höhen 23 und 246, die Pulververhältnisszahlen 1,8 und 104, d. h. für ein etwa 10 mal tieferes Bohrloch 60 (statt 1000) mal mehr Pulver. Diese Colonne mag also in der Praxis bessere Anhaltspunkte als die alte Routine bieten; die übrigen Zahlen sollen nur die Resultate der Theorie zur Anschauung bringen und die Tafel ergänzen.

Transformation der projectivischen Coordinaten.

Von

Joh. Julius Hemming.

In seiner Abhandlung über die projectivischen Coordinaten (Vierteljahrsschrift der naturforsch. Gesellschaft in Zürich XV. 2, pag. 152—182), entwickelt Herr Professor Fiedler diese Coordinaten und ihren Zusammenhang mit den Cartesischen und Plückerschen Coordinaten auf eine so schöne und einfache Weise, dass wir nunmehr in den Stand gesetzt sein dürften, dieselben gleich zu Anfang direct in der analytischen Geometrie aufzustellen und so mit ihnen das wichtigste Princip der Geometrie, das Princip der Dualität, an die Spitze zu setzen. Dadurch würden wir zu einer wahren analytischen Geometrie der Lage gelangen. Von diesem Gedanken ausgehend, will ich im Folgenden die Transformation der projectivischen Coordinaten so zu geben versuchen, dass dabei die geometrische Anschauung völlig gewahrt bleibt.

I. Transformation für die Ebene (das Bündel).

In der Bezeichnung will ich mich genau an die erwähnte Abhandlung von Hrn. Professor Fiedler halten. $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3 E\,(a_1 a_2 a_3 e)$ sei das alte, $\mathcal{A}'_1\mathcal{A}'_2\mathcal{A}'_3 E'\,(a'_1 a'_2 a'_3 e')$ das neue Coordinatensystem. Ferner seien a_{k1}, a_{k2}, a_{k3} $(\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \alpha_{k3})$ die Coordinaten der Ecken $\mathcal{A}'_k$ (Seiten a'_k) des neuen Dreiecks, bezogen aufs alte, $a'_{i1}, a'_{i2}, a'_{i3}$ $(\alpha'_{i1}, \alpha'_{i2}, \alpha'_{i3})$ die neuen Coordinaten der Ecken $\mathcal{A}_i$ (Seiten a_i) des alten Dreiecks; endlich sollen x_1, x_2, x_3 und x'_1, x'_2, x'_3 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3$ und $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3)$ die alten und neuen Coordinaten irgend eines Punktes $\mathcal{P}$ (Strahles p) der Ebene bedeuten.

a. Lassen wir jetzt nach den drei Punkten $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$, in welchen die Seiten a_1, a_2, a_3 des alten Dreiecks von einer ganz beliebigen Geraden l geschnitten werden, die drei Strahlen p_1, p_2, p_3 gehen und ziehen $l_i \parallel l$, $p \parallel \lambda'_k \varepsilon'_k$, so erhalten wir als neue Coordinaten irgend eines dieser Strahlen p_i:

$$\xi'_{ik} = \alpha'_{ik} - \frac{\mathcal{S}_i\mathcal{P}_{ik}}{\varepsilon'_k} \cdot \frac{l_i}{\mathcal{S}_i\mathcal{P}}\, x_i = \alpha'_{ik} - \lambda'_k \cdot \frac{l_i}{p}\, x_i,$$

$$\xi'_{i1} = \alpha'_{i1} - \lambda'_1 \cdot \frac{l_i}{p}\, x_i,\ \xi'_{i2} = \alpha'_{i2} - \lambda'_2 \cdot \frac{l_i}{p}\, x_i,\ \xi'_{i3} = \alpha'_{i3} - \lambda'_3 \cdot \frac{l_i}{p}\, x_i$$

