Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen.

Von

H. A. Schwarz.

Die Variationsrechnung zeigt, dass dasjenige Flächenstück, welches unter allen von derselben Randlinie begrenzten Flächenstücken möglichst kleinen Flächeninhalt hat, in jedem seiner Punkte gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Hauptkrümmungsradien besitzen muss. Da nun auch umgekehrt allen Flächen, deren mittlere Krümmung in jedem ihrer Punkte gleich Null ist, die Eigenschaft zukommt, dass sich Stücke derselben abgrenzen lassen, welche unter allen je von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücken den kleinsten Flächeninhalt besitzen, so werden die in Rede stehenden Flächen überhaupt Flächen kleinsten Flächeninhalts oder kurz Minimalflächen genannt. Die Titel einer grossen Anzahl von Abhandlungen, welche sich auf diese Flächen beziehen, findet man, zumeist mit einer mehr oder weniger ausführlichen Inhaltsangabe in den Einleitungen der beiden Schriften

„Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung.“ Eine Abhandlung von Bernhard Riemann. Bearbeitet von K. Hattendorff. 13. Bd. der Abhandl. der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1867.

„Sulle proprietà generali delle superficie d' area minima.“ Mem. del prof. E. Beltrami. Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Serie 2, Tomo VII, 1868.

und in den beiden Werken:

Todhunter, History of the Progress of the Calculus of Variations, Cambridge and London, 1861.

J. Plateau, Statique expérimentale et théorique des Liquides, 2 vol. Gand et Leipzig, 1873.

angeführt, auf welche hier verwiesen wird.

Der Umstand, dass die Bedingung für das Eintreten des stabilen Gleichgewichtszustandes einer flüssigen Lamelle, auf welche äussere Kräfte nur längs des Randes einwirken, übereinstimmt mit der Bedingung, dass diese Lamelle innerhalb der Begrenzung, an welcher sie adhärirt, ein Minimum von Oberfläche besitze, ist von Herrn Plateau mit glücklichstem Erfolge dazu benutzt worden, um Stücke von Minimalflächen, deren Begrenzung in mannigfaltiger Weise vorgeschrieben werden kann, auf physikalischem Wege zur Anschauung zu bringen. Die grosse Vergänglichkeit der aus gewöhnlichem Seifenwasser gebildeten Lamellen legte den Wunsch nahe, zu dem angegebenen Zwecke eine Flüssigkeit benutzen zu können, deren Lamellen längere Zeit andauern. Dieser Forderung entspricht in hohem Grade eine Flüssigkeit, welche Herr Plateau bereiten gelehrt hat und welche unter dem Namen des Plateau'schen Glycerinseifenwassers bekannt ist; mittelst desselben gelingt es auf die einfachste Weise, Stücke von Minimalflächen durch flüssige Lamellen zur Anschauung zu bringen, welche unter günstigen Umständen stundenlang andauern. Besonderen Anspruch auf Dank hat Herr Plateau sich neuerdings auch dadurch erworben, dass derselbe seine zahlreichen Untersuchungen über den Gleichgewichtszustand der Flüssigkeiten, die Früchte jahrelanger vom schönsten Erfolge gekrönter Forschungen, in Verbindung mit einer eingehenden Würdigung der einschlägigen Arbeiten anderer Physiker und Mathematiker, gesammelt in zwei Bänden unter dem oben angeführten Titel, allen denen leicht zugänglich gemacht hat, welche nicht die Gelegenheit haben, diese inhaltreichen Abhandlungen aus den Schriften der belgischen Akademie, in welchen sie zuerst veröffentlicht worden sind, kennen zu lernen.

Die Mittheilung der vorliegenden Miscellen geht aus dem Wunsche hervor, zur Verbreitung des Interesses für die in so mannigfacher Beziehung merkwürdigen Minimalflächen etwas beizutragen. Herr Prof. W. Fiedler erwies dem Verf. die Ehre, der jüngst erschienenen zweiten Auflage der deutschen Ausgabe der Salmon'schen Raumgeometrie einen Auszug aus dem Folgenden als Anhang beizugeben.

A. Einen wichtigen Schritt zur Erforschung geometrischer Eigenschaften der Minimalflächen that Herr Ossian Bonnet (siehe dessen Abhandlung: Liouville's Journal, 2. Série, Tome V, p. 221—252, 1860), indem derselbe die bekannte durch parallele Normalen vermittelte Beziehung der Punkte einer krummen Fläche zu den Punkten einer Kugelfläche vom Radius 1 der Untersuchung der Minimalflächen zu Grunde legte. Es ergab sich hierbei (l. c. pag. 227, Formel 53) das folgenreiche Resultat, dass das Quadrat des Linienelementes einer Minimalfläche an jeder Stelle dem Quadrate des entsprechenden Linienelementes der Kugelfläche proportional ist. Herr Ossian Bonnet zog hieraus den Schluss, dass die den Meridianen und Parallelkreisen der Kugelfläche entsprechenden Linien einer Minimalfläche sich nicht nur stets rechtwinklig schneiden, wie bereits Herr Minding im Jahre 1849 gefunden hatte (Crelle's Journal, Bd. 44, pag. 70), sondern dass dieselben, was noch mehr besagt, ein System sogenannter isometrischer Linien bilden, d. h. solcher Linien, welche die Fläche in unendlich kleine Quadrate zu theilen vermögen, — und dass überhaupt jedem Systeme von isometrischen Linien auf der Kugelfläche ein System isometrischer Linien auf der Minimalfläche entspricht. Nun ist aber mit jedem Curvensystem auf einer Fläche, welches dieselbe in unendlich kleine Quadrate zu theilen vermag (vergl. Liouville's Journal, Tome XII, pag. 294, 1847), eine conforme Abbildung dieser Fläche auf eine Ebene verbunden, bei welcher jeder von den beiden das Curvensystem bildenden Schaaren von Curven auf der Fläche eine Schaar paralleler Geraden in der Ebene entspricht. Mit Rücksicht auf die Gaussische Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche conform, d. h. in den kleinsten Theilen ähnlich abzubilden, enthält daher die von Herrn Ossian Bonnet gegebene Formel nicht allein den Satz, dass bei der durch parallele Normalen vermittelten Zuordnung der Punkte einer Minimalfläche und einer Kugelfläche entsprechende Linienelemente an jeder Stelle einander proportional sind, sondern auch den Satz, dass durch die erwähnte Zuordnung jede der beiden Flächen auf die andere conform abgebildet wird. Denn nach dem Ergebnisse der Gaussischen Untersuchung sind diese beiden Sätze vollkommen äquivalent und jeder derselben ist eine unmittelbare Folge des Satzes, welcher in der erwähnten Ossian Bonnet'schen Formel seinen analytischen Ausdruck findet.

