Aus- und Einströmen elastischer Flüssigkeiten bei variabelen Pressungen.

Von

Albert Fliegner,

Professor der theor. Maschinenlehre.

Das im Titel angedeutete Problem ist zuerst von Hrn. Prof. Bauschinger im 8. Bd. der Zeitschrift für Mathematik und Physik (S. 81, „Theorie des Ausströmens vollkommener Gase aus einem Gefässe und ihres Einströmens in ein solches") behandelt worden. Im Wesentlichen denselben Gedankengang schlägt Herr Prof. Zeuner dabei in seinen „Grundzügen der mechanischen Wärmetheorie" (II. Aufl. S. 173, „Ueberströmen der Gase bei constantem Gefässvolumen") ein; ebenso gehen Andere vor.

Allen diesen Lösungen liegt zunächst die Annahme zu Grunde, dass der sich bewegenden Flüssigkeit, und auch der in den Gefässen enthaltenen, Wärme weder mitgetheilt noch entzogen werde.

Im Ausströmungsgefässe sodann wird unter Annahme eines gegenüber der Mündung genügend grossen Gefässes eine adiabatische Expansion der zurückgebliebenen Flüssigkeitsmenge vorausgesetzt.

Die Zustandsänderung im Einströmungsgefässe dagegen wird daraus gefunden, dass in beiden Gefässen zusammengenommen die innere Arbeit constant bleiben muss. Hat man dann den Zustand im Ausströmungsgefässe berechnet, so kann man auch den im Einströmungsgefässe finden. So geht allerdings das Einströmen nicht selbstständig zu untersuchen, sondern nur als Specialfall des Ueberströmens. Bauschinger behandelt desshalb auch das Einströmen gesondert, und nimmt adiabatische Compression und darauf Mischung mit der eingeströmten Flüssigkeitsmenge an.

Die angedeuteten Entwickelungen haben nun jedenfalls das Unbefriedigende, dass sie diesen entschieden nicht umkehrbaren Process nach denjenigen Fundamentalgleichungen beurtheilen, welche die mechanische Wärmetheorie für den umkehrbaren Process ableitet. Ausserdem werden für das Einströmen Grundgleichungen aufgestellt, welche von den für das Ausströmen gefundenen nach Entstehung und Gestalt wesentlich verschieden sind, während man eigentlich erwarten sollte, dass sich diese beiden analogen, nur entgegengesetzten, Vorgänge durch dieselbe Differentialgleichung müssten darstellen lassen.

Es war daher mein Bestreben diese nicht umkehrbaren Vorgänge (ich halte dabei eine nicht umkehrbare Compression für ebenso gut möglich, wie eine solche Expansion) auch nach den Grundsätzen des nicht umkehrbaren Processes zu verfolgen, und gleichzeitig zu untersuchen, ob etwa die eben angedeuteten Entwickelungen mit ihren Annäherungen zu weit gehen. Dabei habe ich allerdings die schon dort berechneten Resultate vollkommen bestätigt gefunden, halte aber doch den von mir eingeschlagenen Weg für wesentlich rationeller und darum auch einer Veröffentlichung werth.

Natürlich darf man bei Lösung dieses Problems nicht einfach von den Gleichungen Gebrauch machen, die (z. B. von Zeuner in den „Grundzügen der mech. Wärmeth. S. 146 und flgd.) für den gewöhnlichen nicht umkehrbaren Process entwickelt werden. Diese setzen nämlich voraus, dass die ihren Zustand ändernde Flüssigkeitsmenge constant sei, was hier aber durchaus nicht der Fall ist, nicht einmal annähernd. Man muss vielmehr von Anfang an neu entwickeln.

Vorher soll aber noch, weil diese Grösse später nöthig ist, die Ausströmungsgeschwindigkeit einer elastistischen Flüssigkeit bei constanten Pressungen abgeleitet werden. Der dazu eingeschlagene Weg ist meines Wissens auch neu.

I. Bestimmung der Ausflussgeschwindigkeit bei constanten Pressungen.

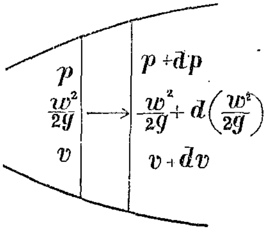
Nach den fundamentalen Entwickelungen der mechanischen Wärmetheorie bringt die einem Kilogramme eines Körpers zugeführte unendlich kleine Wärmemenge dQ an demselben folgende Arbeitsverrichtungen hervor: Vergrösserung der inneren Arbeit, dU, durch Vergrösserung der Intensität der Molekularbewegung (Temperaturerhöhung) und Ueberwindung der gegenseitigen Krafteinwirkungen der Moleküle bei der Volumenänderung des Körpers; Verrichtung von äusserer Arbeit, dL, durch Ueberwindung des äusseren Gegendruckes bei der Ausdehnung; und Aenderung der lebendigen Kraft einer etwaigen offenen Bewegung, dN. Bezeichnet, wie gewöhnlich, A das calorische Aequivalent der Arbeitseinheit, so stehen die genannten vier Grössen in dem bekannten Zusammenhange:

