1572, von welcher Epoche an wir mit einer 220jährigen Periode rückwärts auf die oben angeführten Zeiten auffallend grosser Nordlichter von 454, 675, 905, 1117 und 1353 gelangen.

Für die Südlichter verlassen uns die Hülfsmittel, da nur aus der neuesten Zeit dürftiges Beobachtungsmaterial vorliegt, indessen dürfen wir doch schon jetzt aus diesem schliessen — wie auch nicht anders zu erwarten ist —, dass Alles, was für das Nordlicht gilt, auch dem Erdlichte der Südhemisphäre zukommt.

Notizen.

Notiz über algebraische Raumcurven, deren System zu sich selbst dual oder reciprok ist. (Vergl. Protokoll der Sitzung vom 4. Januar 1875).

Als System einer algebraischen Raumcurve benennen wir die Gesammtheit ihrer Punkte, Tangenten und Schmiegungsebenen und bezeichnen zuerst ihre Charactere; durch m die Ordnung der Curve, die Zahl ihrer Punkte in einer Ebene, durch n die Classe der Developpabeln, die Zahl ihrer Ebenen durch einen Punkt; mit r den Rang des Systems (Classe der Curve, Ordnung der Developpabeln), die Zahl der Tangenten, welche eine Gerade schneiden; mit g die Zahl der Geraden in einer Ebene, durch deren jede zwei Schmiegungsebenen gehen, der scheinbaren Doppelgeraden der Developpabeln; mit h die Zahl der Geraden durch einen Punkt, in deren jeder zwei Punkte der Curve liegen, der scheinbaren Doppelpunkte der Curve; sodann ihre Singularitäten, nämlich mit α die Zahl der stationären Ebenen, mit β die der stationären Punkte, mit θ die Zahl der stationären Tangenten oder Erzeugenden; mit $\varDelta$ die Zahl der doppelten Schmiegungsebenen, mit D die der Doppelpunkte, mit d die der doppelten Tangenten oder Erzeugenden. Zu demselben treten die Doppelcurve der Developpabeln, der Ort der Schnittpunkte nicht benachbarter Curventangenten, und die doppelt umschriebene Developpable der Curve, die Enveloppe der Verbindungsebenen nicht benachbarter Curventangenten, also in perspectivischer Lage zur Doppelcurve; jene hat eine Ordnung m^* (das x von Cayley-Salmon), diese eine Classe n' (das y von Cayley-Salmon); jene hat h^* scheinbare Doppelpunkte, β^* stationäre Punkte und t^* dreifache Punkte, r^* sei ihre Classe oder die Ordnung ihrer Developpabeln; diese hat g' scheinbare Doppelebenen, α' stationäre Ebenen und t' dreifache Ebenen, r' sei ihre Ordnung oder die Classe ihrer Rückkehrkante. (h^*, t^*, β^*, r^* sind die k, t, γ, R von Salmon; vergl. Bd 2. der „Annal. Geom. d. Raumes" 2. Aufl. § 479; die hier gewählte Bezeichnung entspricht einer in sich abgeschlossenen Theorie dieser Gebilde und ist in der That einer Vorlesung entnommen, in der ich sie in dieser Weise behandelte).

Diese einundzwanzig Charactere sind durch vierzehn Gleichungen mit einander verbunden, welche ihre darstellend geometrischen Beziehungen ausdrücken und die man Cayley, Salmon, Cremona verdankt (vergl. das angeführte Werk betreffs der Literatur, insbesondere die Noten 27 p. 625, 206 f. p. 671; sowie für die ersten sechs des Verfassers „Darstellende Geometrie" (§§ 82 f.) Sie lauten in dual entsprechenden Paaren:

