Zur Theorie des Stosses elastischer Körper

von

Dr. **Heinr. Schneebeli.**

In meinen experimentellen Untersuchungen über den Stoss elastischer Körper habe ich wesentlich folgende Punkte festgestellt:

Die Stosszeit ist abhängig von Masse, Geschwindigkeit, Form und Material des stossenden Körpers.

Wie ich in meiner ersten Mittheilung schon angegeben, muss ich hier noch einmal wiederholen, dass die Resultate, die ich dort mitgetheilt habe, nur dazu bestimmt sind, die qualitativen Gesetze des Stosses zu ermitteln; erst später gelang es mir, die angewandte Methode so zu vervollkommnen, (grosse Batterie und grosser Rheostatenwiderstand), dass ich auch quantitative Bestimmungen machen konnte. Die Versuche mit den Kugeln aus verschiedenem Metall wurden mit der verbesserten, im übrigen aber von der im frühern beschriebenen nicht abweichenden Methode ausgeführt.

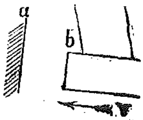
Was die Resultate der frühern Versuche betrifft, so stimmen sie annähernd mit den später gefundenen, mit Ausnahme der Versuche mit Körpern von verschiedener Masse.

Um auch für diese Aenderungen bedeutenden Spielraum zu haben, vermehrte ich noch die Zahl der stossenden Körper und zwar um einen viel leichtern von bloss 51,3 Gramm Gewicht. Es ist mir dadurch ermöglicht, die Massen beinahe im Verhältniss von 1 zu 14 zu variren und dadurch für ein quantitatives Gesetz entscheidende Werthe zu bekommen.

Im Folgenden habe ich einen idealen Fall des Stosses elastischer Körper theoretisch untersucht; in der Hoffnung, zur Erklärung der complicirtern Fälle, wie sie bei den wirklichen Versuchen sich vorfinden, zu gelangen. In wie weit die theoretisch gefundenen Resultate mit den experimentell ermittelten stimmen, werde ich nachher zeigen.

Die theoretische Untersuchung stützt sich auf die Annahme, dass die gestossene Fläche eben und absolut fest sei.

§ 1. **Stoss eines elastischen Cylinders mit ebener Stirnfläche gegen eine unveränderliche feste Ebene.**



In nebenstehender Figur sei a die feste Ebene und b die ebene Stirnfläche des Cylinders, welcher mit der Geschwindigkeit v gegen die Ebene a stösst.

Die Geschwindigkeit der Fläche b ist im Momente des Contactes gleich v; sie nimmt ab und wird nach einer bestimmten Zeit Null. Nach dieser Zeit hat die Fläche b ihre grösste Verschiebung, d. h. der Cylinder seine grösste Compression erreicht. Nun kehrt sich der Sinn der Bewegung um; die Bewegung von b, die vorher eine verzögerte war, wird nun eine accelerirte, und nach derselben Zeit, die zur Compression nöthig war, hat die Fläche b wieder die Geschwindigkeit v und auch ihre Anfangslage erreicht. In diesem Momente verlässt der stossende Körper die feste Ebene. Die Zeit, die zwischen dem Momente der ersten Berührung und diesem Augenblicke verfliesst, nannten wir Stossszeit und haben dieselbe experimentell für bestimmte Fälle festgestellt.

Betrachten wir die Bewegung der Fläche nach einer Zeit, t, indem wir den Nullpunkt unserer Zeitrechnung auf den Zeitpunkt des beginnenden Contactes legen, und ferner t kleiner wählen als die halbe Stosszeit.