$$dQ = A(dU + dL + dN). \qquad (1)$$

Von den drei Arbeitsgrössen auf der rechten Seite der Gleichung ist dU je nach der Art des betrachteten Körpers verschieden; ferner ist sofort, wenn w die Geschwindigkeit an einer Stelle des Flüssigkeitsstromes bedeutet, für jedes durchgeflossene Kilogramm

$$dN = d\left(\frac{w^2}{2g}\right).$$

Eine längere Bestimmung dagegen erfordert dL. Betrachtet man ein unendlich kurzes Stück der bei flüssigen Körpern in einem Rohre anzunehmenden Bewegung, so gehen Druck und specifisches Volumen von den Anfangswerthen p, v über in die Endwerthe $p + dp$ und $v + dv$. Auf jedes Klgr. der Flüssigkeit wird dann, um es in die betrachtete Strecke eintreten zu lassen, von der dahinter befindlichen Flüssigkeit eine Arbeit pv ausgeübt werden müssen;



beim Verlassen der Strecke verrichtet es aber, um sich Platz zu schaffen, die Arbeit $(p + dp)(v + dv)$. Die effectiv allein durch die Zustandsänderung des durchgeströmten Kilogrammes gewonnene äussere Arbeit ist dann

$$dL = (p + dp)(v + dv) - pv.$$

Multiplicirt man aus, und vernachlässigt das auftretende Product der Differentiale gegenüber den ersten Potenzen, so wird einfach

$$dL = d(pv),$$

nicht, wie sonst, $= pdv$, weil hier nicht an allen Stellen des expandirenden Körpers gleichzeitig derselbe Druck herrscht.

Die Gl. (1) erhält dann durch Einsetzen der berechneten Arbeiten die Gestalt

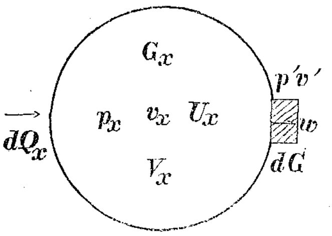
$$dQ = A\left[dU + d(pv) + d\left(\frac{w^2}{2g}\right)\right]. \qquad (2)$$

Nimmt man nun an, wie es beim Ausflussproblem allgemein geschieht, dem bewegten Körper werde Wärme weder mitgetheilt noch entzogen, d. h. es sei $dQ = 0$, so erhält man durch Integration zwischen dem Zustande im Inneren des Gefässes, p_2, v_2, U_2, $w_2 = 0$, und dem Zustande in der Mündungsebene, p', v', U', w, für die dort herrschende Geschwindigkeit das längst bekannte Resultat:

$$\frac{w^2}{2g} = U_2 - U' + p_2 v_2 - p'v'. \qquad (3)$$

Hieraus lassen sich leicht die übrigen Formeln für das Ausströmen elastischer Flüssigkeiten herleiten, wenn man berücksichtigt, dass sich der Zustand beim Hinströmen nach der Mündung adiabatisch ändert.

II. Ausströmen bei variabelem innerem Drucke.



Die Grössen, welche sich auf den Zustand im Inneren des Ausflussgefässes, und zwar auf den sogenannten Gleichgewichtszustand, beziehen, erhalten den Index x. Ausser den schon benutzten bedeutet G_x das enthaltene variabele Flüssigkeitsgewicht, V_x das constante Gefässvolumen. Es besteht dann sofort zwischen G_x, v_x, V_x die Beziehung

$$G_x v_x = V_x = \text{Const.} \tag{4}$$

Den Ausfluss selbst denke ich mir nun in folgender Weise successive vor sich gehend. Ein in der Mündungsebene befindlicher gewichtloser Kolben wird um unendlich wenig vorgeschoben und immer gleich wieder durch einen neuen in der Mündungsebene ersetzt.

Wird bei einem solchen unendlich kurzen Processe dem Gefässe die Wärmemenge dQ_x zugeführt, so verrichtet dieselbe folgende Arbeiten:

1. Aenderung der inneren Arbeit, die, weil sich G_x und U_x ändern, $d(G_x U_x)$ ist.

2. Verrichtung von äusserer Arbeit durch Ueberwindung des Druckes p' in der Mündungsebene beim Vorschieben des Kolbens. Würde das Ausströmen bei constanten Pressungen erfolgen, so wäre diese Arbeit für jedes ausgeströmte Kilogramm der Flüssigkeit $p'v'$. Hier hat man es nur mit dem Ausströmen des unendlich kleinen Flüssigkeitsgewichtes dG zu thun. Während dessen kann man den Zustand in der Mündungsebene als constant ansehen, und erhält dann die verrichtete äussere Arbeit gleich $p'v'dG$.