$$r = m(m-1) - 2(h + D) - 3\beta, \qquad r = n(n-1) - 2(g + \varDelta) - 3\alpha;$$
$$m = r(r-1) - 2(n' + d) - 3(n + \theta), \quad n = r(r-1) - 2(m^* + d) - 3(m + \theta);$$
$$n + \theta - \beta = 3(r-m), \qquad m + \theta - \alpha = 3(r-n).$$
$$\beta^* = m(r+4) - 6(r+\beta) - 4(d+D) - 2\theta;$$
$$\alpha' = n(r+4) - 6(r+\alpha) - 4(d+\varDelta) - 2\theta;$$
$$3t^* = (r-2)(m^* - n - 3m - 2d - 3\theta) + 8n + 10\beta + 10d + 20\theta;$$
$$3t' = (r-2)(n' - m - 3n - 2d - 3\theta) + 8m + 10\alpha + 18d + 20\theta;$$
$$m^*(r-2)(r-3) = n(m^* - 2r + 8) + 4h^* + 3[(mm^* - \alpha - 3\beta - 2\beta^* - 3\theta - 4d - 8D + \theta(m^* - 2r + 9)] + 2d(m^* - 2r + 10) + 12D,$$

$$n'(r-2)(r-3)=m(n'-2r+8)+4g'+3[(nn'-\beta-3\alpha-2\alpha-3\theta-4d-8\varDelta+\theta+\theta(n'-2r+9)]+2d(n'-2r+10)+12\varDelta;$$

$$r^*=r(n-3)-3\alpha-2\varDelta, \qquad r'=r(m-3)-3\beta-2D.$$

Für die in Frage stehenden Curven werden die ihrem Begriffe nach reciproken Charactere $m, n; g, h; \alpha, \beta; D, \varDelta; m^*, n'; r^*, r'; g', h^*; \alpha', \beta^*; t', t^*$ einander paarweis gleich, die Curve und ihre Tangentenfläche, ihre Doppelcurve und die doppelt berührende Developpable der Curve sind Gebilde, die einander nach dem Princip der Dualität entsprechen. Seit 1849 (Salmon „On the Classification of Curves of double Corvature" in „Cambridge and Dublin Mathem. Journal" Vol. V) kannte man in der Raumcurve dritter Ordnung $m=n=3$, $r=4$, $g=h=1$ (alle nicht aufgeführten Charactere sind Null) und der Curve vierter Ordnung erster Art mit einem stationären Punkte $m=n=4$, $r=5$, $g=h=2$, $\alpha=\beta=1$, $m^*=n'=2$, $r'=r^*=2$ zwei solche Curvengattungen; 1865 fügte Cayley („On a special Sextic Developpable" in „Quarterly Journal" Vol. VII) das merkwürdige Beispiel der Curve vierter Ordnung mit zwei stationären Tangenten $m=n=4$, $r=6$, $g=h=3$, $\theta=2$, $m^*=n'=4$, $r'=r^*=6$, $g'=h^*=3$, hinzu, wo Doppelcurve und doppelt berührende Developpable allgemein und von derselben Art sind wie die ursprüngliche Curve. Alle drei Beispiele sind Curven vom Geschlecht Null oder rationale Curven.

Ich habe die Frage nach der Existenz solcher Curven von den Ordnungen fünf, etc. erörtert und will zunächst die rationalen für die Ordnungszahl fünf hier aufführen. Solche sind bei den Raumcurven fünfter Ordnung ($m=n=5$) sämmtliche drei sich selbst dualen Arten:

I. Art. $g=h=4$ ($r=12$, $n=20^*$), die Durchdringung von nur zwei Flächen zweiter (F_2) und dritter Ordnung (F_3) mit einer gemeinsamen Geraden, oder von F_2, F_4 mit einer gemeinsamen Raumcurve dritter Ordnung, oder von F_3, F_3 mit einer gemeinsamen Raumcurve vierter Ordnung erster Art, mit den übrigen Characteren: $r=6$, $D=\varDelta=0$, $d=0$, $\theta=0$, $\alpha=\beta=2$,

---

[1]) Dies r und n entspricht der Fläche ohne Singularitäten β, θ, d etc.; so auch im Folgenden.

$m^* = n' = 5$, $\alpha' = \beta^* = 2$, $r' = r^* = 6$, $g' = h^* = 4$, $t' = t^* = 0$, — wie man sieht, *der* Cayley'schen Curve vierter Ordnung zweiter Art analog in steter Selbstwiederholung den Raum erfüllend, wie die Schraubenlinie es nur hinsichtlich der Doppelcurven ihrer Developpabeln thut.