Man kann den angeführten und einige andere allgemeine Sätze, welche Minimalflächen betreffen, auf einfache Weise ableiten, indem man die unabhängigen Variablen p, q, als deren Functionen die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes der Minimalfläche betrachtet werden, so wählt, dass die Curven $p =$ const. mit der einen, die Curven $q =$ const. mit der anderen Schaar der Krümmungslinien der Fläche zusammenfallen. Bezeichnen X, Y, Z die Cosinus der Winkel, welche diejenige Richtung der Normale der Minimalfläche in dem Punkte x, y, z mit den Coordinatenaxen bildet, welche mit der Richtung des der Krümmungslinie $p =$ const. angehörenden Hauptkrümmungsradius ϱ der Fläche in diesem Punkte zusammenfällt, so erhält man in Folge des Parallelismus des Elementes einer Krümmungslinie und seines sphärischen Bildes und des bekannten Verhältnisses der Längen beider (vergl. einen Aufsatz von Rodrigues, Correspondance sur l'École polytechnique, vol. III, pag. 162, 1815, und einen Aufsatz des Herrn Weingarten, Borchardt's Journal, Bd. 62, pag. 160—165, 1862)

$$dx = \varrho\left(\frac{\partial X}{\partial p}\,dp - \frac{\partial X}{\partial q}\,dq\right)$$

$$dy = \varrho\left(\frac{\partial Y}{\partial p}\,dp - \frac{\partial Y}{\partial q}\,dq\right)$$

$$dz = \varrho\left(\frac{\partial Z}{\partial p}\,dp - \frac{\partial Z}{\partial q}\,dq\right).$$

Setzt man hierauf

$$\left(\frac{\partial X}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right)^2 = E$$

$$\frac{\partial X}{\partial p}\cdot\frac{\partial X}{\partial q} + \frac{\partial Y}{\partial p}\cdot\frac{\partial Y}{\partial q} + \frac{\partial Z}{\partial p}\cdot\frac{\partial Z}{\partial q} = F$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right)^2 = G$$

so ist wegen der Orthogonalität der Curven $p =$ const. und $q =$ const. $F = 0$, und man erhält, wenn dl das Linienelement der Minimalfläche, dL das entsprechende Linienelement der Kugelfläche $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ bezeichnet,

$$dl^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \varrho^2(Edp^2 + Gdq^2) =$$
$$= \varrho^2\Big((dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2\Big) = \varrho^2 dL^2.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass bei der durch parallele Normalen vermittelten Beziehung der Punkte einer Minimalfläche zu den Punkten einer Kugelfläche vom Radius 1 die erstere auf die letztere conform abgebildet wird und dass hierbei die lineare Vergrösserung an jeder einzelnen Stelle dem reciproken Werthe des Hauptkrümmungsradius gleich ist. Weil die Ausdrücke für dx, dy, dz vollständige Differentiale sein müssen, so müssen dieselben der bekannten Integrabilitätsbedingung genügen. Stellt man diese Bedingung für die drei Ausdrücke auf, so erhält man mit leichter Mühe die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial q}(\varrho E) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial p}(\varrho G) = 0.$$

Hieraus folgt, dass ϱE eine Function von p allein, ϱG eine Function von q allein ist. Führt man daher mittelst der Gleichungen

$$dp_1 = \sqrt{\varrho E}\,.\,dp, \quad dq_1 = \sqrt{\varrho G}\,.\,dq$$

zwei neue Variable ein und wählt diese zu unabhängigen Variablen, bezeichnet dieselben auch der Einfachheit halber wieder mit p, q, so hat man zu setzen

$$E = G = \frac{1}{\varrho}, \quad dl^2 = \varrho\,(dp^2 + dq^2), \quad dL^2 = \frac{dp^2 + dq^2}{\varrho}.$$

Hieraus ergibt sich der von Herrn Ossian Bonnet zuerst ausgesprochene Satz (Comptes rendus 1853, Tome 37, pag. 532), dass eine Minimalfläche durch ihre beiden Schaaren von Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate getheilt werden kann, oder mit anderen Worten: Jede Minimalfläche kann in der Art auf eine Ebene conform abgebildet werden, dass den beiden Schaaren Krümmungslinien zwei Schaaren von parallelen Geraden (p = const., q = const.) entsprechen, und zwar ist das Vergrösserungsverhältniss bei dieser Abbildung der Quadratwurzel aus der Länge des Hauptkrümmungsradius in dem betrachteten Punkte der Minimalfläche umgekehrt proportional. Bei dieser Abbildung entspricht zugleich jeder Asymptotenlinie der Minimalfläche, welche die Schaar der Krümmungslinien unter 45^0 schneidet, und überhaupt jeder isogonalen Trajectorie der Krümmungslinien eine gerade Linie. Man kann den obigen Satz auch aussprechen wie folgt: Der Abstand zweier unendlich benachbarter Krümmungslinien einer Minimalfläche ist überall der Quadratwurzel aus dem Hauptkrümmungsradius der Minimalfläche direct proportional.

B. Führt man nun mit Herrn Weierstrass (Monatsberichte der Berliner Akademie, 1866, pag. 618) die complexen Grössen

$$\frac{X+Yi}{1-Z}=s, \quad \frac{X-Yi}{1-Z}=s_1$$

als neue Variable ein, von welchen die erste durch einen Punkt der XY Ebene geometrisch repräsentirt wird, welcher bei der stereographischen Projection der Kugelfläche vom Punkte $X=0$, $Y=0$, $Z=1$ aus auf die Aequatorebene $Z=0$ dem Punkte X, Y, Z der Kugel entspricht, so erhält man

$$X = \frac{s + s_1}{ss_1 + 1}, \quad Y = \frac{1}{i} \cdot \frac{s - s_1}{ss_1 + 1}, \quad Z = \frac{ss_1 - 1}{ss_1 + 1}$$

$$(dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2 = \frac{4 ds . ds_1}{(ss_1 + 1)^2} = \frac{dp^2 + dq^2}{\varrho}.$$