3. Das zwischen beiden Kolben befindliche, zum Ausströmen gelangende Flüssigkeitsgewicht dG enthält bei der durch das Vorschieben des nächsten Kolbens erreichten Trennung von dem zurückbleibenden Gefässinhalt eine innere Arbeit $U'dG$ und eine lebendige Kraft $\frac{w^2}{2g}\,dG$, weil es den Raum zwischen beiden Kolben mit der Geschwindigkeit w durchströmt. Diese Arbeiten,

und ebenso die ihnen äquivalenten Wärmemengen, gehen dem zurückbleibenden Flüssigkeitsquantum verloren, man muss sie demnach von der mitgetheilten Wärmemenge subtrahiren und erhält als Differentialgleichung für das Ausströmen:

$$dQ_x - A\left(U' + \frac{w^2}{2g}\right)dG = A\left[d(G_x U_x) + p'v'dG\right),$$

oder, wie derartige Gleichungen meist geschrieben werden,

$$dQ_x = A\left[d(G_x U_x) + \left(p'v' + U' + \frac{w^2}{2g}\right)dG\right]. \quad (5)$$

dG bedeutet darin also die ausgeströmte Flüssigkeitsmenge.

In Gl. (5) kann man noch w aus Gl. (3) einsetzen, nur mit dem Index x statt 2. Dabei ist allerdings angenommen, dass man zur Berechnung der augenblicklichen Ausflussgeschwindigkeit einer Flüssigkeit, welche sich bei einem nicht umkehrbaren Processe in wirbelnder Bewegung befindet, als inneren Zustand den Gleichgewichtszustand einführen könne. Diese Hypothese dürfte sich aber kaum anfechten lassen. Die Ausflussgeschwindigkeit hängt nämlich allein ab von der Arbeitsfähigkeit der inneren Flüssigkeitsmenge, und diese Arbeitsfähigkeit wird nicht geändert, ob die Moleküle im Gleichgewichtszustande einen gewissen Beharrungszustand ihrer Bewegung angenommen haben, oder ob sie sich in wirbelnder, unregelmässiger Bewegung befinden. Diese Annahme macht übrigens auch Herr Prof. Grashof in seiner „theoretischen Maschinenlehre“ (I. Bd. S. 688). Sie ist auch identisch mit derjenigen, dass bei unendlich oft unterbrochenem Ausströmen und Abwarten des

Eintrittes vom Gleichgewichtszustande, mit dem Wiedereröffnen plötzlich der Beharrungszustand des Ausströmens sich einstelle. Ferner ist angenähert vorausgesetzt, dass dQ_x ohne Einfluss auf w sei.

Substituirt man also danach w aus Gl. (3) in Gl. (5), so wird dieselbe

$$dQ_x =$$
$$A\,[d(G_x U_x) + (p'v' + U' + U_x - U' + p_x v_x - p'v')\,dG].$$

Hier hebt sich der Zustand in der Mündungsebene ganz fort, und das ist vortheilhaft, weil derselbe noch unbekannt ist. Führt man dann $d(G_x U_x)$ aus und berücksichtigt, dass das ausgeströmte Gewicht $dG = -dG_x$, der Zunahme von G_x, ist, also $U_x\,dG_x + U_x\,dG = 0$, so ergibt sich

$$dQ_x = A(G_x d\,U_x + p_x\,v_x dG). \qquad (6)$$

Weiterhin soll nun auch die gewöhnliche Annahme gemacht werden, dass der Process ohne Wärmeaustausch stattfinde, dann ist $d\,Q_x = 0$ und

$$G_x\,dU_x + p_x v_x\ dG = 0. \qquad (7)$$

Hier sind noch drei Variabele enthalten, p_x, v_x und $G_x \cdot U_x$ ist eine Function von p_x und v_x, und $d\,G$ ist $= -\,d\,G_x$.

Um den Zusammenhang von p_x und v_x allein, d. h. das Gesetz der Aenderung des Gleichgewichtszustandes im Inneren des Gefässes, zu erhalten, kann man nach Gl. (4) G_x und dG eliminiren. Danach ist

$$G_x\,dv_x + v_x\,d\,G_x = G_x\,dv_x - v_x\,d\,G = 0, \text{ oder}$$
$$v_x\,d\,G = G_x\,dv_x.$$

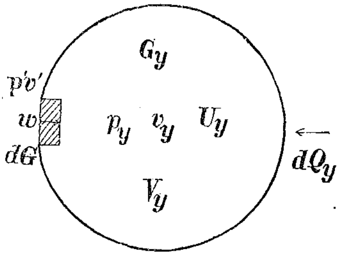
Setzt man das in Gl. (7) ein, so hebt sich G_x fort, und es bleibt als Aenderungsgesetz

$$d\,U_x + p_x\,dv_x = 0. \qquad (8)$$

Das ist aber die allgemeine Gleichung der adiabatischen Curve beim umkehrbaren Processe. Diese Annahme, von der H. Bauschinger ausgeht, zeigt sich also als genau richtig, wenn meine Hypothese über die Berechnung der Ausflussgeschwindigkeit aus dem Gleichgewichtszustande zulässig ist.

Die Abhängigkeit des inneren Gleichgewichtszustandes, p_x, T_x, vom Flüssigkeitsinhalte G_x oder dem ausgeströmten Gewichte G lässt sich nicht allgemein angeben, so lange nicht $U = \mathfrak{F}(p, v)$ bekannt ist. Da aber diese Function bei den verschiedenen Körpern verschieden ist, so muss eine weitere Ausführung speciellen Beispielen vorbehalten bleiben.