II. Art. $g = h = 5$, ($r = 10$, $n = 15$); die Durchdringung von zwei Flächen F_2, F_4, welche eine Gerade und einen Kegelschnitt gemein haben, oder von F_3, F_3 mit einer gemeinsamen Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art; mit den übrigen Characteren: $r = 7$, $D = \varDelta = 0$, $d = 0$, $\theta = 2$, $\alpha = \beta = 1$, $m^* = n' = 8$, $\alpha' = \beta^* = 3$, $r' = r^* = 11$, $g' = h^* = 15$, $t' = t^* = 0$.

III. Art. $g = h = 6$, ($r = 8$, $n = 9$); die Durchdringung von F_2, F_4 mit drei gemeinsamen Geraden derselben Schaar oder von F_3, F_3 mit zwei gemeinsamen Kegelschnitten etc.; zwei Species mit den übrigen Characteren: $r = 8$, $D = \varDelta = 0$, $d = 0$ oder $d = 1$, $\theta = 4$, $\alpha = \beta = 0$, $m^* = n' = 12$ oder $= 11$, $\alpha' = \beta^* = 4$ oder $= 0$, $r' = r^* = 16$, $g' = h = 40$ oder $= 35$, $t' = t^* = 0$. Von diesen Curven findet sich die erste, jedoch ohne Angabe der Charactere α', g', r', t', auch in der Abhandlung des Hrn. Prof. Schwarz „De superficiebus in planum explicabilibus" in Bd. 64 des „Journal's" pag. 14.

Raumcurven sechster Ordnung:

I. Art. Vollständige Durchdringungen $g = h = 6$, ($r = 18$, $n = 36$), mit zwei Species, beide rational: $r = 7$ oder 8, $D = \varDelta = 1$ oder $= 2$, $d = 0$, $\theta = 0$ oder $= 2$; $\alpha = \beta = 3$ oder $= 2$, $m^* = n' = 9$, oder $= 13$, $\alpha' = \beta^* = 2$ oder $= 0$, $r' = r^* = 10$ oder $= 14$, $g' = h^* = 15$ oder $= 39$, $t' = t^* = 1$ oder $= 2$ (hier zuerst auftretend bei solchen Curven).

II. Art. $g = h = 6$, ($r = 18$); Durchdringung von F_2, F_4 mit gemeinsamem Kegelschnitt, von F_2, , F_5 mit Curve vierter Ordnung erster Art; zwei Species, beide mit dem Geschlecht 1, mit $\alpha = \beta = 0$, $D = \varDelta = 5$; $r = 8$; $\theta = 0$, $d = 0$ oder $= 1$.

III. Art. $g = h = 7$, ($r = 16$, $n = 30$; Durchdringung von F_2 und F_4 mit zwei windschiefen Geraden, oder von F_3 und F_3 mit Raumcurve dritter Ordnung, oder F_2 und F_5 mit Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art; neun Species, wovon sechs mit dem Geschlecht 0, drei mit -1; nämlich respective die ersteren mit $D = \varDelta = 0, 0, 1, 1, 2, 3$ und $\theta = 0, 0, 2, 2, 4, 6$; $d = 0, 1, 0, 1, 0, 0$; $\alpha = \beta = 3, 3, 2, 2, 1, 0$; $r = 7, 7, 8, 8, 9,$

10; etc.; die letztern mit $D = \varDelta = 4$, $\theta = 0$, $\alpha = \beta = 0$, $r = 8$, $d = 0$, 1, 2 respective.

IV. Art. $g = h = 8$, ($r = 14$, $n = 24$); Durchdringung von F_3 und F_3 mit gemeinsamer Geraden und gemeinsamem Kegelschnitt oder von F_2, F_5 mit zwei gemeinsamen Kegelschnitten; elf Species, wovon sieben mit Geschlecht 0, vier mit -1; jene mit $D = \varDelta = 0$, 0, 0, 1, 1, 2, 2; $\theta = 2$, 2, 2, 4, 4, 6, 6; $d = 0$, 1, 2, 0, 1, 0, 1; $\alpha = \beta = 2$, 2, 2, 1, 1, 0, 0; $r = 8$, 8, 8, 9, 9, 10, 10; etc.; diese mit $D = \varDelta = 3$, $\theta = 0$, $d = 0$, 1, 2, 3; $\alpha = \beta = 0$; $r = 8$; etc.