Da nun $ds . ds_1$ das Quadrat des Linienelementes in der Ebene bedeutet, deren Punkte die complexe Grösse s geometrisch darstellen und da dieses Linienelement dem Linienelemente in der Ebene der complexen Grösse $p + qi$ proportional ist, wie die vorstehende Gleichung lehrt, so ist jede der beiden Ebenen eine conforme Abbildung der andern, also ist die complexe Grösse s entweder eine Function des complexen Argumentes $\sigma = p + qi$, oder des complexen Argumentes $\sigma_1 = p - qi$. Man kann also, indem man nöthigenfalls q mit $-q$ vertauscht, allgemein

$$s = f(\sigma), \quad s_1 = f_1(\sigma_1)$$

setzen, wo f und f_1 zwei conjugirte analytische Functionen bezeichnen. Drückt man alle übrigen Grössen durch die Grössen s, s_1, σ, σ_1 aus, so erhält man

$$\varrho = \frac{1}{4} (ss_1 + 1)^2 \cdot \frac{d\sigma}{ds} \cdot \frac{d\sigma_1}{ds_1}$$

$$dl^2 = \frac{1}{4} (ss_1 + 1)^2 \cdot \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 \cdot \left(\frac{d\sigma_1}{ds_1}\right)^2 \cdot ds . ds_1$$

$$dx = \frac{1}{4} (1 - s^2) \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 ds + \frac{1}{4} (1 - s_1{}^2) \left(\frac{d\sigma_1}{ds_1}\right)^2 ds_1$$

$$dy = \frac{i}{4} (1 + s^2) \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 ds - \frac{i}{4} (1 + s_1{}^2) \left(\frac{d\sigma_1}{ds_1}\right)^2 ds_1$$

$$dz = \frac{1}{2} s \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 ds + \frac{1}{2} s_1 \left(\frac{d\sigma_1}{ds_1}\right)^2 ds_1$$

(Vergl. die Abhandlung des Herrn Enneper, Zeitschrift für Mathematik 1864, Band IX, pag. 107). Betrachtet man nun s und s_1 als unabhängige Variable, während $\mathfrak{F}(s)$ eine Function von s bezeichnet, welche durch die Gleichung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \mathfrak{F}(s)$$

bestimmt ist, so ergibt sich, wenn der vorgesetzte Buchstabe $\mathfrak{R}$ bedeutet, dass der reelle Theil der nachfolgenden complexen Grösse genommen werden soll (vergl. Monatsberichte 1866, pag. 619),

$$x = \mathfrak{R}\int^s (1 - s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds,$$

$$y = \mathfrak{R}\int^s i(1 + s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds,$$

$$z = \mathfrak{R}\int^s 2s\;\mathfrak{F}(s)\,ds,$$

$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + ss_1)^2\mathfrak{F}(s)\mathfrak{F}_1(s_1)ds.ds_1$,
$\varrho = \frac{1}{2}(1 + ss_1)^2\sqrt{\mathfrak{F}(s).\mathfrak{F}_1(s_1)}$, wo $\mathfrak{F}_1(s_1)$ die zu $\mathfrak{F}(s)$ conjugirte complexe Grösse bezeichnet. Zu jeder Function $\mathfrak{F}(s)$ des complexen Argumentes s gehört in Folge dieser Formeln eine Minimalfläche und zwar ist diese Fläche, wie Herr Weierstrass nachgewiesen hat (a. a. O. pag. 621), stets dann und nur dann eine algebraische Fläche, wenn die Function $\mathfrak{F}(s)$ die dritte Ableitung einer algebraischen Function von s ist.

Weil die Gleichungen für dx, dy, dz in Bezug auf die Function $\mathfrak{F}(s)$ linear sind, so erhält man, wenn man nach der Reihe für $\mathfrak{F}(s)$ setzt $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, $\varphi_1(s)+\varphi_2(s)$, folgenden allgemeinen Satz: Ordnet man die Punkte zweier Minimalflächen F_1 und F_2 in der Weise einander zu, dass die Normalen beider Flächen in entsprechenden Punkten einander parallel sind, und construirt zu jedem Paare entsprechender Punkte von F_1 und F_2 einen dritten Punkt, dessen Coordinaten bezüglich die Summen der gleichnamigen Coordinaten der beiden entsprechenden Punkte sind, so beschreibt auch dieser dritte Punkt eine Minimalfläche und die Tangentialebenen in entsprechenden Punkten der drei Minimalflächen sind einander parallel. Dieser Satz wurde im Jahre 1865 von Herrn Weierstrass den damaligen Mitgliedern des an der Berliner Universität bestehenden mathematischen Seminars mitgetheilt. Dass bei der angegebenen Construction jede der drei Minimalflächen auf die beiden andern conform abgebildet wird, ergibt sich sowohl aus der Proportionalität entsprechender Linienelemente der drei Flächen, als auch daraus, dass jede derselben durch parallele Normalen auf die Kugelfläche conform abgebildet wird.

C. Ersetzt man die Function $\mathfrak{F}(s)$ durch $e^{i\alpha}\,\mathfrak{F}(s)$, wo α eine reelle Grösse ist, und dem entsprechend $\mathfrak{F}_1(s_1)$ durch $e^{-i\alpha}\mathfrak{F}_1(s_1)$, so erhält man, da das Linienelement der Minimalfläche hierbei nicht geändert wird, eine Biegungsfläche der vorigen Fläche, welche wieder eine Minimalfläche ist. Hierbei entsprechen die Krümmungslinien der Biegungsfläche einer Schaar von Curven, welche die Krümmungslinien der ursprünglichen Fläche unter dem Winkel $\frac{\alpha}{2}$ schneiden, denn es geht $d\sigma$ in $e^{i\frac{\alpha}{2}}\,d\sigma$ über. Die reelle Grösse α kann als ein variabler Parameter aufgefasst werden: Es ist also möglich, Theile einer Minimalfläche auf stetige

Weise mit einem variablen Parameter so zu biegen, dass dieselben während der Biegung beständig Minimalflächen bleiben. Jede Schaar von Curven, welche die Krümmungslinien der ursprünglichen Fläche unter demselben constanten Winkel schneiden, wird bei dieser Biegung einmal zu einer Schaar von Krümmungslinien. Auch gilt der Satz, dass die bei der Multiplication von $\mathfrak{F}(s)$ mit $e^{i\alpha}$ entstehenden Biegungen einer Minimalfläche die einzigen Biegungen derselben sind, bei welchen sie die Eigenschaft, Minimalfläche zu sein, beibehält.

Denkt man sich während der Biegung, indem man α als variabel betrachtet, einen Punkt des gebogenen Flächentheiles festgehalten, was durch passende Verfügung über die durch Integration eingeführten Constanten erreicht wird, so geht die Biegung den obigen Formeln zufolge in der Art vor sich, dass die Tangentialebenen in allen entsprechenden Punkten parallel sind und dass die Tangenten je zweier entsprechenden Linienelemente mit einander den Winkel α einschliessen. Jeder Punkt des Minimalflächenstückes beschreibt während der Biegung eine Ellipse, deren Mittelpunkt der festgehaltene Punkt ist.