III. Einströmen bei variabelem innerem Drucke.



Die Grössen, welche sich auf den inneren Zustand beziehen, erhalten den Index y. V_y ist auch constant, daher

$$G_y v_y = V_y = \text{Const.} \quad (9)$$

dG bezeichnet hier das eingeströmte Flüssigkeitsgewicht, ist also gleich dG_y, der Zunahme von G_y. p_1, v_1 beziehen sich auf den äusseren Zustand und sollen dabei als constant angesehen werden.

Wird nun auch ein analoges successives Einströmen angenommen, wie vorhin ein Ausströmen, und ebenfalls zunächst noch allgemein eine Wärmemenge dQ_y zugeführt, so vergrössert dieselbe

1. die innere Arbeit um $d(G_y U_y)$. Die Wirkung von dQ_y wird noch unterstützt durch

2. die äussere Arbeit, welche durch den unter dem Drucke p' sich einwärts bewegenden Kolben auf den Inhalt des Gefässes ausgeübt wird. Dieselbe ist analog wie beim Ausströmen $p'v'dG$.

3. Die einströmenden dG Klgr. enthalten in der Mündungsebene eine innere Arbeit $U'dG$ und eine lebendige Kraft $\frac{w^2}{2g}\,dG$, welche die gesammte innere Arbeit der schliesslichen Mischung vermehrt.

Die unter 2 und 3 aufgezählten Arbeiten unterstützen also die zugeführte Wärmemenge, und es ist daher

$$dQ_y + A\left(p'v' + U' + \frac{w^2}{2g}\right)dG = A\,d(G_y\,U_y)$$

oder in der gebräuchlichen Schreibweise

$$dQ_y = A\left[d(G_y\,U_y) - \left(p'v' + U' + \frac{w^2}{2g}\right)dG\right] \tag{10}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem in Gl. (5) für das Ausströmen gefundenen, so unterscheidet er sich von jenem zunächst, was aber natürlich unwesentlich ist, durch den Index y anstatt x, sodann aber durch das entgegengesetzte Vorzeichen des mit dG multiplicirten Gliedes. Dieses entgegengesetzte Zeichen entspricht nun dem Gegensatze von Ausströmen und Einströmen, und man kann also wirklich beide Vorgänge nach derselben Differentialgleichung beurtheilen.

Die weitere Entwickelung wird aber sofort verschieden. Setzt man nämlich auch, wie vorhin, die Geschwindigkeit w aus Gl. (3) ein, so muss man als Anfangszustand den äusseren Zustand p_1, v_1, U_1 ansehen und erhält:

$$dQ_y = A[d(G_y U_y) - (p'v' + U' + U_1 - U' + p_1 v_1 - p'v')dG].$$

Der Zustand in der Mündungsebene fällt auch hier fort, und es wird:

$$dQ_y = A[d(G_y U_y) - (U_1 + p_1 v_1) dG]. \qquad (11)$$

Eine Reduction auf die Gl. (6) analoge einfachere Form ist nicht mehr möglich, weil in beiden Gliedern der rechten Seite verschiedene Zustände stehen, während sich beim Ausströmen alle Grössen auf den inneren Zustand bezogen.

Setzt man weiter auch $dQ_y = 0$, so geht Gl. (11) über in:

$$d(G_y U_y) - (U_1 + p_1 v_1)dG = 0. \qquad (12)$$

Das Gesetz der Zustandsänderung im Inneren des Einströmungsgefässes kann man hieraus durch Elimination von G_y und G nach Gl. (9) erhalten. Danach ist

$$G_y = \frac{V_y}{v_y} \text{ und}$$

$$G_y dv_y + v_y dG_y = \frac{V_y}{v_y} dv_y + v_y dG.$$

Damit wird Gl. (12), da sich V_y forthebt:

$$d\left(\frac{U_y}{v_y}\right) + (U_1 + p_1 v_1) \frac{dv_y}{v_y^2} = 0. \qquad (13)$$

Eine allgemeine Bedeutung dieses Zusammenhanges lässt sich nicht angeben, jedenfalls erfolgt aber die Aenderung des Gleichgewichtszustandes hier nicht adiabatisch.

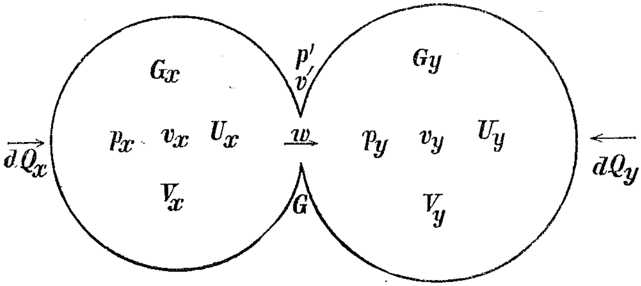
IV. Ueberströmen bei constantem Gefässvolumen.