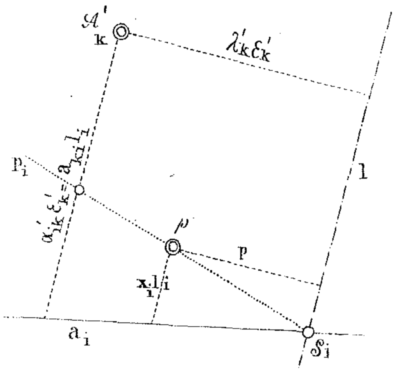
und folglich als Gleichung desselben, bezogen auf's neue Dreieck:

$$(\lambda'_1 x'_1 + \lambda'_2 x'_2 + \lambda'_3 x'_3) \cdot \frac{l_i}{p}\, x_i = \alpha'_{i1} x'_1 + \alpha'_{i2} x'_2 + \alpha'_{i3} x'_3,$$

oder wenn wir zur Abkürzung $\Sigma \lambda'_k x'_k = m$ setzen und bedenken, dass $\alpha'_{ik}\, \varepsilon'_k = a_{ki}\, l_i$:

$$m_i x_i = \frac{p_i}{l_i}\,(\alpha'_{i1} x'_1 + \alpha'_{i2} x'_2 + \alpha'_{i3} x'_3) = \frac{p}{\varepsilon'_1}\, a_{1i} x'_1 + \frac{p}{\varepsilon'_2}\, a_{2i} x'_2 + \frac{p}{\varepsilon'_3}\, a_{3i} x'_3.$$

Setzen wir hierin für i der Reihe nach die Indices 1, 2, 3, so bekommen wir die Gleichungen der drei Strahlen p_1, p_2, p_3. Da der Punkt $\mathcal{P}$ der gemeinschaftliche Schnittpunkt der letztern ist, so genügen seine Coordinaten x' allen drei Gleichungen zugleich und diese sind insofern genau die gesuchten Transformationsformeln. Da ferner die projectivischen Coordinaten x (ξ) irgend eines Punktes (Strahles) ihre Bedeutung als solche nicht verlieren, wenn man sie mit einem beliebigen Faktor h multiplizirt, indem es ja nur auf ihre Verhältnisse ankommt, so dürfen wir ohne Bedenken das m in die x_i, die $\frac{p}{l_i}$ in die $\alpha'_{i1}, \alpha'_{i2}, \alpha'_{i3}$ und die $\frac{p}{l'_k}$ in die a_{k2}, a_{k2}, a_{k3} eingehen lassen. Die Transformationsformeln lauten alsdann:



$$\text{I.} \begin{cases} x_1 = \alpha'_{11}x'_1 + \alpha'_{12}x'_2 + \alpha'_{13}x'_3 = a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + a_{31}x'_3 \\ x_2 = \alpha'_{21}x'_1 + \alpha'_{22}x'_2 + \alpha'_{23}x'_3 = a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{32}x'_3 \\ x_3 = \alpha'_{11}x'_1 + \alpha'_{32}x'_2 + \alpha'_{33}x'_3 = a_{13}x'_1 + a_{23}x'_2 + a_{33}x'_3 \end{cases}$$

In Zeilen, d. h. horizontal gelesen, bedeuten die Substitutionscoefficienten die neuen Coordinaten der Seiten des alten Dreiecks*), vertikal abwärts oder in Reihen gelesen die alten Coordinaten der Ecken des neuen.

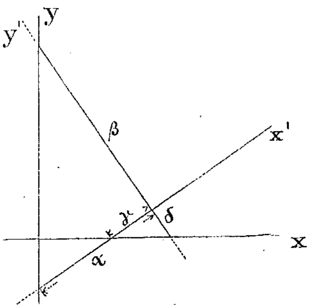
Aus den Formeln I. ergeben sich auch leicht die Transformationsformeln für die gewöhnlichen rechtwink-

