auf der Kugel entspricht derselben ein Bogen des grössten Kreises, welcher von der YZ-Ebene ausgeschnitten wird. Daraus folgt, dass die Tangentialebenen der Fläche längs dieser Curve auf der YZ-Ebene senkrecht stehen müssen. Aus den Symmetrieeigenschaften der Fläche oder auch direct aus der Abbildung ergeben sich alsdann die zu dem oben gefundenen Curvenzweige symmetrischen in Bezug auf die Y- und Z-Axe.

Da dem unendlich fernen Punkte einer geraden Doppellinie der Fläche und einem unendlich fernen Punkte der Querschnittscurve mit der YZ-Ebene in der Ebene s und auf der Kugel der nämliche Punkt entspricht, so müssen die Tangentialebenen in diesen beiden Punkten zusammenfallen. Die Asymptotenebenen der Fläche werden also aus der YZ-Ebene die vier Asymptoten der Querschnittscurve ausschneiden.

Um die Beschaffenheit der Fläche noch etwas genauer kennen zu lernen, kann man, wie schon früher bemerkt, mit Vortheil diejenigen Formeln zur Anwendung bringen, welche die dritte Methode der allgemeinen Lösung liefert. — Die Ellipse sei gegeben durch die Gleichungen

$$x' = a \sin \varphi,$$
$$y' = b \cos \varphi.$$

Nun ist aber

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \mathrm{am}\, u, \quad \text{also} \\ x' &= a \,\mathrm{sn}\, u, \\ y' &= b \,\mathrm{cn}\, u. \end{aligned}\right\} \text{mod. } k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Ferner ist die Bogenlänge l der Ellipse

$$l = a\, E_1(\varphi) = a\, E(u).$$

Ertheilt man jetzt dem Argumente u auch complexe Werthe, indem man an die Stelle von u setzt $u + vi$, dann sind

$$x = \Re\, a\, sn(u + vi),$$
$$y = \Re\, b\, cn(u + vi),$$
$$z = -\, a\, \Re i\, E(u + vi)$$

die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Minimalfläche, welche die gegebene Ellipse als kürzeste Linie enthält.

Um die reellen Theile der obenstehenden Ausdrücke auszurechnen, entwickelt man

$$sn(u + vi), \quad cn(u + vi), \quad E(u + vi)$$

nach ihren Additionstheoremen. Beachtet man dabei, dass $sn\, vi$ rein imaginär, $cnvi$ und $dnvi$ reell sind, so ergeben sich als Gleichungen der Minimalfläche

$$x = a\, \frac{snu\, cnvi\, dnvi}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 vi}, \tag{3}$$

$$y = b\, \frac{cnu\, cnvi}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 vi}, \tag{4}$$

$$z = -\, ai\left(Evi - \frac{k^2 sn^2 u\, snvi\, cnvi\, dnvi}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 vi}\right). \tag{5}$$

Setzt man nun in diesen Ausdrücken v gleich einer Constanten, so erhält man durch Elimination von u zwei algebraische Gleichungen zwischen x, y, z, welche eine Curvenschaar der Fläche repräsentiren. Um diese Curven zu finden, bestimmt man am einfachsten ihre Projectionen auf die XZ- und YZ-Ebene.

Quadrirt man nämlich die Gleichungen 3) und 5) und addirt sie, so ergibt sich

$$k^2x^2 + z^2 + ai\,z(2Evi + \frac{cnvi\,dnvi}{snvi}) -$$
$$- a^2Evi(Evi + \frac{cnvi\,dnvi}{snvi}) = 0,$$

oder indem man zur Abkürzung setzt

$$\alpha = - ai\,Evi,$$
$$\beta = - ai\,(Evi + \frac{cnvi\,dnvi}{snvi});$$
$$k^2x^2 + z^2 - (\alpha + \beta)\,z + \alpha\beta = 0.$$

Die gesuchten Curven projiciren sich also auf die XZ-Ebene als eine Schaar von Ellipsen, deren kleine Axen in derselben Geraden liegen.

Die Schnittpunkte irgend einer Ellipse der Schaar mit der Z-Axe sind, wie aus der obigen Gleichung hervorgeht

$$z_1 = \alpha,$$
$$z_2 = \beta.$$

Auf ganz analoge Weise findet man, *dass die Projectionen der gesuchten Curven auf die YZ-Ebene eine Schaar von ähnlichen Hyperbeln bilden, deren Scheitel auf derselben Geraden liegen.* — Setzt man nämlich

$$\alpha_1 = - ai(Evi - k^2\,\frac{cnvi\,snvi}{dnvi}),$$
$$\beta_1 = - ai\,(Evi + \frac{cnvi\,dnvi}{snvi}),$$

dann ergibt sich als Gleichung der Hyperbelschaar

$$k^2\,\frac{a^2}{b^2}\,y^2 - z^2 + (\alpha_1 + \beta_1)\,z - \alpha_1\beta_1 = 0.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass irgend eine Hyperbel der Schaar von der Z-Axe in den beiden Punkten

$$z_1' = \alpha_1 \text{ und } z_2' = \beta_1$$

geschnitten wird.