In diesem Falle ist das in den beiden Gefässen zusammen enthaltene Flüssigkeitsgewicht constant, also

$$G_x + G_y = \text{Const.} \tag{14}$$

Ferner ist, wenn dG das übergeströmte Gewicht bedeutet

$$dG_x = -dG, \; dG_y = +dG. \tag{15}$$



Das Aus- und Einströmen bei variabelem Drucke ist nun in den Glchgn. (5) und (10) als von dem Zustande im Inneren des Gefässes und demjenigen in der Mündungsebene abhängig gefunden worden. Der letztere Zustand ist aber hier für beide Gefässe identisch, nämlich der in ihrer Trennungsfläche. Es behalten sonach diese Gleichungen in ganz unveränderter Form ihre Gültigkeit auch für das Ueberströmen. Addirt man beide, so hebt sich das mit dG multiplicirte Glied fort und man erhält:

$$dQ_x + dQ_y = A[d(G_x U_x) + d(G_y U_y)], \tag{16}$$

oder unter der alten Annahme, dass

$$dQ_x = 0 \text{ und } dQ_y = 0 \text{ sei,}$$
$$d(G_x U_x) + d(G_y U_y) = 0, \text{ das ist}$$
$$G_x U_x + G_y U_y = \text{Const.} \tag{17}$$

Von dieser, hier als nothwendige Folge der früheren Gleichungen sich ergebenden Constanz der gesammten inneren Arbeit in beiden Gefässen gehen Bauschinger, Zeuner, u. A. aus, um den Zustand im Einströmungsgefässe zu ermitteln.

Die Zustandsänderung im Ausflussgefässe hat sich in den Glchgn. (7) und (8) ganz unabhängig von dem äusseren Zustande gezeigt, insofern man nicht die Zeit, sondern den Flüssigkeitsinhalt oder das ausgeströmte Gewicht als Urvariabele einführt. Es gelten diese Gleichungen also ungeändert auch für's Ueberströmen.

Im Einströmungsgefässe dagegen erscheint nach Gl. (12) die Zustandsänderung abhängig vom äusseren Zustande, der aber hier identisch ist mit dem Zustande im Ausströmungsgefässe. Man muss also anstatt des Index 1 denjenigen x einsetzen, und erhält:

$$d(G_y U_y) - (U_x + p_x v_x)\, dG = 0. \tag{18}$$

Glchg. (13) dagegen, welche das Aenderungsgesetz unabhängig vom übergeströmten Gewicht G darstellt, schreibt sich dann:

$$d\left(\frac{U_y}{V_y}\right) + (U_x + p_x v_x)\,\frac{dv_y}{v_y^2} = 0. \tag{19}$$

In der Gestalt $\mathfrak{F}(p_y, v_y) = 0$ lässt sich wegen Verschiedenheit der Function U bei verschiedenen Körpern der Zusammenhang dieser beiden Grössen auch nicht allgemein darstellen, in speziellen Fällen dagegen ist die Elimination des Zustandes im Ausflussgefässe, sowie auch des übergeströmten Gewichtes G möglich, wenn auch die Gleichungen keine besonders einfache Gestalt erhalten.

V. Anwendung der entwickelten Formeln auf überhitzte Dämpfe.

Das Verhalten der permanenten Gase, nach diesen Formeln beurtheilt, liefert die Bauschinger-Zeuner'schen Resultate; es wäre also eine nochmalige Entwickelung derselben zwecklos. Doch werde ich jene Formeln zur Vergleichung heranziehen und zwar in der Gestalt, in welcher sie Zeuner in den „Grundzügen der mechan. Wärmetheorie", 2. Aufl., Seite 173 u. flgd. giebt.

Die Anwendung der allgemeinen Formeln auf gesättigte Dämpfe ist einstweilen noch nicht gut möglich, bis einmal alle in's Spiel kommenden Grössen genau und in bequemer Form als Functionen des Druckes bekannt sind. Die überhitzten Dämpfe dagegen lassen sich untersuchen, natürlich unter der Voraussetzung, dass der Dampf stets überhitzt bleibt. Man erhält Gleichungen, aus denen man leicht diejenigen für permanente Gase herleiten kann.

Das Verhalten der überhitzten Dämpfe beurtheile ich dabei, mit unwesentlichen Modificationen in der Bezeichnnug, nach den Formeln, welche Herr Prof. Zeuner in der „Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure" 1867 gegeben hat. Danach ist die innere Arbeit

$$U = \frac{pv}{\lambda - 1} + U_0, \tag{20}$$

wobei U_0 eine unbestimmbare Integrationsconstante bedeutet, deren Grösse aber nicht in Betracht kommt, da sie sich stets weghebt. λ ist der Exponent der adiabatischen Curve der überhitzten Dämpfe

$$pv^\lambda = C, \tag{21}$$

und zwar nach Zeuner

$$\lambda = \frac{4}{3}.$$

Die Zustandsgleichung hat die Gestalt

$$pv = B\left(T - \beta p^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\right) \doteq B\left(T - \beta\sqrt[4]{p}\right). \qquad (22)$$

B und β sind Constanten; setzt man sie $B = R$ und $\beta = 0$, so geht die Gleichung in das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz $pv = RT$ für permanente Gase über. Dadurch kann man einfach aus den für überhitzte Dämpfe zu entwickelnden Gleichungen diejenigen für permanente Gase herleiten.