V. Art. $g = h = 9$, ($r = 12$, $n = 18$); Durchdringung von F_3 und F_3 mit drei gemeinsamen windschiefen Geraden, oder von F_2 und F_5 mit Kegelschnitt und zwei Geraden; zwölf Species, wovon nur sechs das Geschlecht 0, fünf das Geschlecht -1 haben, indess eine vom Geschlecht Eins ist. Für die Ersteren hat man respective $D = \varDelta = 0$, 0, 0, 1, 1, 1; $\theta = 4$, 4, 4, 6, 6, 6; $d = 0$, 1, 2, 0, 1, 2; $\alpha = \beta = 1$, 1, 1, 0, 0, 0; $r = 9$, 9, 9, 10, 10, 10; etc. Für die Zweiten

$D = \varDelta = 2$, $\theta = 0$, $d = 0$, 1, 2, 3, 4; $\alpha = \beta = 0$, $r = 8$; etc.

Die vollständige Reihe der Charactere der Letztern ist

$D = \varDelta = 0$, $\theta = 12$, $d = 0$, $\alpha = \beta = 0$, $r = 12$, $m^* = n' = 36$, $\alpha' = \beta^* = 0$, $g' = h^* = 456$, $r' = r^* = 36$, $t' = t^* = 16$.

VI. Art. $g = h = 10$, ($r = 10$, $n = 12$); Durchdringung von F_2 und F_4 mit vier gemeinsamen windschiefen Geraden; zehn Species, worunter vier das Geschlecht 0, sechs das Geschlecht -1 haben; für jene ist $D = \varDelta = 0$, $\theta = 6$, $d = 0$, 1, 2, 3; $\alpha = \beta = 0$; $r = 10$; $m^* = n' = 24$, 23, 22, 21; $\alpha = \beta^* = 12$, 8, 4, 0; $g' = h^* = 183$, 170, 158, 147; $r' = r^* = 30$, $t' = t^* = 8$, 6, 4, 2. Für diese hat man $D = \varDelta = 1$, $\theta = 0$, $d = 0$, 1, 2, 3, 4, 5; $\alpha = \beta = 0$; $r = 8$; etc. Welche Bedeutung hat in allen diesen Fällen der Umstand, dass das Geschlecht -1 sich ergiebt?

Von den weiteren Ordnungen will ich nur Folgendes bemerken:

Raumcurven siebenter Ordnung. Unter 192 erklärten Species sich selbst dualer Curven fanden sich 19 vom Geschlecht 1 und 9 vom Geschlecht 2, dagegen 83 vom Geschlecht 0 und der Rest vom Geschlecht -1. Sie vertheilen sich auf acht Arten mit $g = h = 9$ bis $g = h = 16$ und ($r = 24$), bis (r=10). Von jeder Art sei eine Species angeführt, mit möglichst niedriger Ordnungszahl der Developpabeln.

I. $g = h = 9$, $(r = 24)$. Durchdringung von F_2 und F_4 mit einer gemeinsamen Geraden oder von F_2 und F_6 mit einer Raumcurve fünfter Ordnung mit vier scheinbaren Doppelpuncten etc. $D = 2$, $\alpha = 4$, $\theta = 0$, $d = 0$, $r = 8$, $m^* = 14$, $\alpha' = 4$, $g' = 45$, $r' = 16$, $t^* = 4$.

II. $g = h = 10$, $(r = 22)$. Durchdringung von F_3 und F_3 mit gemeinsamem Kegelschnitt oder von F_3 und F_4 mit Raumcurve fünfter Ordnung mit vier scheinbaren Doppelpuncten etc. $D = 1$, $\alpha = 4$, $\theta = 0$, $d = 0$, $r = 8$, $m^* = 14$, $\alpha' = 8$, $g' = 48$, $r' = 18$, $t^* = 4$.

III. $g = h = 11$ $(r = 20)$. Durchdringung von F_3 und F_4 mit Raumcurve fünfter Ordnung mit fünf scheinbaren Doppelpuncten, etc. $D = 0$, $\alpha = 4$, $\theta = 0$, $d = 0, 1, 2, 3$; $r = 8$, $m^* = 14$, 13, 12, 11; $\alpha' = 12$, 8, 4, 0; $g' = 51$, 44, 38, 33; $r' = 20$, $t^* = 4$.