Ferner sei x die Entfernung der Stirnfläche des Cylinders von ihrer Ruhelage und E der Elasticitätsmodul des Cylinders; alsdann ist die der Bewegung des Cylinders entgegenwirkende Kraft

$$P = Ex.$$

Diese Kraft wirkt auf den Cylinder, dessen Masse M sei, und gibt ihm daher eine Acceleration:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Ex}{M}$$

Diese Bewegungsgleichung können wir sofort integriren und erhalten:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{E}{M}x^2 + \text{Const.} \qquad (1)$$

Zur Bestimmung der Constanten haben wir:

$$\text{für } x = o \text{ ist } \frac{dx}{dt} = v$$

Daher

$$\text{Const.} = v^2 \qquad (2)$$

Folglich bekommen wir nun

$$T = 2\int_0^l \frac{dx}{\sqrt{v^2 - \frac{E}{M}x^2}}$$

worin l die grösste Verschiebung der Fläche b bedeutet.

$$T = 2\sqrt{\frac{M}{E}} \text{ Arc sin} \frac{\sqrt{\frac{E}{M}}}{v} l$$

l können wir noch eliminiren, indem wir überlegen, dass für:

$$x = l; \ \frac{dx}{dt} = o$$

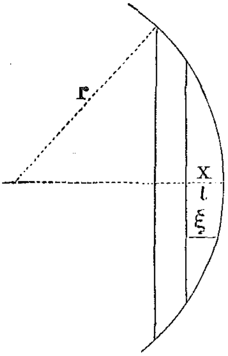
Dies ergibt aus (1) und (2)

$$l = v\sqrt{\frac{M}{E}}$$

In (1) eingesetzt kommt schliesslich:

$$T = \pi \sqrt{\frac{M}{E}} \qquad \text{I}$$

§ 2. Stoss eines mit einer kugelförmigen Stossfläche versehenen elastischen Körpers gegen eine unveränderliche feste Ebene.



Auch in diesem Falle wird der Stoss in ähnlicher Weise verlaufen, wie in dem schon behandelten Falle. Die Abplattungsfläche ist natürlich eine Ebene; aber an verschiedenen nicht concentrischen Punkten derselben werden auch verschiedene Kräfte wirken.

Bezeichnen wir die centrale Eindrückung zur Zeit t $\left(\text{wo } t < \frac{T}{2}\right)$ mit x, so wird dieselbe in der Entfernung y von der Centrallinie nur ξ betragen, und es wird daher an dieser Stelle eine Kraft thätig sein, die gleich ist $E\,\xi$. An sämmtlichen Punkten, die um y von der Centrallinie abstehen, wird dieselbe Kraft thätig sein. Um die Gesammtkraft zu erhalten, die in diesem Momente der Bewegung der Kugel entgegengewirkt, hat man die Integralsumme sämmtlicher Kräfte zu nehmen von $\xi = x$ bis $\xi = 0$, und erhält dafür

$$P = E\,x^2 \left(r - \frac{x}{3}\right)\pi$$

und daher die Bewegungsgleichung, wenn wir mit M die Masse des stossenden Körpers bezeichnen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{E}{M}x^2\left(r - \frac{x}{3}\right)\pi$$

v bedeutet hierin den Krümmungsradius der Anschlagfläche.

Die Integration geschieht ganz wie im vorigen Falle; man erhält:

$$T = \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{v^2 - \pi\frac{E}{M}\left\{\frac{2}{3}x^3 r - \frac{x^4}{6}\right\}}}$$

Das Integral lässt sich noch vereinfachen, wenn man, wie dies wirklich der Fall ist, x gegen r als sehr klein voraussetzt. Es ist alsdann:

$$T = \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{v^2 - \pi\frac{E}{M}\cdot\frac{2}{3}x^3 r}}$$

Das Integral ist ein elliptisches, und kann nur durch Reihenentwicklung gelöst werden, und macht man dies, so kommt endlich:

$$T = K\sqrt[3]{\frac{M}{r\,E\,v}} \qquad \text{II}$$

worin K ein constanter Factor, und v wie früher die Geschwindigkeit des stossenden Körpers bezeichnet.

§ 3. Vergleichung der experimentell gefundenen Resultate mit den theoretisch berechneten.

In Pogg. Anal. Bd. 145, pag. 331, habe ich aus meinen experimentellen Versuchen den Satz gezogen:

Stösst eine Reihe elastischer Körper gegen dieselbe elastische Fläche, so sind die Stosszeiten umgekehrt proportional der Wurzel aus ihren Elasticitätscoefficienten.