Das Ausströmen. Dabei ändert sich der Zustand im Inneren des Gefässes nach der adiabatischen Curve, (vergl. Gl. 8), p_x und v_x hängen also hier nach Gl. (21) zusammen.

Nun ergiebt Gl. (7) den Zusammenhang zwischen Druck und Dampfinhalt. Für überhitzte Dämpfe nimmt sie zunächst die Gestalt an:

$$G_x\, d\left(\frac{p_x v_x}{\lambda - 1}\right) + p_x v_x\, dG = 0.$$

Führt man $d(p_x v_x)$ im ersten Gliede aus und multiplicirt die ganze Gleichung mit $\frac{\lambda - 1}{G_x p_x v_x}$, so erhält man, weil noch nach Gl. (4) $\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{dG_x}{G_x} = \frac{dG}{G_x}$ ist:

$$\frac{dp_x}{p_x} + \lambda \frac{dG}{G_x} = \frac{dp_x}{p_x} - \lambda \frac{dG_x}{G_x} = 0$$

In der zweiten Form integrirt erhält man zunächst einen logn., daraus dann aber sofort:

$$p_x G_x^{-\lambda} = \text{Const.} \qquad (23)$$

Bezeichnet man den Anfangszustand mit dem Index 1 und führt man anstatt des Dampfinhaltes G_x das ausgeströmte Dampfgewicht

$$G = G_1 - G_x$$

ein, so ergiebt Gl. (23)

$$p_x = p_1 \left(\frac{G_1 - G}{G_1}\right)^{\lambda}, \qquad (24)$$

und das ist, mit $\varkappa$ anstatt λ, genau die Zeuner'sche Gleichung 115 für permanente Gase.

Aus Gl. (4) folgt ferner

$$v_x = \frac{V_x}{G_x} = \frac{G_1\, v_1}{G_1 - G}, \qquad (25)$$

welche Glchg. Zeuner auf Seite 175 unten aufführt.

Nun kann man auch nach Gl. (22) die Temperatur bestimmen, sie wird:

$$T_x = \frac{p_x\, v_x}{B} + \beta p_x^{\frac{\lambda - 1}{\lambda}}.$$

Setzt man p_x und v_x aus den Glchgn. (24) und (25) ein, so kann man leicht die Anfangstemperatur T_1 in die Formel bringen und erhält Zeuner's Gl. 116, nämlich:

$$T_x = T_1 \left(\frac{G_1 - G}{G_1}\right)^{\lambda - 1}. \qquad (26)$$

Dieser Werth von T_x muss nun grösser ausfallen, als der aus den Dampftabellen zu entnehmende, dem Drucke p_x aus Gl. (23) entsprechende Werth der Temperatur, sonst ist der Dampf in den gesättigten Zustand übergegangen, und die Formeln gelten gar nicht mehr.

Für das Ausströmen der überhitzten Dämpfe ergeben sich also genau die für permanente Gase geltenden Formeln.

Das Einströmen. Die Zustandsänderung im Inneren des Gefässes folgt dem Gesetze der Gl. (13), welche für überhitzte Dämpfe

$$d\left(\frac{p_y}{\lambda-1}+\frac{U_0}{v_y}\right)+\left(\frac{p_1 v_1}{\lambda-1}+U_0+p_1 v_1\right)\frac{dv_y}{v_y{}^2}=0$$

wird. Der Index 1 bezieht sich dabei auf den constanten äusseren Zustand, und man erhält durch Integration und nach einfacher Reduction das Aenderungsgesetz:

$$p_y-\lambda p_1\frac{v_1}{v_y}=\text{Const.} \tag{27}$$

Bezeichnet man den Anfangszustand mit dem Index 2, so kann man den Druck als Function der eingeströmten Dampfmenge

$$G=G_y-G_2$$

erhalten, indem man entweder unter Berücksichtigung von Gl. (9) die Gl. (12) zwischen den betreffenden Grenzen integrirt, oder Gl. (27) weiter umfort. Es soll der letztere Weg eingeschlagen werden. Gl. (27) ergiebt sofort

$$p_y-\lambda p_1\frac{v_1}{v_y}=p_2-\lambda p_1\frac{v_1}{v_2},$$

und da nach Gl. (9)

$$V_y=G_y v_y=G_2 v_2$$

ist, so wird schliesslich:

$$p_y=p_2\left(1+\frac{\lambda\, G p_1 v_1}{G_2\, p_2\, v_2}\right). \tag{28}$$

Führt man nach der Zustandsgleichung (22) die Temperaturen ein, so wird

$$p_y = p_2 \left[1 + \frac{\lambda G\left(T_1 - \beta \sqrt[4]{p_1}\right)}{G_2\left(T_2 - \beta \sqrt[4]{p_2}\right)}\right]. \tag{29}$$

Gl. (29) ist für $\beta = 0$ die erste der beiden Zeuner'schen Glchgn. 126.