*) Lassen wir die Voraussetzung, Einheitspunkt und Einheitsgerade seien durch das Fundamentaldreieck harmonisch getrennt, fallen, so lautet die Gleichung einer Geraden nicht mehr: $\xi_1 x_1$ +

ligen Coordinaten. Wir rücken zu diesem Ende die dritten Seiten a_3 und a'_3 unserer beiden Dreiecke in's Unendliche und haben dann:

$$x = \frac{x_1}{x_3}\left(\frac{\alpha'_{11}}{\alpha'_{13}}\frac{x'_1}{x'_3} + \frac{\alpha'_{12}}{\alpha'_{13}}\frac{x'_2}{x'_3} + 1\right)\frac{\alpha'_{13}}{\alpha'_{33}} = \left(\frac{1}{\alpha}x' + \frac{1}{\beta}y' + 1\right)a$$

$$y = \frac{x_2}{x_3}\left(\frac{\alpha'_{21}}{\alpha'_{23}}\frac{x'_1}{x'_3} + \frac{\alpha'_{22}}{\alpha'_{23}}\frac{x'_2}{x'_3} + 1\right)\frac{\alpha'_{23}}{\alpha'_{33}} = \left(\frac{1}{\gamma}x' + \frac{1}{\delta}y' + 1\right)b$$



Nehmen wir jetzt noch $\angle(x, y) = \angle(x', y') = 90°$, so folgt sofort:

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi + a$$
$$y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi + b$$

b. Um die Transformation für die Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 und ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 einer Geraden p zu machen, nehmen wir irgend einen Punkt $\mathscr{L}$ der Ebene zu Hülfe. Die geraden Verbindungslinien derselben mit den Ecken $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3$ des alten Dreiecks bestimmen auf der Geraden p drei Punkte $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{P}_3$, die den drei Strahlen p_1, p_2, p_3 im Vorhergehenden entsprechen. Ziehen wir $l'_k \parallel p$ und $\xi_i\, \varepsilon_i \parallel \pi$, so erhalten wir für die neuen Coordinaten $x'_{i1}, x'_{i2}, x'_{i3}$ irgend eines dieser Punkte $\mathscr{P}_i$:

$$(\pi + \xi_i\, \varepsilon_i)\, x'_{ik} = \pi \cdot a'_{ik} + \xi_i\, \varepsilon_i \cdot l'_k$$

und somit ist nach Weghebung des Faktors $\pi + \xi_i \varepsilon_i$ folgende Gleichung die Gleichung von $\mathscr{P}_i$:

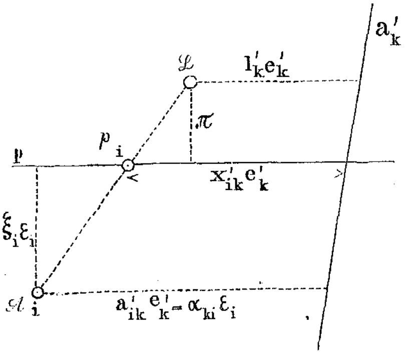
$+ \xi_2\, x_2 + \xi_3\, x_3 = 0$, sondern $k_1\, \xi_1\, x_1 + k_2\, \xi_2\, x_2 + k_3\, \xi_3\, x_3 = 0$, wo die k drei Grössen bedeuten, deren Verhältnisse gegebene Constanten sind, und die Bedeutung der Substitutionscoeffizienten wird dadurch etwas verändert.

$$(l'_1 \xi'_1 + l'_2 \xi'_2 + l'_3 \xi'_3) \frac{\varepsilon_i}{\pi} \xi_i = a'_{i1} \xi'_1 + a'_{i2} \xi'_2 + a'_{i3} \xi'_3$$

oder wenn wir zur Abkürzung $\Sigma l'_k \xi'_k = \mu$ setzen:

$$\mu \xi_i = \frac{\pi}{\varepsilon_i} (a'_{i1} \xi'_1 + a'_{i2} \xi'_2 + a'_{i3} \xi'_3) = \frac{\pi}{l'_1} \alpha_{1i} \xi'_1 + \frac{\pi}{l'_2} \alpha_{2i} \xi'_2 + \frac{\pi}{l'_3} \alpha_{3i} \xi'_3.$$