Einen speciellen Fall dieser Biegung, welcher dem Werthe $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ entspricht, kennt man durch eine kurze Notiz des Herrn Ossian Bonnet seit dem Jahre 1853 (Comptes rendus T. 37, pag. 532). Bezeichnen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Coordinaten des dem Punkte x, y, z unter der Voraussetzung $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ nach der Biegung entsprechenden Punktes, so erhält man einerseits die Gleichungen

$$d\mathfrak{x} = -\,\Re\,[(1-s^2)\,i\,\mathfrak{F}(s)\,ds]$$
$$d\mathfrak{y} = +\,\Re\,[(1+s^2)\,\mathfrak{F}(s)\,ds]$$
$$d\mathfrak{z} = -\,\Re\,[\;\;2\,s\,i\;\;\mathfrak{F}(s)\,ds]$$

andererseits ergeben sich aus den Gleichungen

$$d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2 + d\mathfrak{z}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$d\mathfrak{x}\,dx + d\mathfrak{y}\,dy + d\mathfrak{z}\,dz = 0$$
$$X\,d\mathfrak{x} + Y\,d\mathfrak{y} + Z\,d\mathfrak{z} = 0$$

bei richtiger Bestimmung des Vorzeichens folgende Ausdrücke

$$d\mathfrak{x} = Zdy - Ydz,\ d\mathfrak{y} = Xdz - Zdx,\ d\mathfrak{z} = Ydx - Xdy.$$

Hierbei erhält man beiläufig den Satz, dass die auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichungen stehenden Ausdrücke vollständige Differentiale sind, was einer bekannten Form der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen entspricht.

Ueber den allgemeineren Fall der Biegung einer Minimalfläche unter der Bedingung, dass sie die Eigenschaft behält, Minimalfläche zu sein, vergleiche man Ossian Bonnet, Journal de l'École polytechnique, Cah. 42, (1860) 1867 pag. 7—15 und die Monographie: „Ueber Raumcurven und Flächen" von K. Peterson, Leipzig bei Franz Wagner, 1868, pag. 66 und 72.

D. Bezeichnet man die drei Grössen

$$x + \mathfrak{x}i = \int_{s_0}^{s} (1-s^2)\,\mathfrak{F}(s)ds,$$

$$y + \mathfrak{y}i = \int_{s_0}^{s} i\,(1+s^2)\,\mathfrak{F}(s)ds,$$

$$z + \mathfrak{z}i = \int_{s_0}^{s} 2s\,\mathfrak{F}(s)ds$$

beziehlich mit u, v, w und führt statt s irgend eine Function t von s als neue unabhängige Variable ein, so erhält man folgenden Satz: Sind u, v, w im Sinne der neueren Functionentheorie drei Functionen derselben complexen Grösse t, welche die Eigenschaft besitzen, dass die Summe der Quadrate ihrer Ableitungen

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)^2$$

identisch gleich Null ist, so stellen die Gleichungen

$$x = \mathfrak{R}(u), \quad y = \mathfrak{R}(v), \quad z = \mathfrak{R}(w)$$

wenn x, y, z rechtwinklige Punktcoordinaten bezeichnen und der Buchstabe $\mathfrak{R}$ die oben erklärte Bedeutung hat, in allgemeinster Weise eine Minimalfläche dar. Diese Gleichungen stehen übrigens mit den von Monge (Application de l'Analyse à la Géométrie, édition de M. Liouville pag. 219 et 220) gegebenen auf derselben Stufe.

Werden die drei complexen Grössen u, v, w in drei Ebenen durch Punkte geometrisch dargestellt, so ergeben sich drei conforme Abbildungen der betrachteten Minimalfläche auf diese drei Ebenen. Da nun den Curven, in welchen die Minimalfläche von der Ebenenschaar $z =$ const. geschnitten wird, in der Ebene der complexen Grösse w eine Schaar von parallelen Geraden entspricht, welche die reelle Axe dieser Ebene rechtwinklig schneiden, so bilden die Curven $z =$ const. (Niveaucurven) nebst ihren orthogonalen Trajectorien, den Curven des stärksten Falles, ein isometrisches Curvensystem auf der Fäche. Dieser Satz gilt unverändert für alle Curven, in welchen eine Minimalfläche von irgend einer Schaar von parallelen Ebenen geschnitten wird, und deren orthogonalen Trajectorien.

Bezeichnet man die zu den Grössen u, v, w conjugirten complexen Grössen mit u_1, v_1, w_1, so ergibt sich

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{ du \cdot du_1 + dv \cdot dv_1 + dw \cdot dw_1 \right\}.$$

Man verdankt Riemann eine interessante geometrische Interpretation dieses Satzes (S. Art. 7 der oben erwähnten Abhandlung). Nach der obigen Formel ist zunächst das Quadrat des Linienelementes der Minimalfläche gleich der halben Summe der Quadrate der entsprechenden Linienelemente in den Ebenen der complexen Grössen u, v, w. Da nun die Linearvergrösserung bei der conformen Abbildung in irgend einem Punkte nach allen Richtungen dieselbe ist, so ist die Flächenvergrösserung gleich dem Quadrate der Linearvergrösserung. Also ist das Flächenelement der Minimalfläche gleich der halben Summe der entsprechenden Flächenelemente in den Ebenen der complexen Grössen u, v, w und dasselbe gilt von ganzen Flächentheilen der Minimalfläche und deren conformen Abbildungen auf den Ebenen der Grössen u, v, w. Werden nun die Flächenelemente in diesen Ebenen beziehungsweise durch $dx \cdot d\mathfrak{x}$, $dy \cdot d\mathfrak{y}$, $dz \cdot d\mathfrak{z}$ bezeichnet (wobei zu bemerken ist, dass diese Producte in Folge der soeben getroffenen Festsetzung nicht mehr dieselbe Bedeutung haben, wie vorher) so wird durch den angegebenen Satz die Berechnung des Flächeninhalts eines gegebenen Stückes M einer Minimalfläche auf die Berechnung des Integrales

$$\frac{1}{2}\iint (dx \cdot d\mathfrak{x} + dy \cdot d\mathfrak{y} + dz \cdot d\mathfrak{z})$$

zurückgeführt. (Man vergl. die Formel 5 des Art. 6 der citirten Abhandlung). Dieses Doppelintegral geht aber, wenn die Integration in Bezug auf x, y, z ausgeführt wird, in das über die Begrenzung von M zu erstreckende einfache Integral

$$\frac{1}{2}\int (x\,d\mathfrak{x} + y\,d\mathfrak{y} + z\,d\mathfrak{z})$$

über, welchem man auch die Gestalt

$$\frac{1}{2}\int \begin{vmatrix} X, & Y, & Z \\ x, & y, & z \\ dx, & dy, & dz \end{vmatrix}$$

geben kann. Das Element des letzteren Integrals kann nun wie folgt geometrisch interpretirt werden.