Ferner erhält man aus Gl. (9) sofort das specifische Volumen

$$v_y = \frac{V_y}{G_y} = \frac{G_2\, v_2}{G_2 + G}. \tag{30}$$

Aus den Glchgn. (22), (28) und (30) folgt dann die Temperatur zu

$$T_y = \frac{G_2\, p_2\, v_2 + \lambda G p_1\, v_1}{B(G_2 + G)} + \beta \sqrt[4]{p_2\left(1 + \frac{\lambda G p_1\, v_1}{G_2\, p_2\, v_2}\right)} \tag{31}$$

Führt man auch die Temperaturen T_1 aussen und T_2 am Anfang innen ein, so erhält man, da im Nenner des letzten Gliedes von Gl. (31) $G_2\, v_2 = V_y$ ist:

$$T_y = \frac{G_2\, T_2 + \lambda G T_1}{G_2 + G} + \beta\left(\sqrt[4]{p_2 + \frac{\lambda G p_1\, v_1}{V_y}} - \frac{G_2 \sqrt[4]{p_2} + \lambda G \sqrt[4]{p_1}}{G_2 + G}\right). \tag{32}$$

$\beta = 0$ ergiebt wieder Zeuner's Gl. 126 (die 2.); dieselbe ging aber dort nur durch Reihenentwickelung aus dem allgemeinen Falle des Ueberströmens zu specialisiren.

Es sollen die für das Einströmen gefundenen Formeln noch auf den Fall angewendet werden, dass das Gefäss anfangs ganz leer war; dazu braucht man nur $G_2 = 0$ und $p_2 = 0$ einzusetzen.

Dann ergiebt zunächst Gl. (27) das Gesetz der Zustandsänderung im Einströmungsgefässe. Nun ist am Anfang $p_2 = 0$ und auch $G_2 = 0$; da aber $G_2\, v_2 = V_y$ ist, so muss $v_2 = \infty$ angenommen werden. Die Constante von Gl. (27) wird daher Null, und man findet

$$p_y\, v_y = \lambda p_1\, v_1 = \text{Const.} \tag{33}$$

Der Zustand ändert sich also nach einer gleichseitigen Hyperbel. Bei permanenten Gasen ist das auch der Fall, dort ist diese Hyperbel aber gleichzeitig die isothermische Curve.

Der Druck berechnet sich einfach nach Gl. (28), wenn man mit p_2 in die Klammer multiplicirt und $G_2\, v_2 = V_y$ einsetzt, zu:

$$p_y = \frac{\lambda G p_1\, v_1}{V_y}. \tag{34}$$

Die Temperatur ergiebt sich dann sofort aus Gl. (32) zu

$$T_y = \lambda T_1 + \beta \left(\sqrt[4]{\frac{\lambda G p_1\, v_1}{V_y}} - \lambda \sqrt[4]{p_1} \right), \tag{35}$$

woraus folgt, dass sie im Verlaufe des Einströmens ununterbrochen zunimmt, nicht, wie bei permanenten Gasen, constant bleibt.

Beim Beginnen des Einströmens, wenn G noch unendlich klein ist, ist nach Gl. (34) auch der Druck unendlich klein, die Temperatur, T_y', dagegen wird nach Gl. (35) für $G = 0$.

$$T_y' = \lambda\left(T_1 - \beta\sqrt[4]{p_1}\right). \tag{36}$$

Nun ist β gegenüber T_1 klein und zwar so, dass auch bei höheren äusseren Pressungen und geringen Ueberhitzungen doch $T_y' > T_1$ wird. Da aber p_y fast gleich Null ist, so muss das erste in einen absolut leeren Raum eingetretene unendlich kleine Dampfgewicht sehr stark überhitzt sein.

Auf Grund der Zustandsgleichung lässt sich Gl. (36) auch schreiben

$$T_y' = \frac{\lambda p_1 v_1}{B}.$$

Das ist aber nach Gl. (33) auch

$$T_y' = \frac{p_y' v_y'}{B}, \tag{37}$$

wenn man Druck und specifisches Volumen unmittelbar nach Beginn des Einströmens mit p_y' und v_y' bezeichnet. Nun ist zwar p_y' unendlich klein, dafür aber v_y' unendlich gross, so dass doch Gl. (37) bestehen kann. Dieselbe zeigt uns, dass für diesen sehr stark überhitzten Dampf Temperatur, Druck und specifisches Volumen in genau dem gleichen Zusammenhange stehen, wie bei permanenten Gasen. Es kann demnach diese Specialisirung als weitere Begründung für die Anschauung gelten, dass die permanenten Gase nur sehr stark überhitzte Dämpfe sind.

Dasselbe Resultat findet man übrigens auch direct aus der Zustandsgleichung, wenn man eine sehr hohe

Temperatur und ihr gegenüber einen genügend kleinen Druck annimmt.

Das Ueberströmen. Da sich der Zustand im Ausströmungsgefässe genau so ändert, als wenn das Ausströmen in einen Raum mit constantem Drucke erfolgen würde, so sind nur noch die Gleichungen für das Einströmen aufzustellen.