Für $i = 1, 2, 3$ ergeben sich hieraus die Gleichungen der drei Punkte P_1, P_2, P_3 und insofern als diese alle drei auf der Geraden p liegen, die Coordinaten ξ' der letztern also jenen drei Gleichungen zugleich genügen, stellen diese Gleichungen genau unsere gesuchten Transformationsformeln dar. Lassen wir das μ in die ξ_i,



die $\frac{\pi}{\varepsilon_i}$ in die $a'_{i1}, a'_{i2}, a'_{i3}$ und die $\frac{\pi}{l'_1}$ in die $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \alpha_{k3}$ eingehen, so erhalten wir:

$$\text{II.} \begin{cases} \xi_1 = a'_{12} \xi'_1 + a'_{12} \xi'_2 + a'_{13} \xi'_3 = \alpha_{11} \xi'_1 + \alpha_{21} \xi'_2 + \alpha_{31} \xi'_3 \\ \xi_2 = a'_{21} \xi'_1 + a'_{22} \xi'_2 + a_{23} \xi'_3 = \alpha_{12} \xi'_1 + \alpha_{22} \xi'_2 + \alpha_{32} \xi'_3 \\ \xi_3 = \alpha'_{31} \xi'_1 + \alpha'_{32} \xi'_2 + \alpha'_{23} \xi'_3 = \alpha_{13} \xi'_1 + \alpha_{23} \xi'_2 + \alpha_{33} \xi'_3 \end{cases}$$

Die Zeilen der Substitutionscoeffizienten bedeuten die neuen Coordinaten der Ecken des alten Dreiecks, die Reihen die alten Coordinaten der Seiten des neuen.

In der Ebene wird also die Transformation der projectivischen Coordinaten vermittelt:

a) für Punktcoordinaten durch eine ganz beliebige Gerade l;

b) für Strahlencoordinaten durch einen ganz beliebigen Punkt $\mathfrak{L}$.

Etwas einfacher gestaltet sich die Untersuchung, wenn wir statt einer beliebigen Geraden l die unendlich ferne Gerade und statt eines beliebigen Punktes $\mathscr{L}$ einen unendlich fernen Punkt zu Hülfe nehmen. Wie bei Untersuchungen in der Geometrie der Lage überhaupt mag es aber auch hier am Platze sein, die Lösung der Aufgabe in allgemeinster Weise durchzuführen.

II. Transformation für den Raum.

a. Der leitende Gedanke für die Entwicklung ist derselbe. Um den Uebergang von den Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Punktes $\mathscr{P}$ zu den neuen x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 zu bewerkstelligen, legen wir durch den Punkt $\mathscr{P}$ und die Schnittlinien s_1, s_2, s_3, s_4 der Hülfsebene L mit den Seitenebenen A_1, A_2, A_3, A_4 des alten Fundamentaltetraeders die Ebenen P_1, P_2, P_3, P_4 und stellen die Gleichungen der letztern auf:

$$(\lambda'_1 x'_1 + \lambda'_2 x'_2 + \lambda'_3 x'_3 + \lambda'_4 x'_4) \frac{l_i}{p} x_i = \alpha'_{i1} x'_1 + \alpha'_{i2} x'_2 + \alpha'_{i3} x'_3 + \\ + \alpha'_{i4} x'_4 \qquad [i = 1, 2, 3, 4],$$