Man verbinde die Endpunkte eines Elementes dl der Begrenzung von M durch geradlinige Strecken mit dem Coordinatenanfang und bezeichne den Flächeninhalt des hierdurch entstandenen Dreiecks mit df; ω sei der Neigungswinkel der Ebene dieses Dreiecks gegen die Tangentialebene von M an der betrachteten Randstelle. Dann ist

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} X, & Y, & Z \\ x, & y, & z \\ dx, & dy, & dz \end{vmatrix} = \cos\omega \,.\, df.$$

Denkt man sich diese Construction für alle Elemente der Begrenzungslinie von M ausgeführt, so bildet die Gesammtheit der Dreiecke eine bestimmte Kegelfläche, deren Seiten den Coordinatenanfang mit allen Punkten der Begrenzungslinie von M verbinden. Tritt nun der specielle Fall ein, dass diese Kegelfläche gegen die Minimalfläche längs der Begrenzung unter constantem Winkel ω geneigt ist, so ist der Flächeninhalt des Minimalflächenstückes gleich dem Producte aus dem Flächeninhalt der Kegelfläche und dem

Cosinus des Neigungswinkels beider Flächen gegen einander. Insbesondere ist der Flächeninhalt der Minimalfläche dem Flächeninhalt der Kegelfläche gleich, wenn jener Winkel überall gleich Null ist.

Diese den Flächeninhalt von Minimalflächenstücken betreffenden Sätze, von welchen specielle Fälle (Lindelöf-Moigno, Calcul des variations pag. 210—212, 1861) schon seit längerer Zeit bekannt sind, lassen sich auch sehr einfach auf mehr geometrischem Wege beweisen, wenn man eine Schaar ähnlicher und ähnlich gelegener Minimalflächenstücke betrachtet und die Differenz des Flächeninhalts zweier unendlich benachbarten in doppelter Weise ausdrückt.

E. Setzt man in den Formeln, durch welche die Grössen u, v, w eingeführt wurden, für $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$ ihre durch X, Y, Z, dx, dy, dz ausgedrückten Werthe, so ergeben sich die, wie mir scheint, bemerkenswerthen Gleichungen

$$u = x + i\int (Zdy - Ydz),$$

$$v = y + i\int (Xdz - Zdx),$$

$$w = z + i\int (Ydx - Xdy),$$

welche zu einer expliciten Lösung folgender Aufgabe führen: Es soll eine Minimalfläche analytisch bestimmt werden, welche durch eine beliebige vorgeschriebene analytische Linie hindurchgeht und längs dieser Linie in jedem Punkte eine vorgeschriebene Normale besitzt, deren Lage sich längs der gegebenen analytischen Linie nach einem gegebenen analytischen Gesetze ändert.

Denkt man sich nämlich die Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes der vorgeschriebenen Linie und ebenso X, Y, Z, die Cosinus der Winkel, welche die vorgeschriebene Normale in dem betrachteten Punkte mit den Coordinatenaxen bildet, als analytische Functionen einer reellen Variablen t gegeben, so dass also die Gleichungen

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \quad Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

identisch befriedigt sind, so sind die Functionen u, v, w für die reellen Werthe von t, abgesehen von additiven rein imaginären Constanten, auf welche es hier nicht ankommt, eindeutig bestimmt und befriedigen die Gleichungen

$$X\,du + Y\,dv + Z\,dw = 0, \quad (du)^2 + (dv)^2 + (dw)^2 = 0$$

identisch.

Weil aber die Functionen u, v, w analytische Functionen der Variablen t sind, so haben dieselben auch für alle complexen Werthe von t, welche diese Variable als Argument der analytischen Functionen x, y, z, X, Y, Z annehmen kann, eine bestimmte Bedeutung, während die Gleichungen

$$X\,du + Y\,dv + Z\,dw = 0, \quad (du)^2 + (dv)^2 + (dw)^2 = 0$$

unverändert bestehen bleiben. Wenn man nun der Variablen t auch diese complexen Werthe beilegt, so stellen die Gleichungen

$$x' = \mathfrak{R}(u), \; y' = \mathfrak{R}(v), \; z' = \mathfrak{R}(w)$$

eine Minimalfläche dar, welche die vorgeschriebenen Eigenschaften besitzt.

Aus dem Vorhergehenden kann auch der Schluss gezogen werden, dass es unter den angegebenen Voraussetzungen nur eine einzige Minimalfläche gibt, welche den gestellten Bedingungen genügt. Denn, betrachtet man an Stelle der Grösse t wieder die Grösse

$$s = \frac{X + Yi}{1 - Z}$$

als unabhängige Variable, so sind die Functionen u, v, w des complexen Argumentes s in Folge der obigen Gleichungen längs einer Linie, nämlich für diejenigen Werthe von s, welche den vorgeschriebenen Normalen entsprechen, durch die gestellten Bedingungen dem Werthe nach bis auf additive rein imaginäre Constanten, welche willkürlich angenommen werden können, bestimmt. Nach einem bekannten Satze der Theorie der analytischen Functionen, dessen Voraussetzungen im vorliegenden Falle erfüllt sind, ist aber eine Function complexen Argumentes vollständig bestimmt, sobald deren Werthe längs einer Linie gegeben sind.

Hieraus ergibt sich folgender allgemeine Satz: Wenn zwei Minimalflächen eine Linie gemeinsam haben und wenn längs dieser Linie die Normalen beider Flächen zusammenfallen, so fallen beide Flächen, beziehungsweise deren analytische Fortsetzungen, in ihrer ganzen Ausdehnung mit einander zusammen.

Dieser Satz, dessen Kenntniss ich einer gütigen mündlichen Mittheilung des Herrn Weierstrass verdanke, enthält als specielle Fälle folgende beiden Sätze:

1. Jede auf einem Stücke einer Minimalfläche liegende gerade Linie ist eine Symmetrieaxe der durch analytische Fortsetzung dieses Stückes entstehenden Minimalfläche.

2. Wenn auf einem Stücke einer Minimalfläche eine ebene Curve liegt, längs welcher die Tangentialebene der

Fläche und die Ebene der Curve mit einander einen rechten Winkel einschliessen, so ist die Ebene dieser Curve eine Symmetrie-Ebene derjenigen Minimalfläche, welche durch analytische Fortsetzung dieses Stückes entsteht.

Eine Anwendung dieser Sätze enthält ein in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1872, pag. 3—27 veröffentlichter Aufsatz des Verfassers.

Die allgemeine Aufgabe, durch eine vorgeschriebene Linie eine Minimalfläche zu legen, deren Normalen längs der Linie ebenfalls vorgeschrieben sind, ist schon vor längerer Zeit von Björling, später von den Herren Ossian Bonnet und Mathet in Angriff genommen worden.