IV. $g = h = 12$ $(r = 18)$. Durchdringung von F_3 und F_4 mit Curve fünfter Ordnung von fünf scheinbaren Doppelpuncten, etc. $D = 0$, $\alpha = 3$, $\theta = 2$, $d = 0, 1, 2, 3$; $r = 9$, $m^* = 19$, 18, 17, 16; $\alpha' = 7$, 6, 5, 4; $g' = 105$, 95, 86, 78; $r' = 27$, $t^* = 7$, 6, 5, 4.

V. $g = h = 13$ $(r = 16)$. Durchdringung von F_2 und F_6 mit gemeinsamer Curve dritter Ordnung nebst zwei Geraden $(h = 7)$ etc. $D = 0$, $\alpha = 2$, $\theta = 4$, $d = 0$, 1; $r = 10$, $m^* = 25, 24$; $\alpha' = 12$, 10; $g' = 196$, 182; $r' = 34$, $t^* = 12$, 10.

VI. $g = h = 14$ $(r = 14)$. Durchdringung von F_2 und F_6 mit Kegelschnitt und drei Geraden $(h = 9)$ etc. $D = 0$, $\alpha = 1$, $\theta = 6$, $d = 1$, $r = 11$, $m^* = 31$, $\alpha' = 17$, $g' = 295$, $r' = 41$, $t^* = 17$.

VII. $g = h = 15$ $(r = 12)$. Durchdringung von F_3 und F_4 mit Kegelschnitt und drei Geraden $(h = 9)$ etc. $D = 0$, $\alpha = 0$, $\theta = 8$, $d = 0$, $r = 12$, $m^* = 40$, $\alpha' = 24$, $g' = 552$, $r' = 48$, $t^* = 32$.

VIII. $g = h = 16$, $(r = 10)$. Durchdringung von F_3 und F_4 mit fünf windschiefen Geraden. Geschlecht -1; $D = 0$, $\alpha = 0$, $\theta = 2$, $d = 0$ bis $= 5$, $r = 10$, etc.

Raumcurven achter Ordnung, 766 erklärte Species, welche sich auf zwölf Arten vertheilen und deren Geschlechter bis auf 5 ansteigen. Ich will nur die rationalen vollständigen Durchdringungen anführen, $g = h = 12$, $(r = 32)$, unter 21 Fällen 12, nämlich in Paaren mit $D = 4$, $\alpha = 5$, $\theta = 0$, $d = 0$ oder $= 1$, $r = 9$, $\alpha' = 4$ oder $= 0$, $r' = 22$; mit $D = 5$, $\alpha = 4$, $\theta = 2$, $d = 0$ oder $= 1$, $r = 10$, $\alpha' = 4$ oder $= 0$, $r' = 28$; mit $D = 6$, $\alpha = 3$, $\theta = 4$, $d = 0$ oder $= 1$, $r = 11$, $\alpha' = 4$ oder $= 0$, $r' = 34$; mit $D = 7$, $\alpha = 2$, $\theta = 6$, $d = 0$ oder $= 1$, $r = 12$, $\alpha' = 4$ oder $= 0$, $r' = 40$; mit $D = 8$, $\alpha = 1$, $\theta = 8$, $d = 0$ oder $= 1$, $r = 13$, $\alpha' = 4$ oder $= 0$, und mit $D = 9$, $\alpha = 0$, $\theta = 10$, $d = 0$ oder $= 1$, etc.

Unter den Raumcurven neunter Ordnung, welche vollständige Durchdringungen sind, (also mit $d = 0$, $g = h = 18$, $(r = 36)$, giebt es 62 sich selbst duale Species, deren Geschlechter von 10 bis 0 variiren; das Geschlecht 0 erscheint bei sieben derselben, nämlich bei $D = \varDelta = 4$, $\alpha = \beta = 6$,

$\theta = 0$, $r = 10$, $m^* = n' = 27$, $\alpha' = \beta^* = 14$, $g' = h^* = 213$, $r' = r^* = 34$, $t' = t^* = 20$; bei $D = \varDelta = 5$, $\alpha = \beta = 5$,