worin p den Abstand des Punktes $\mathscr{P}$ von der Ebene L (oder allgemeiner die Länge einer beliebigen Geraden zwischen $\mathscr{P}$ und L) bedeutet. Aehnlich wie oben ergeben sich hieraus unsere Transformationsformeln:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} x_1 = \alpha'_{11}x'_1 + \alpha'_{12}x'_2 + \alpha'_{13}x'_3 + \alpha'_{14}x'_4 = a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + a_{31}x'_3 + a_{41}x'_4 \\ x_2 = \alpha'_{21}x'_1 + \alpha'_{22}x'_2 + \alpha'_{23}x'_3 + \alpha'_{24}x'_4 = a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{32}x'_3 + a_{42}x'_4 \\ x_3 = \alpha'_{31}x'_1 + \alpha'_{32}x'_2 + \alpha'_{33}x'_3 + \alpha'_{34}x'_4 = a_{13}x'_1 + a_{23}x'_2 + a_{33}x'_3 + a_{43}x'_4 \\ x_4 = \alpha'_{41}x'_1 + \alpha'_{42}x'_2 + \alpha'_{43}x'_3 + \alpha'_{44}x'_4 = a_{14}x'_1 + a_{24}x'_2 + a_{34}x'_3 + a_{44}x'_4 \end{cases}$$

Die Zeilen der Substitutionscoeffizienten repräsentiren die neuen Coordinaten der Seitenebenen des alten Fundamentaltetraeders, die Reihen die alten Coordinaten der Ecken des neuen.

b. Bei der Transformation der Coordinaten einer Ebene P nehmen wir einen beliebigen Punkt $\mathscr{L}$ zu Hülfe. Die geraden Verbindungslinien s_1, s_2, s_3, s_4 desselben mit den Ecken $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ des alten Tetraeders bestimmen auf der Ebene $\boldsymbol{P}$ vier Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4$, die den obigen Ebenen $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4$ entsprechen. Aus den Gleichungen dieser vier Punkte $\mathcal{P}_i$:

$$(l'_1 \xi'_1 + l'_2 \xi'_2 + l'_3 \xi'_3 + l'_4 \xi'_4) \frac{\varepsilon_i}{\pi} \xi_i = a'_{i1} \xi'_1 + a'_{i2} \xi'_2 + a'_{i3} \xi'_3 + a'_{i4} \xi'_4$$
$$[i = 1, 2, 3, 4]$$

ergeben sich sofort die gesuchten Transformationsformeln:

$$\text{II.} \begin{cases} \xi_1 = a'_{11}\xi'_1 + a'_{12}\xi'_2 + a'_{13}\xi'_3 + a'_{14}\xi'_4 = \alpha_{11}\xi'_1 + \alpha_{21}\xi'_2 + \alpha_{31}\xi'_3 + \alpha_{41}\xi'_4 \\ \xi_2 = a'_{21}\xi'_1 + a'_{22}\xi'_2 + a'_{23}\xi'_3 + a'_{24}\xi'_4 = \alpha_{12}\xi'_1 + \alpha_{22}\xi'_2 + \alpha_{32}\xi'_3 + \alpha_{42}\xi'_4 \\ \xi_3 = a'_{31}\xi'_1 + a'_{32}\xi'_2 + a'_{33}\xi'_3 + a'_{34}\xi'_4 = \alpha_{13}\xi'_1 + \alpha_{23}\xi'_2 + \alpha_{33}\xi'_3 + \alpha_{43}\xi'_4 \\ \xi_4 = a'_{41}\xi'_1 + a'_{42}\xi'_2 + a'_{43}\xi'_3 + a'_{44}\xi'_4 = \alpha_{14}\xi'_1 + \alpha_{24}\xi'_2 + \alpha_{34}\xi'_3 + \alpha_{44}\xi'_4 \end{cases}$$

Die beiden Lesungsarten für die Coeffizienten ergeben sich aus denjenigen für die Formeln (I.) nach dem Reciprocitätsgesetze.

Im Raume wird also die Transformation der projectivischen Coordinaten vermittelt:

a) für Punktcoordinaten durch eine ganz beliebige Ebene $\boldsymbol{L}$;

b) für Ebenencoordinaten durch einen ganz beliebigen Punkt $\mathcal{L}$.

