Ueber eine Erweiterung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

von

J. J. Müller.

Die Bemühungen, den zweiten Hauptsatz der Wärmelehre aus rein mechanischen Begriffen abzuleiten, in ähnlicher Weise, wie man den ersten Hauptsatz derselben aus solchen erhält, sind insofern von Erfolg gewesen, als es gelungen ist, denselben von den gewöhnlichen Lagrangeschen Differentialgleichungen der Bewegung aus, ohne Zuhilfenahme neuer Voraussetzungen, zu gewinnen. Eine solche Ableitung ist namentlich von Clausius [1]) gegeben worden, nachdem schon vorher, freilich in nicht ganz allgemeiner Darstellung, Boltzmann [2]) diesen Weg eingeschlagen hatte.

Allein während der erste Satz der Wärmetheorie sich als specieller Fall aus einem allgemeinen mechanischen Satze — dem Satz von der Constanz der Energie — ergibt, ist es bisher nicht gelungen, auch den fraglichen zweiten aus einem solchen Principe darzustellen; der Versuch, den Szily [3]) bezüglich des Hamilton'schen Princips der varying action gemacht hat, kann, wie schon Clausius bemerkt, nicht als eine allgemeine Ableitung desselben

[1]) Pogg. 142, 433.
[2]) Pogg. 143, 211.
[3]) Pogg. 145, 295.

betrachtet werden. In dieser Hinsicht haben vielmehr umgekehrt jene mechanischen Untersuchungen von Boltzmann und Clausius zu neuen Sätzen der Mechanik geführt; ersterer gibt eine Verallgemeinerung des Princips der kleinsten Wirkung [1]), letzterer einen neuen für stationäre Bewegungen geltenden Satz [2]). Allein beide Sätze haben nicht die grosse Tragweite, wie sie dem Satz von der Constanz der Energie zukommt.

Ich habe nun gefunden, dass es möglich ist, das Hamilton'sche Princip zu einem solchen allgemeinen Satze zu erweitern. Dass der zweite Satz der Wärmetheorie nicht direct aus seiner Gleichung gefunden werden kann, liegt darin begründet, dass die Kräftefunction desselben in der variirten Bewegung dieselbe Function der Raumcoordinaten sein muss, wie in der ursprünglichen. Damit ist freilich noch nicht gesagt, dass deshalb die Kräftefunction nur die Coordinaten enthalten dürfe, vielmehr gilt das Princip, wie schon Jacobi wiederholt hervorgehoben, auch dann noch, wenn die Zeit explicite in ihr vorkommt. Die Verallgemeinerung lässt sich aber noch weiter führen in Bezug auf neue Grössen c_k, die neben den Coordinaten in der Kräftefunction vorkommen und beim Uebergang von der einen Bewegung zur andern variiren.

Sei also $-U$ eine solche Kräftefunction allgemeinster Art, T die lebendige Kraft des Systemes, q_i eine der μ seine Puncte bestimmenden Coordinaten. Die Ableitungen dieser Coordinaten nach der Zeit seien q_i^1, ferner setze man

---

[1]) Pogg. 143, 228.

[2]) Sitzungsber. der Niederrhein. Gesell. 1873.

$$\frac{\partial T}{\partial q_i^1} = p_i, \frac{\partial T^0}{\partial q_i^1} = p_i^0$$

je nachdem die Differentialquotienten auf die Zeit t oder auf eine gegebene Anfangszeit 0 bezogen werden, und betrachte endlich die Grössen p_i und q_i als Functionen von t und 2μ willkürlichen Constanten. Ist dann noch $T + U = E$, so gilt die Gleichung

$$\delta \int_0^t (T-U)\, dt = \Sigma\, p_i\, \delta q_i - \Sigma\, p_i{}^0 \delta q_i^0$$

$$+ \int_0^t \Sigma \left\{ \frac{\partial\,(T-U)}{\partial q_i} - \frac{dp_i}{dt} \right\} \delta q_i\, dt$$

$$- E\delta t - \int_0^t \Sigma \frac{\partial U}{\partial c_k} \delta c_k\, dt.$$

Von den beiden Gleichungen, in welche diese allgemeinste, eine ähnliche Formel von Jacobi[1]) in sich schliessende Gleichung zerfällt, liefert die eine die Differentialgleichungen des Problemes, den Satz von der Constanz der Energie und den ersten Satz der Wärmelehre. Die andere

$$\delta \int_0^t (T-U)\, dt = \Sigma\, p_i\, \delta q_i - \Sigma\, p_i^0\, \delta q_i^0$$

$$- E\delta t - \int_0^t \Sigma \frac{\partial U}{\partial c_k} \delta c_k\, dt,$$

---

[1]) Ueber diejenigen Probleme der Mechanik, in welchen eine Kräftefunction existirt etc. Vorlesungen über Dynamik 356.

welche eine Formel von Clausius [1]) umfasst, ist die erweiterte Hamilton'sche Gleichung. Diese liefert die Integralgleichungen; ausserdem aber, wenn die Bedingungsgleichungen die Zeit nicht explicite enthalten, den Satz

$$\frac{d(A-V)}{dt}+\frac{\partial V}{\partial t}=o$$

$$V=\int_0^t(T-U)\,dt\,,\;A=\int_0^t 2\,T\,dt\,,$$

welcher zwar nur die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung für diesen Fall ist, aber jetzt eine dem Satz von der Constanz der Energie analoge physicalische Bedeutung hat; an die Stelle der Kräftefunction tritt hier die Grundfunction, an die Stelle der lebendigen Kraft die Action.

Die letztere Gleichung führt nun zu dem zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie, wie sich sofort ergibt, wenn man dieselbe zunächst auf die stationären Bewegungen anwendet, welche die gemachte Voraussetzung erfüllen. Hat man ein System von Puncten, die sich in geschlossenen Bahnen mit gleicher Umlaufzeit i bewegen, so erhält man sofort die von Clausius in der ersten der angeführten Abhandlungen gegebene Gleichung [2])

$$d_{qt}\,\overline{U}=d\overline{T}+2\,\overline{T}\,d\,log\,i$$

Nimmt man die Bahnen nicht mehr als geschlossen an, sondern setzt für die stationäre Bewegung nur als Bedingung fest, dass für wachsende Zeiten

$$lim\,\Sigma\frac{p\,\delta q-p^0\,\delta q^0}{t}=o$$

[1]) Ueber einen neuen mechanischen Satz in Bezug auf stationäre Bewegungen. Sitzungsber. d. Niederrhein. Gesell. 1873.

[2]) Pogg. 142, 155.

so kommt die etwas allgemeinere Gleichung, die Clausius in seiner zweiten Abhandlung gibt[1]),

$$d_{qt}\overline{U} = d\overline{T} + \Sigma\,\overline{pq_i^1}\; d\log i.$$

Eine Bewegung der letzteren Art ist die Wärmebewegung; allein schon die erste Gleichung genügt, um die Gleichung des zweiten Hauptsatzes zu gewinnen. In welcher Weise dies geschieht, ist von Clausius (Pogg. 142, 457—460) gezeigt worden.

Nach diesen Sätzen, deren nähere Entwickelung und Anwendung sowohl in analytischer als physicalischer Beziehung an einem andern Orte gegeben werden sollen, geht nicht nur der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie in ähnlicher Weise wie der erste aus einem mechanischen Principe hervor, sondern beide haben zugleich einen gemeinsamen Ursprung in der allgemeinsten Bewegungsgleichung.

[1]) Sitzb. d. Niederrhein. Gesell. 1873.

Zürich, 4. September 1873.