Fasst man diese beiden Resultate zusammen und beachtet ferner, dass β mit β_1 übereinstimmt, so erhält man den von Herrn Prof. H. A. Schwarz gefundenen Satz

Eine Minimalfläche, auf welcher eine Ellipse eine geodätische Linie ist, ist eine transcendente Fläche; dieselbe besitzt eine einfach unendliche Schaar von Raumcurven vierter Ordnung, deren jede einen isolirten Doppelpunkt hat; die sphärischen Bilder derselben sind confocale sphärische Kegelschnitte.

5.

Die Fläche enthalte eine Astroide als kürzeste Linie.

Der Fall, in welchem eine Astroide eine kürzeste Linie der Fläche ist, bietet insofern besonderes Interesse, als die hier entstehende Minimalfläche nicht, wie alle bisher behandelten, transcendent, sondern algebraisch ist.

Die Astroide kann angesehen werden als Evolute eines Kegelschnittes, z. B. einer Ellipse. Um nun für diesen Fall die Function $\mathfrak{F}(s)$ zu bilden, kann man wie folgt verfahren:

Bezeichnet ϱ den Krümmungsradius in irgend einem Punkte einer Curve und ϱ_1 den Krümmungsradius im entsprechenden Punkte der Evolute derselben, dann ist

$$\varrho_1 = \frac{d\varrho}{ds} \cdot \frac{ds}{d\varphi},$$

wo $d\varphi$ den Contingenzwinkel bezeichnet; dieser ist der nämliche für beide Curven. Ersetzt man nun in dieser Gleichung die Grösse ϱ durch ihren früher im Falle der Ellipse abgeleiteten Werth, dann ergibt sich für den Krümmungsradius ϱ_1 in einem Punkte der Astroide die Gleichung

$$\varrho_1 = -\frac{24a^2b^2i}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{s^3(s^4-1)}{\left[(s^2+p)(s^2+\frac{1}{p})\right]^{\frac{5}{2}}}.$$

Es ist somit

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{12a^2b^2i}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{s(s^4-1)}{\left[(s^2+p)(s^2+\frac{1}{p})\right]^{\frac{5}{2}}}$$

und hieraus ergibt sich schliesslich nach Ausführung der Integrationen

$$x = \mathfrak{R}\,\frac{ib^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{(1-s^2)^3}{\left[(s^2+p)(s^2+\frac{1}{p})\right]^{\frac{3}{2}}}, \tag{1}$$

$$y = -\mathfrak{R}\,\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{(1+s^2)^3}{\left[(s^2+p)(s^2+\frac{1}{p})\right]^{\frac{3}{2}}}, \tag{2}$$

$$z = -\mathfrak{R}\,\frac{8a^2b^2}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{is^3}{\left[(s^2+p)(s^2+\frac{1}{p})\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{3}$$

Schneller gelangt man zum Ziele durch Anwendung der Formeln, welche die dritte Methode der allgemeinen Lösung liefert.

Bezeichnen nämlich allgemein dl das Längenelement der geodätischen Linie, u, v, w die Functionen, deren reelle Theile die Coordinaten eines Punktes der zugehörigen Minimalfläche sind, ferner $d\lambda$ und u_1, v_1, w_1 das Längenelement und die gleichbedeutenden Functionen für die Evolute, so ist

$$d\lambda = \varrho_1 d\varphi = \frac{d^2 l}{d\varphi^2}\, d\varphi, \text{ also}$$

$$u_1 = -\int \sin\varphi \frac{d^2 l}{d\varphi^2}\, d\varphi, \tag{4}$$

$$v_1 = \int \cos\varphi \frac{d^2 l}{d\varphi^2}\, d\varphi, \tag{5}$$

$$w_1 = -\, i \int \frac{d^2 l}{d\varphi^2}\, d\varphi = -\, i \frac{dl}{d\varphi}. \tag{6}$$

Durch theilweise Integration folgt aus den Gleichungen 4) und 5)

$$u_1 = -\sin\varphi \frac{dl}{d\varphi} + \int \cos\varphi \frac{dl}{d\varphi}\, d\varphi,$$

$$v_1 = \cos\varphi \frac{dl}{d\varphi} + \int \sin\varphi \frac{dl}{d\varphi}\, d\varphi.$$

Es ist somit

$$u_1 = \frac{du}{d\varphi} + v,$$

$$v_1 = \frac{dv}{d\varphi} - u,$$

$$w_1 = \frac{dw}{d\varphi} \text{ *)}.$$

Nun sind für den Fall der Ellipse die Functionen u, v, w bekannt und man kann also leicht u_1, v_1, w_1 und damit die Coordinaten eines Punktes der Minimalfläche berechnen, welche eine Astroide als kürzeste Linie

*) Diese Gleichungen sind zuerst aufgestellt worden von Herrn Dr. L. Henneberg in seiner schon früher erwähnten Preisschrift.

enthält. Es ergeben sich ganz die nämlichen Ausdrücke für x, y, z, wie bei Anwendung der ersten Methode.