Für überhitzte Dämpfe wird dann Gl. (18)

$$d\left(G_y \frac{p_y v_y}{\lambda - 1} + G_y U_0\right) - \left(\frac{\lambda}{\lambda - 1} p_x v_x + U_0\right) dG = 0. \tag{38}$$

Hierin muss man zunächst alle Variabelen durch p_y und G, sowie die für beide Anfangszustände geltenden Werthe ausdrücken. Dazu ist nach Gl. (24) und (25) für's Ausströmen

$$p_x v_x = p_1 v_1 \left(\frac{G_1 - G}{G_1}\right)^{\lambda - 1};$$

ferner nach Gl. (9) für's Einströmen

$$G_y v_y = G_2 v_2 = V_y.$$

Diese Werthe verwandeln Gl. (38) in

$$d\left(\frac{G_2 v_2}{\lambda - 1} p_y + G_y U_0\right) -$$
$$- \left[\frac{\lambda}{\lambda - 1} p_1 v_1 \left(\frac{G_1 - G}{G_1}\right)^{\lambda - 1} + U_0\right] dG = 0.$$

Durch bestimmte Integration vom Anfangszustande bis zum Ueberströmen von G^{kil} findet man, da sich U_0 weghebt:

$$\frac{G_2 v_2}{\lambda - 1} (p_y - p_2) + \frac{G_1 p_1 v_1}{\lambda - 1} \left[\left(\frac{G_1 - G}{G_1}\right)^{\lambda} - 1\right] = 0.$$

Daraus folgt für den Druck die Zeuner'sche Gl. 119:

$$p_y = p_2 \left(1 + \frac{G_1\, p_1\, v_1}{G_2\, p_2\, v_2} \left[1 - \left(\frac{G_1 - G}{G_1}\right)^\lambda\right]\right). \quad (39)$$

Da im Einströmungsgefässe auch

$$G_y\, v_y = G_2\, v_2 = V_y$$

ist, so wird das specifische Volumen

$$v_y = \frac{G_2\, v_2}{G_y} = \frac{G_2\, v_2}{G_2 + G}. \quad (40)$$

Schliesslich findet sich hiermit nach der Zustandsgleichung die Temperatur

$$T_y = \frac{1}{B(G_2 + G)} \left(G_2\, p_2\, v_2 + G_1\, p_1\, v_1 \left[1 - \left(\frac{G_1 - G}{G_1}\right)^\lambda\right]\right) + \\ + \beta \sqrt[4]{p_y}, \quad (41)$$

oder indem man rechts auch die Temperaturen einführt:

$$T_y = \frac{G_2\, T_2}{G_2 + G} + \frac{G_1\, T_1}{G_2 + G} \left[1 - \left(\frac{G_1 - G}{G_1}\right)^\lambda\right] + \\ \beta \left(\sqrt[4]{p_y} - \frac{G_2 \sqrt[4]{p_2}}{G_2 + G} - \left(\frac{G_1 \sqrt[4]{p_1}}{G_2 + G}\left[1 - \left(\frac{G_1 - G}{G_1}\right)^\lambda\right]\right)\right). \quad (42)$$

Ein Einsetzen von p_y würde die beiden letzten Formeln zu complicirt machen. $\beta = 0$ liefert hier übrigens auch wieder Zeuner's Gl. 120 für permanente Gase.

Das Gesetz der Zustandsänderung kann man nach Gl. (39) und (30) ganz leicht in die Gestalt

$$\mathfrak{F}(p_y,\ v_y) = 0$$

bringen; das Resultat ist aber ziemlich complicirt und soll daher nicht erst hingeschrieben werden.

Ebensowenig habe ich im Allgemeinen das Ende der Bewegung untersucht. Es tritt in den verschiedenen Fällen ein, wenn entweder p_x oder p_y gleich dem äusseren Drucke, oder beim Ueberströmen $p_y = p_x$ geworden ist. Setzt man die variabelen Pressungen in Function von G ein, so kann man das bis zu diesem Augenblicke übergeströmte Dampfgewicht und damit die übrigen noch unbekannten Grössen finden.

Eine Berechnung der Geschwindigkeit in der Mündungsebene wurde auch unterlassen, weil dazu die Kenntniss des dort herrschenden Druckes nöthig ist. Die Abhängigkeit desselben von p_y und p_x ist aber noch nicht bekannt. Ebensowenig geht die Zeit zu bestimmen, welche ein gewisses Dampfquantum zum Ueberströmen braucht.

Uebrigens sieht man aus den entwickelten Formeln; dass man überall, wo es sich um die Abhängigkeit nur von Druck, Volumen und übergeströmtem Flüssigkeitsgewichte handelt, für permanente Gase und überhitzte Dämpfe genau die gleichen Resultate erhält. Die Gleichungen weichen erst ab, wenn die Temperaturen hineinkommen, beim Ausströmen aber auch nicht einmal in diesem Falle. Der Grund dieser Uebereinstimmung liegt natürlich in der Identität des Werthes für die innere Arbeit U.

Zürich, Dezember 1874.