$\theta = 2$, $r = 11$, $m^* = n' = 34$, $\alpha' = \beta^* = 15$, $g' = h^* = 363$, $r' = r^* = 41$, $t' = t^* = 30$; bei $D = \varDelta = 6$, $\alpha = \beta = 4$,

$\theta = 4$, $r = 12$, $m^* = n' = 42$, $\alpha' = \beta^* = 16$, $g' = h^* = 585$, $r' = r^* = 48$, $t' = t^* = 44$; bei $D = \varDelta = 7$, $\alpha = \beta = 3$, $r = 13$, etc., bei $D = \varDelta = 8$, $\alpha = \beta = 2$, $r = 14$, etc.; bei $D = \varDelta = 9$, $\alpha = \beta = 1$, $r = 15$, etc; endlich bei $D = \varDelta = 10$ mit $\alpha = \beta = 0$, $\theta = 12$, $r = 16$, $m^* = n' = 84$, $\alpha' = \beta^* = 20$, $g' = h^* = 2658$, $r' = r^* = 76$, $t' = t^* = 160$. Das Geschlecht -1 kommt nicht mehr vor.

[Dr. W. Fiedler].

Ueber das Sehen der Sterne aus tiefen Brunnen. — Herr Ferdinand Carpentier in Zürich hat mir am 5. Februar 1874 folgende Notiz zugesandt, welche ich glaube ohne weitere Bemerkung als ein interessantes Zeugniss für eine sonst meist bezweifelte Thatsache veröffentlichen zu sollen. Er schrieb mir: „Als ich ein Knabe von 10 bis 12 Jahren war (also Ende der 20ger Jahre) grub man in Burg bei Magdeburg einen Brunnen von circa 90 Fuss Tiefe. Ein anderer Knabe meines Alters, ein Kamerad, erzählte mir, dass wenn man in den Brunnen hinabsteige, man bei hellem Tage die Sterne sehen könne. Ich wollte mich davon überzeugen und stieg zu diesem

Zwecke ebenfalls in den Brunnen hinab, und sah nun aus der Tiefe wirklich mehrere Sterne am Himmel. Es sind seit jener Zeit etwa 45 Jahre verflossen, so dass ich nicht mehr angeben kann, zu welcher Jahreszeit das Erzählte stattfand, sowie ich überhaupt nähere Details begreiflicherweise wieder vergessen habe; der Thatsache aber erinnere ich mich noch sehr genau und verbürge ihre Richtigkeit." [R. Wolf.]

Auszüge aus den Sitzungsprotokollen.

A. Sitzung vom 4. Januar 1875.

1. In Abwesenheit des Herrn Bibliothekars legt der Herr Präsident ein Geschenk des Herrn Prof. Kölliker in Würzburg vor.

2. Herr Dr. Ch. Mayer berichtet über seine geologische Reise durch die Basilicata. Seitdem es eine geologische Wissenschaft gibt, seit Anfang des Jahrhunderts, ist die Landplage des Räuberwesens in Süditalien verbreitet, daher denn das Innere Dieses geologisch wenig bekannt. In neuerer Zeit endlich hat die Sicherheit auf dem Festlande mit Ausnahme von Calabrien genugsam zugenommen, um den einzelnen, freilich bewaffneten Forscher fast gefahrlos seinen Untersuchungen nachgehen zu lassen. — Auf Nachrichten dieser Art gestützt, machte der Vortragende, theils zu Wagen, theils zu Fuss, die Tour Salerno-Potenza-Bari hin und her, mit Abstechern von Potenza nach Pietragalla und nach Albano und er fand dabei folgende Anordnung der Sediment-Abtheilungen. Die grosse Küsten-Ebene Salerno-Eboli-Pastum hat, den am Fluss Sele sichtbaren Schichten nach, schon zu Anfang der Diluvialzeit sich zu bilden begonnen, während ihr innerer Stand von oberpliocänen (Travertin-)Hügeln gebildet wird. — Hinter diesen Hügeln streicht der Flysch über den Sele und gewinnt bald eine kolossale Verbreitung, so dass die älteren Gebilde nur inselartig aus ihm hervortauchen. Seine bunte, oft grelle Färbung scheint von umgearbeiteten, älteren, grellgefärbten Gesteinen (Lodevian? Karnian?) herzurühren. — Das grosse und hohe Plateau zwischen Postiglione, Auletta und