Mit Hülfe der obigen Formeln kann man leicht alle Minimalflächen bestimmen, welche zugleich geradlinige Flächen sind.

Wählt man nämlich eine beliebige Erzeugende einer geradlinigen Minimalfläche zur x Axe, die diese Erzeugende und deren unendlich benachbarte rechtwinklig schneidende Gerade zur z Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so ist es stets möglich, eine Constante a so zu bestimmen, dass $z = a \,.\, \dfrac{y}{x}$ die Gleichung eines hyperbolischen Paraboloides darstellt, welches die Minimalfläche längs der Geraden $y = 0$, $z = 0$ berührt. Man hat also zu setzen $y = 0$, $z = 0$, $X = 0$, $Y = \dfrac{-a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, $Z = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ oder besser $x = \dfrac{a}{i} \,.\, \sin(ti)$, $y = 0$, $z = 0$, $X = 0$, $Y = \dfrac{-1}{\cos(ti)}$, $Z = \dfrac{1}{i} \,.\, \mathrm{tg}\,(ti)$ und erhält dann ohne Mühe

$$z = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

als Gleichung der Minimalfläche selbst. Hieraus ergibt sich der Satz: Jede geradlinige Minimalfläche ist entweder eine Ebene, oder eine Schraubenfläche, deren erzeugende Geraden von der Axe der Schraubenfläche rechtwinklig geschnitten werden.

Für diesen Satz gibt es eine Anzahl verschiedener Beweise, welche man den Herren O. Bonnet, Catalan, M. Roberts, Serret u. A. verdankt.

Man kann nun die Lösung der allgemein gestellten Aufgabe für einige specielle Fälle durchführen.

1. Es wird die Minimalfläche gesucht, welche das hyperbolische Paraboloid $2z = a(x^2 - y^2)$ längs der Schnittlinie desselben mit dem Rotationscylinder $x^2 + y^2 = 1$ berührt.

Die gesuchte Fläche ist eine algebraische.

2. Für welche Minimalfläche ist eine Parabel eine geodätische Linie?

Man erhält dieselbe transcendente Fläche, für welche Herr Catalan (Journal de l'École polytechnique, Cah. 37, pag. 160 – 163) eine geometrische Construction gegeben hat.

3. Für welche Minimalfläche ist eine Ellipse eine geodätische Linie?

Man erhält eine transcendente Fläche, auf welcher eine einfach unendliche Schaar von Raumcurven vierten Grades liegt, von denen jede einen isolirten Doppelpunkt besitzt. Die sphärischen Bilder dieser Curven vierten Grades sind confocale sphärische Kegelschnitte.

F. Die Aufgabe, durch eine geschlossene analytische Linie L eine Minimalfläche zu legen, auf welcher diese Linie ein in seinem Innern von singulären Stellen freies, einfach zusammenhängendes Flächenstück begrenzt, ist, wenn man von dem trivialen Falle absieht, in welchem die vorgeschriebene Linie L eine ebene Curve ist, bis jetzt noch in keinem einzigen Falle gelöst worden, obwohl Gergonne im Jahre 1816 die Aufmerksamkeit der Mathematiker gerade auf diese Aufgabe hingelenkt und im 7. Bande seines Journals (pag. 68) eine bestimmte Aufgabe dieser Art gestellt hat.

Die analoge Aufgabe hingegen, bei welcher die vorgeschriebene Linie L von einer Anzahl geradliniger Strecken gebildet wird, ist in der neuesten Zeit von Riemann und Weierstrass in vollster Allgemeinheit gelöst worden. Die Veröffentlichung der von Herrn Weierstrass benutzten Untersuchungsmethode steht noch bevor. Von den Untersuchungen Riemann's auf diesem Gebiete gibt die oben erwähnte posthume Abhandlung Kunde.

In Bezug auf die specielle Minimalfläche, deren Begrenzung als ein von vier Kanten eines regulären Tetraeders gebildetes Vierseit vorgeschrieben ist, sei verwiesen auf eine in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1865 (pag. 149—153) enthaltene Notiz und auf die Monographie des Verfassers: Bestimmung einer speciellen Minimalfläche. Berlin 1871 bei Harrwitz und Gossmann.

G. Die einzige unzerlegbare Fläche zweiten Grades und zweiter Klasse, welche im analytischen Sinne als eine Minimalfläche aufgefasst werden kann, ist die Kugelfläche, deren Radius gleich Null ist. Die Frage aber, welches die unzerlegbaren algebraischen Minimalflächen des nächst höheren Grades, beziehungsweise der nächst höheren Klasse sind, sieht noch ihrer Beantwortung entgegen.

Von den Punktsingularitäten, welche eine algebraische Minimalfläche haben kann, und dem Verhalten einer solchen Fläche im Unendlichen handelt ein Aufsatz des Herrn Geiser, Leipziger Annalen, Band 3, pag. 530—534. (1871).

Die Minimalflächen, für welche die eine Schaar der Krümmungslinien eine Schaar ebener Curven ist, haben die Eigenschaft, dass auch die andere Schaar der Krümmungslinien von ebenen Curven gebildet wird. Zu diesen Flächen, welche von Herrn Ossian Bonnet, (Comptes rendus Tome 41, pag. 1058, 1855) analytisch bestimmt worden sind, gehört auch eine algebraische Minimalfläche neunten Grades, welche nur als ein Grenzfall in den Ossian Bonnet'schen Formeln enthalten ist und deren Gleichung Herr Enneper aufgestellt hat. (Zeitschrift für Mathematik, Bd. IX, pag. 108, 1864).

Man erhält diese Fläche, wenn man in den obigen Gleichungen $\frac{d\sigma}{ds}$, also auch $\mathfrak{F}(s)$ einer reellen Constante gleichsetzt. Die beiden Schaaren der Krümmungslinien dieser Fläche werden von ebenen Curven dritten Grades gebildet, während die isogonalen Trajectorien derselben Raumcurven dritten Grades sind. Diese Fläche hat ferner die Eigenschaft, auf stetige Weise in sich selbst verbiegbar zu sein; denn setzt man $s \,.\, e^{i\alpha}$ statt s, $s_1 \,.\, e^{-i\alpha}$ statt s_1, so wird das Linienelement der Fläche nicht geändert und hieraus folgt die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung.