III. Transformation für das räumliche Strahlensystem.

Hier läuft die ganze Untersuchung auf die Entwicklung einer Determinante hinaus.

a. Indem wir den Strahl p als die Verbindungslinie zweier Punkte y und z betrachten, hat er die Coordinaten $p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i$, $p'_{ik} = y'_i z'_k - y'_k z'_i$; fassen wir ihn aber als Schnittlinie zweier Ebenen η und ξ auf, so sind seine Coordinaten $\pi_{ik} = \eta_i \xi_k - \eta_k \xi_i$, $\pi'_{ik} = \eta'_i \xi'_k - \eta'_k \xi'_k$, wo $i\,k$ beide Male alle Combinationsformen der Indices 1, 2, 3, 4 zur zweiten Klasse repräsentirt. Aus der Formel (I.) der vorigen Transformation folgt:

$$p_{ik}=\begin{vmatrix} y_i z_i \\ y_k z_k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha'_{i1}y'_1+\alpha'_{i2}y'_2+\alpha'_{i3}y'_3+\alpha'_{i4}y'_4, & \alpha'_{i1}z'_1+\alpha'_{i2}z'_2+\alpha'_{i3}z'_3+\alpha'_{i4}z'_4 \\ \alpha'_{k1}y'_1+\alpha'_{k2}y'_2+\alpha'_{k3}y'_3+\alpha'_{k4}y'_4, & \alpha'_{k1}z'_1+\alpha'_{k2}z'_2+\alpha'_{k3}z'_3+\alpha'_{k4}z'_4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{1i}y'_1+a_{2i}y'_2+a_{3i}y'_3+a_{4i}y'_4, & a_{1i}z'_1+a_{2i}z'_2+a_{3i}z'_3+a_{4i}z'_4 \\ a_{1k}y'_1+a_{2k}y'_2+a_{3k}y'_3+a_{4k}y'_4, & a_{1k}z'_1+a_{2k}z'_2+a_{3k}z'_3+a_{4k}z'_4 \end{vmatrix}$$

Entwickeln wir diese zwei Determinanten und bedenken, $\begin{vmatrix} \alpha'_{ir}, & \alpha'_{is} \\ \alpha'_{kr}, & \alpha'_{ks} \end{vmatrix}=\alpha^{ik'}_{rs}$ und $\begin{vmatrix} a_{ri} & a_{si} \\ a_{rk} & a_{sk} \end{vmatrix}=a^{rs}_{ik}$ die Coordinaten der Kanten $A_i A_k$ und $\mathscr{A}'_r \mathscr{A}'_s$ des alten und neuen Tetraeders resp. im neuen und alten Coordinatensystem bedeuten, so folgt:

$$p_{ik}=\alpha^{ik'}_{12}p'_{12}+\alpha^{ik'}_{13}p'_{13}+\alpha^{ik'}_{14}p'_{14}+\alpha^{ik'}_{23}p'_{23}+\alpha^{ik'}_{24}p'_{24}+\alpha^{ik'}_{34}p'_{34}=$$
$$=a^{12}_{ik}p'_{12}+a^{13}_{ik}p'_{13}+a^{14}_{ik}p'_{14}+a^{23}_{ik}p'_{23}+a^{24}_{ik}p'_{24}+a^{34}_{ik}p'_{34}.$$

Unsere Transformationsformeln lauten daher:

$$\text{I.}\begin{cases} p_{12}=\alpha^{12'}_{12}p'_{12}+\alpha^{12'}_{13}p'_{13}+\alpha^{12'}_{14}p'_{14}+\alpha^{12'}_{23}p'_{23}+\alpha^{12'}_{24}p'_{24}+\alpha^{12'}_{34}p'_{34}= \\ \qquad =a^{12}_{12}p_{12}+a^{13}_{12}p_{13}+a^{14}_{12}p_{14}+a^{23}_{12}p_{23}+a^{24}_{12}p_{24}+a^{34}_{12}p_{34} \\ p_{13}=\alpha^{13'}_{12}p'_{12}+\ldots \\ p_{14}=\alpha^{14'}_{12}p'_{12}+\ldots \\ p_{23}=\alpha^{23'}_{12}p'_{12}+\ldots \\ p_{24}=\alpha^{24'}_{12}p'_{12}+\ldots \\ p_{34}=\alpha^{34'}_{12}p'_{12}+\ldots \end{cases}$$