Dieser Satz würde vollkommen in Uebereinstimmung stehen mit der Formel I, wenn wir dort, statt Kugeln, Cylinder als stossende Körper verwendet hätten. Die Uebereinstimmung wird erreicht, sobald wir annehmen, dass die Eindrücke bei den verschiedenen Kugeln nicht sehr verschieden seien, und wird daher bis auf einen constanten Factor, den Stoss der Kugeln ansehen dürfen als den Stoss von Cylindern; jeden Falls wird der Einfluss der Kugelform bei diesen wenig verschiedenen Einbiegungen sich sehr wenig geltend machen. Wenn wir dieselbe Annahme machen für den Stoss von Körpern mit verschiedener Masse (beiläufig sei bemerkt, dass die Krümmungsradien der Anschlagflächen dieser Körper ziemlich bedeutend waren) so stimmen ebenfalls unsere experimentellen Resultate mit Formel I, denn es ergaben:

Gewicht der Körper	m	Ausschlag a	$\frac{a}{\sqrt{m}}$
I	695	216,0	259
II	498	180,1	255
III	346	143,0	244
IV	255,5	125,0	250
V	51,3	65,0	287

woraus also der Satz folgen würde:

Die Stosszeit verschieden schwerer Körper von demselben Material ist proportional der Wurzel aus ihrer Masse.

Die Nummer (5) weicht zwar ziemlich ab, indessen ist zu berücksichtigen, dass bei allen Körpern die Masse der Aufhängungsdrähte vernachlässigt wurde. Bei den ersten vier Körpern ist dies wohl gerechtfertigt, hingegen für den fünften wird diese Vernachlässigung bei dem geringen Gewicht desselben eine Abweichung in obigem Sinne ergeben. Bei der grossen Variation mit den Massen ist indessen die Abweichung nicht so bedeutend, dass sie dem Gesetze widersprechen würde.

Die theoretische Untersuchung ergibt ferner:

Stossen Körper mit verschieden gekrümmten Anschlagflächen gegen eine feste Ebene, so ist die Stosszeit umgekehrt proportional der dritten Wurzel aus dem Krümmungsradius.

Vergleichen wir dies theoretische Resultat mit dem experimentell gefundenen und benutzen wir die Zahlen, die ich in Pogg. Anal., Bd. 143, pag. 246, gegeben, so kommt:

Krümmungsradius r	Ausschläge a	$\sqrt[3]{r}\, a$
5,2	101,0	175 + 16
11,6	90,8	205 — 14
29,0	72,5	220 — 29
62,0	41,3	165 + 26
	Im Mittel	191

Die Abweichungen sind ziemlich bedeutend; indessen leicht erklärlich aus der wohl nicht mathematisch genauen Kugelform der Anschlagflächen. Beim Härten des Stahles wird sehr oft beobachtet, dass seine Form sich beim raschen Abkühlen verändert; die Unvollkommenheiten der Bearbeitung vor dem Härten mit dieser Veränderung zusammengenommen genügen zur Erklärung der Abweichungen vollkommen; wenn wir an die äusserst kleinen Einbiegungen denken.

Weiter ergibt Formel II:

Stösst eine Kugel mit verschiedenen Geschwindigkeiten gegen eine feste Ebene, so sind die Stosszeiten umgekehrt proportional der dritten Wurzel aus der Geschwindigkeit.

Ich will aus einer Beobachtung einige Zahlen anführen:

Fallhöhe	Ausschlag	Produkt aus $\sqrt[3]{v} \cdot a$
sehr klein.	130	—
2,3 mm	87,5	99,0
10	64,5	96,0
25	55,0	94,1
50	49,5	95,8
100	45,0	95,9
200	40,5	97,8
400	35,0	95,0
500	32,5	91,6

also annähernde Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie.

Was den Einfluss der Länge des stossenden Körpers auf die Stosszeit betrifft, so geht diese Grösse gar nicht in die Formel ein und bleibt also in dieser Hinsicht zwischen Theorie und Beobachtung noch eine Lücke bestehen. Ueberhaupt hat diese mathematische Lösung des Problems nur Anspruch als eine erste Näherung und bleibt die vollständige Lösung mit Berücksichtigung der Einbiegungen der gestossenen Fläche noch als weitere mathematische Aufgabe.