Die Eigenschaft, auf stetige Weise in sich selbst und folglich auf eine Rotationsfläche verbiegbar zu sein, kommt allen Minimalflächen zu, bei welchen $\mathfrak{F}(s) = C. s^{m-2}$ ist, wo C eine beliebige, m eine reelle Constante bezeichnet, denn das Linienelement dieser Flächen wird durch die Substitution von $s.e^{i\alpha}$ für s und $s_1.e^{-i\alpha}$ für s_1 nicht geändert. Die der Annahme $\mathfrak{F}(s) = C. s^{m-2}$ entsprechenden Minimalflächen sind zugleich die einzigen Minimalflächen, welche die angegebene Eigenschaft besitzen.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich vielleicht am einfachsten aus folgender Ueberlegung.

Wenn eine Minimalfläche so gebogen wird, dass sie nach der Biegung wieder eine Minimalfläche ist, so wird in jedem ihrer Punkte weder die mittlere Krümmung noch das Gaussische Krümmungsmass geändert, also haben die Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte der Fläche nach der Biegung dieselbe Grösse wie vor der Biegung. Hieraus folgt, dass das durch parallele Normalen erhaltene conforme sphärische Bild eines Stückes der Minimalfläche durch die in Rede stehende Biegung weder in den kleinsten Theilen noch im Ganzen bezüglich Gestalt und Grösse geändert wird; denn das Vergrösserungsverhältniss hat für jeden Punkt der Minimalfläche vor und nach der Biegung denselben Werth. Das erwähnte sphärische Bild kann also, wenn es überhaupt seine Lage auf der Kugelfläche ändert, zufolge einer bekannten Eigenschaft congruenter sphärischer Figuren, nur eine Drehung auf der Kugelfläche erfahren.

Hat nun eine Minimalfläche die Eigenschaft, auf stetige Weise in sich selbst verbiegbar zu sein, so wird bei einer solchen Biegung der Fläche in sich selbst, bei welcher, um eine gebräuchliche Ausdrucksweise anzuwenden, alle Punkte eines Stückes der Fläche ihre Lage nur unendlich wenig ändern, das sphärische Bild dieses Flächenstückes eine unendlich kleine Drehung auf der Kugelfläche erfahren. Hieraus folgt, dass das sphärische Bild jeder auf der Minimalfläche liegenden Linie, welche bei dieser Biegung in sich selbst gebogen wird, ein Kreis sein muss, welcher bei jener Drehung sich selbst entspricht. Alle diese Kreise bilden eine Schaar von Parallelkreisen der Kugel. Wählt man nun, was stets möglich ist, das Coordinatensystem so, dass den beiden Polen dieser Parallelkreise die Werthe $s = 0$ und $s = \infty$ entsprechen, so ergibt sich, dass bei jeder Biegung der Minimalfläche in sich selbst die Grössen s, s_1 in $s.e^{i\alpha}$, $s_1.e^{-i\alpha}$ übergehen, wo α eine reelle Grösse bezeichnet. Denn es gibt ausser den diesem Uebergange entsprechenden Drehungen keine andere, bei welcher jeder der erwähnten Parallelkreise in sich selbst übergeht. Da nun auch das Quadrat des Linienelementes der Fläche $dl^2 = (1 + ss_1)^2\, \mathfrak{F}(s)\, \mathfrak{F}_1(s_1)\, ds\, ds_1$ bei der Vertauschung von s, s_1 mit $s.e^{i\alpha}$, $s_1.e^{-i\alpha}$ ungeändert bleiben muss, weil die Fläche der Annahme zufolge in sich selbst verbogen wird, so muss der absolute Betrag von $\mathfrak{F}(s)$ eine Function des absoluten Betrages von s allein sein und hieraus folgt $\mathfrak{F}(s) = C.\, s^{m-2}$ wo C eine beliebige, m eine reelle Constante bezeichnet.

Dieselbe Frage nach den Minimalflächen, welche Biegungen von Rotationsflächen sind, ist auf anderem Wege von Bour in seiner Preisschrift über die Biegung der Flächen (Journal de l'École polytechnique, Cah. 39, pag. 99—109 [1860] 1862) beantwortet worden.

Den Meridianen und den Parallelkreisen der Rotationsflächen entsprechen bei der vorhin getroffenen Wahl des Coordinatensystems die Curven, längs denen beziehungsweise der reelle und der imaginäre Theil von $i \log s$ constant ist.

Gibt man der Zahl m den Werth 0, so erhält man alle ohne Gestaltsänderung in sich verschiebbaren Minimalflächen, welche also zugleich Schraubenflächen sind. Für $m = 0$ und reelle Werthe von C ergibt sich die durch Rotation einer Kettenlinie um ihre Directrix als Axe entstehende Minimalfläche. Für $m = 0$ und rein imaginäre Werthe von C ergibt sich die oben erwähnte geradlinige Schraubenfläche. Die Gleichung der für $m = 0$ und für beliebige Werthe von C sich ergebenden Minimalflächen ist zuerst von Herrn Scherk im Jahre 1831 in der Beantwortung einer von der Jablonowski'schen Gesellschaft gestellten Preisfrage aufgestellt worden.

H. Ebenso wie man nach allen geradlinigen Minimalflächen fragen kann, kann man die Aufgabe stellen, alle Minimalflächen zu bestimmen, welche eine einfach unendliche Schaar anderer vorgeschriebener Linien enthält. Diese Aufgabe ist für den Fall, dass die vorgeschriebenen Curven Kreise sein sollen, von Herrn Enneper gelöst worden, welcher in einem Aufsatze „Ueber cyklische Flächen“ (Zeitschrift für Mathematik, Bd. XIV, pag. 399 bis 403, 1869) zu folgendem Ergebnisse gelangt ist: Wenn eine Minimalfläche die Eigenschaft besitzen soll, eine einfach unendliche Schaar (reeller) Kreise zu enthalten, so müssen alle diese Kreise in parallelen Ebenen liegen. Ein Auszug aus der eben angeführten Abhandlung ist in den „Göttinger Nachrichten“ vom Jahre 1866 (Nr. 15 vom 11. Juli, pag. 243—249) abgedruckt, welcher die allgemeine Gleichung aller Minimalflächen, auf denen eine Schaar reeller Kreise liegt, in einfacher Gestalt enthält. Auch der letzte Artikel der mehrfach erwähnten posthumen Abhandlung Riemanns handelt von diesen Flächen. Mit Ausnahme der Rotationsfläche der Kettenlinie haben dieselben die Eigenschaft periodisch zu sein, sie besitzen eine Symmetrie-Ebene, enthalten unendlich viele isolirte gerade Linien und haben unendlich viele Asymptoten-Ebenen. Längs jedes Kreises der Schaar wird jede dieser Flächen von einem Kegel zweiten Grades berührt und zwar sind diese Kegel für jede dieser Flächen concyklisch, d. h. bei jeder solcher Fläche schneiden dieselben beiden Schaaren von parallelen Ebenen die Tangentialkegel zweiten Grades in Kreisen. Der Schaar der auf der Minimalfläche liegenden Kreise entspricht daher bei der durch parallele Normalen vermittelten conformen Uebertragung der Minimalfläche auf die Kugel eine Schaar von confocalen sphärischen Kegelschnitten. Die Function $\mathfrak{F}(s)$ erhält für diese Flächen bei passender Wahl des Coordinatensystems die Gestalt