Die Zeilen der Substitutionscoeffizienten repräsentiren die neuen Coordinaten der Kanten $A_i A_k$ des alten Tetraeders, die Reihen die alten Coordinaten der Kanten $\mathscr{A}'_r \mathscr{A}'_s$ des neuen.

b) Ganz ebenso erhalten wir aus den Formeln (II.) der Transformation für den Raum:

$$\text{II.}\begin{cases} \pi_{12}=a^{12'}_{12}\pi'_{12}+a^{12'}_{13}\pi'_{13}+a^{12'}_{14}\pi'_{14}+a^{12'}_{23}\pi'_{23}+a^{12'}_{24}\pi'_{24}+a^{12'}_{34}\pi'_{34}= \\ \qquad =\alpha^{12}_{12}\pi'_{12}+\alpha^{13}_{12}\pi'_{13}+\alpha^{14}_{12}\pi'_{14}+\alpha^{23}_{12}\pi'_{23}+\alpha^{24}_{12}\pi'_{24}+\alpha^{34}_{12}\pi'_{34} \\ \pi_{13}=a^{13'}_{12}\pi'_{12}+\ldots \\ \pi_{14}=a^{14'}_{12}\pi'_{12}+\ldots \\ \pi_{23}=a^{23'}_{12}\pi'_{12}+\ldots \\ \pi_{24}=a^{24'}_{12}\pi'_{12}+\ldots \\ \pi_{34}=a^{34'}_{12}\pi'_{12}+\ldots \end{cases}$$

in welchen Formeln die Zeilen der Coeffizienten die neuen Coordinaten der Kanten $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_k$ des alten Tetraeders, die Reihen die alten Coordinaten der Kanten $A_r A_s$ des neuen darstellen.

Indem Hr. Prof. Fiedler die Ebene (den Raum) als zwei sich deckende congruente ebene (räumliche) Systeme auffasst, gelangt er unmittelbar von den Projectivitätsgleichungen collinearer Systeme und ihrer geometrischen Interpretation zu den obigen Transformationsformeln und der geometrischen Deutung ihrer Coeffizienten (Vortrag in der naturforsch. Gesellschaft in Zürich vom 9. Jan. 1871). Der Allgemeinheit dieser Auffassung gegenüber dürfte immerhin für den ersten Unterricht in der analytischen Geometrie der homogenen oder projectivischen Coordinaten der obige Entwicklungsgang nicht ohne Nutzen sein.

Notizen.

Zur Geschichte der Röhrenlibelle. In einer im zweiten Jahrgange dieser Vierteljahrsschrift veröffentlichten Notiz über »die Erfindung der Röhrenlibelle« habe ich den Nachweis geleistet, dass die Röhrenlibelle in einer spätestens 1666 erschienenen anonymen Schrift nach Construction und Anwendung beschrieben, also ihre Erfindung spätestens 1666 gemacht wurde. Leider war es mir jedoch nicht möglich ein Exemplar dieser Schrift, oder ein Exemplar von »Thévenot, Recueil de voyages. Paris 1681 in 8«, wo das neue Niveau ebenfalls abgebildet und beschrieben sein sollte, aufzutreiben, oder überhaupt zureichende Quellen zur definitiven Feststellung der Geschichte dieses wichtigen Instrumentes aufzufinden, — ich musste mich damit begnügen es als wahrscheinlich hinzustellen, dass ein Pariser-