Die Coordinaten x, y, z eines Punktes der Fläche sind, wie aus den Gleichungen 1, 2, 3 hervorgeht, die reellen Theile algebraischer Functionen von s und hieraus ergibt sich der Satz:

Eine Minimalfläche, auf welcher eine Astroide eine geodätische Linie ist, ist eine algebraische Fläche.

Dieses Resultat bleibt erhalten im Falle einer gewöhnlichen Astroide, die also nicht die Evolute eines Kegelschnittes, sondern derjenige specielle Fall einer Hypocycloide ist, in welchem der Radius des rollenden Kreises gleich dem vierten Theil vom Radius des festen Kreises ist. Die Gleichungen dieser Curve sind

$$x^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cos \omega, \tag{7}$$

$$y^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \sin \omega, \tag{8}$$

wo a den Radius des festen Kreises und ω den Winkel des Radiusvectors mit der X-Axe bezeichnet. Der Krümmungsradius ϱ dieser Curve ist

$$\varrho = -3a \sin \omega \cos \omega.$$

Durch Differentiation der Gleichungen 7) und 8) findet man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -\operatorname{tg}\omega = -\operatorname{cotg}\varphi;$$

es ist also auch

$$\varrho = -3a \sin\varphi \cos\varphi \text{ und daher}$$

$$\mathfrak{F}(s) = -3ai\,\frac{s^4-1}{8s^4},$$

$$x = -\frac{3}{8}\, a\,\mathfrak{R}\, i\left(s + \frac{1}{3s^3} - \frac{s^3}{3} - \frac{1}{s}\right) + C_1, \quad 9)$$

$$y = \frac{3}{8}\, a\,\mathfrak{R}\left(s + \frac{1}{3s^3} + \frac{s^3}{3} + \frac{1}{s}\right) + C_2, \quad 10)$$

$$z = -\frac{3}{8}\, a\,\mathfrak{R}\, i\left(\frac{s^4+1}{s^2}\right) + C_3. \quad 11)$$

Die Integrationsconstanten C_1 und C_2 sind gleich Null; C_3 kann man ebenfalls gleich Null setzen.

Die obenstehenden Gleichungen zeigen wiederum, dass die durch sie dargestellte Fläche algebraisch ist. Die reellen Theile der rechts stehenden Ausdrücke lassen sich leicht von den imaginären trennen; es ergibt sich

$$x = \frac{3}{8}\, a\left(\frac{r^2+1}{r}\sin\psi - \frac{1}{3}\,\frac{r^6+1}{r^3}\sin 3\psi\right),$$

$$y = \frac{3}{8}\, a\left(\frac{r^2+1}{r}\cos\psi + \frac{1}{3}\,\frac{r^6+1}{r^3}\cos 3\psi\right),$$

$$z = \frac{3}{8}\, a\,\frac{r^4-1}{r^2}\sin 2\psi.$$

Setzt man $\psi = 0$, d. h. lässt man den Punkt s auf der positiven X-Axe sich bewegen, so wird

$$x = 0,$$

$$y = \frac{1}{8}\, a\left(\frac{r^2+1}{r}\right)^3,$$

$$z = 0.$$

Für $\psi = \pi$ ergibt sich

$$x = 0,$$

$$y = -\frac{1}{8}\, a\left(\frac{r^2+1}{r}\right)^3,$$

$$z = 0.$$

Die Y-Axe liegt also auf der Fläche; das Stück derselben, das im Innern der Astroide liegt, ist eine isolirte Doppellinie der Fläche.

Ebenso lässt sich zeigen, dass auch die X-Axe auf der Fläche liegt; beide Axen sind Symmetrieaxen und geodätische Linien der Fläche.

Da y unverändert bleibt, wenn man r ersetzt durch $\frac{1}{r}$, so müssen in jedem Punkte der X- und Y-Axe zwei Tangentialebenen existiren, die mit der XY-Ebene gleiche Winkel bilden. In den vier Rückkehrpunkten der Curve fallen sie zusammen; diese sind also uniplanare Doppelpunkte der Fläche. Alle drei Coordinatenebenen sind Symmetrieebenen der Fläche; ebenso die Ebenen

$$x = + y \text{ und } x = - y;$$

die Schnittcurven dieser letztern mit der Fläche sind ebenfalls kürzeste Linien derselben.