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{C}{s\sqrt{(s-\operatorname{cotg}\varepsilon)\, s\, (s+\operatorname{tg}\varepsilon)}},$$

wo C und ε zwei reelle Constanten bezeichnen. Je zwei Flächen dieser Art, für welche C denselben Werth hat, während die beiden Werthe von ε sich zu $\frac{\pi}{2}$ ergänzen, sind solche Biegungen von einander, dass den Krümmungslinien der einen Fläche die Asymptotenlinien der andern entsprechen. Die dem Werthe $\varepsilon = \pm\frac{\pi}{4}$ entsprechende Fläche ist daher in der Art auf sich selbst abwickelbar, dass den Krümmungslinien die Asymptotenlinien der Fläche entsprechen und umgekehrt.

Auf eine Fläche dieser Art führt auch der in dem Nachtrage zu meiner Abhandlung „Bestimmung einer speciellen Minimalfläche“ auf pag. 92 angegebene, aber nicht näher untersuchte Fall, in welchem die Function $\mathfrak{F}(s)$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{C}{\sqrt{(1-s^2)^3\,(1+s^2)}}$$

bestimmt ist, denn dieser Fall geht in den vorher erwähnten über, wenn an Stelle der Grösse s die Grösse $\frac{1-s}{1+s} \cdot i$ als unabhängige Variable eingeführt wird.

I. Wie die Betrachtung der Minimalflächen überhaupt bei einem Probleme des Minimums angefangen hat, so kann man die Betrachtung jeder speciellen Minimalfläche mit der Beantwortung einer Frage des Minimums beendigen.

Wenn nämlich eine Minimalfläche gegeben ist, also eine analytische Fläche, welche in jedem ihrer Punkte gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Hauptkrümmungsradien besitzt, wie kann man auf derselben eine oder mehrere Linien wählen, welche ein zusammenhängendes Stück M der Fläche begrenzen, um sicher zu sein, dass dieses Flächenstück M unter allen von denselben Begrenzungslinien begrenzten und diesem Flächenstück unendlich benachbarten Flächenstücken der kleinsten Flächeninhalt besitzt?

Die Beantwortung dieser Frage hängt davon ab, ob die zweite Variation des Flächeninhalts für alle Variationen des Flächenstückes M, welche die Begrenzung desselben ungeändert lassen, positiv ist, oder ob dieselbe für einige dieser Variationen auch den Werth Null oder negative Werthe annehmen kann.

Eine nähere Untersuchung dieser zweiten Variation, welche in den Monatsberichten der Berliner Akademie 1872, pag. 718 veröffentlicht ist, hat zu dem Ergebnisse geführt, dass jene Entscheidung über das Vorzeichen unabhängig ist von der speciellen Function $\mathfrak{F}(s)$, welche die Besonderheit der Minimalfläche bedingt, von welcher M ein Stück ist. Die erwähnte Entscheidung hängt vielmehr nur von der Gestaltung des sphärischen Bildes ab, welches dem Flächenstücke M bei der durch parallele Normalen vermittelten Zuordnung entspricht, und fällt daher für alle Minimalflächenstücke, welche dasselbe sphärische Bild besitzen, in gleichem Sinne aus. Zugleich hat jene Untersuchung zu dem Satze geführt, dass die in Rede stehende zweite Variation stets dann und nur dann beständig positiv ist, wenn es ein zusammenhängendes Minimalflächenstück gibt, welches dem betrachteten Flächenstücke M in der ganzen Ausdehnung des letzteren unendlich benachbart ist, mit demselben aber keinen Punkt gemein hat.

Gibt es daher einen Punkt P, welcher in keiner Tangentialebene des Flächenstückes M enthalten ist, so braucht man nur für den Punkt P als Aehnlichkeitspunkt ein dem Flächenstücke M unendlich benachbartes ähnliches und ähnlich gelegenes Flächenstück zu construiren und man kann dann dem vorher erwähnten Satze zufolge schliessen, dass das Flächenstück M unter allen unendlich benachbarten denselben Grenzbedingungen genügenden Flächenstücken den kleinsten Flächeninhalt besitzt.

Allgemein gilt folgender Satz: Ein bestimmtes Stück einer Minimalfläche besitzt unter allen von denselben Randlinien begrenzten und ihm unendlich benachbarten Flächenstücken stets dann und im Allgemeinen auch nur dann den kleinsten Flächeninhalt, wenn es ein dem betrachteten Flächenstücke durch parallele Normalen Punkt für Punkt entsprechendes Minimalflächenstück gibt, dessen sämmtliche Tangentialebenen von ein und demselben Punkte des Raumes einen von Null verschiedenen Abstand haben.

K. Es ist bisher nicht gelungen, für jede gegebene Begrenzungslinie *L* die Frage zu beantworten, ob es nur ein einziges oder ob es mehrere Flächenstücke gibt, welche von der Linie *L* begrenzt sind, in ihrem Innern keine singulären Stellen enthalten und je unter allen ihnen unendlich benachbarten Flächenstücken den kleinsten Flächeninhalt besitzen. Eine interessante mit dieser Frage zusammenhängende Untersuchung hat Steiner angestellt. (Crelle's Journal Bd. 24, pag. 111 Anm. 1842). Diese Untersuchung bezieht sich auf zwei von derselben Randlinie begrenzte Flächenstücke, für welche bei passender Wahl des Coordinatensystems gleichzeitig die eine Coordinate eine eindeutige Function der beiden andern ist. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich, dass jedenfalls einem der beiden Flächenstücke die Eigenschaft des Minimums nicht zukommt.

Die im Vorhergehenden erwähnten auf die zweite Variation bezüglichen Lehrsätze gelten unter der Voraussetzung, dass bei der Variation des betrachteten Flächenstückes die Begrenzung desselben als fest betrachtet wird. Lässt man diese Voraussetzung fallen, so eröffnet sich der Forschung ein bisher noch wenig betretenes Gebiet, dessen Schwelle folgender, ebenfalls von Steiner (Monatsberichte der Berliner Akademie, 1840, pag. 118) herrührender Satz bezeichnet: Unter allen zu einem Minimalflächenstücke äquidistanten Flächenstücken besitzt das Minimalflächenstück selbst nicht den kleinsten, sondern den grössten Flächeninhalt.

Unterstrass bei Zürich, im December 1874.