

Bemerkungen über die Theorie der Capillarerscheinungen.

Von

Alb. Mousson.

(Vortrag vom 14. November 1870.)

Unter den Erscheinungen, welche von dem Spiele der Molecularkräfte abhängen, bilden wohl die Capillarerscheinungen eines der wichtigsten, mannigfaltigsten und best abgegrenzten Gebiete. Es stellen sich diese Erscheinungen als Abweichungen von den gewöhnlichen hydrostatischen Gesetzen dar, Abweichungen, welche sich in der Nähe der festen Wände oder auch ohne dieselben entwickeln und wesentlich in Veränderungen der Gestalt und der Druckverhältnisse bestehen. Wenn die Schwere und die äussern Kräfte in erster Linie die Gestalt einer grössern Flüssigkeitsmasse bestimmen und daher eine erste Annäherung an die Wahrheit begründen, so erscheinen die Capillarerscheinungen als eine zweite Annäherung, in welcher die zwischen den flüssigen Theilchen unter sich und mit dem festen Körper der Wände thätigen Molecularkräfte zum Ausdrucke gelangen.

Um diese Erscheinungen vollständig zu erklären, sollte man die Natur der Molecularkräfte, aus deren Wirkung sie hervorgehen, genau kennen. Leider aber entziehen sie sich einer directen Ermittlung, erstens weil sie in jeder messbaren Entfernung nahe

erlöschen, zweitens weil man nie eine einfache Wirkung, sondern stets die Resultirende zahlloser einzelner Wirkungen vor Augen hat. Wie in allen ähnlichen Fällen befolgt auch hier die Physik den sichern Gang, dass sie vorerst die einfachen Grundgesetze aufsucht, auf welche die mannigfachen Erscheinungen sich zurückführen lassen, und nachher diese Gesetze als nothwendiges Ziel einer jeden auf Wahrscheinlichkeit Anspruch machenden Theorie hinstellt. Eine solche Theorie darf aber nicht bloss eine für diese besondere Classe von Erscheinungen ersonnene mathematische Conception sein, sondern sie soll eine reale physicalische Bedeutung erhalten, was nur dann der Fall ist, wenn sie an die Molecularkräfte mit allen den Eigenschaften anknüpft, die man aus andern Molecularerscheinungen kennt.

Das Ergebniss all unserer Beobachtungen über die Molecularkräfte, welche zwischen den Theilchen der Körper wirksam sind, lässt sich in folgende Hauptsätze zusammenfassen:

1) Aller Wahrscheinlichkeit nach wirken zwischen den Theilchen der Körper zwei Kräfte: eine den Theilchen innewohnende und ihnen bleibend zugehörige Anziehung, und eine von ihrem Wärme- oder ihrem Bewegungszustande abhängige, also den Theilchen nicht zugehörige, veränderliche Abstossung.

2) Beide Kräfte nehmen rasch mit der Entfernung der Theilchen ab, können in unmerklicher Entfernung sehr stark sein, verschwinden aber in jeder messbaren nahe ganz.

3) Die Abstossung nimmt rascher ab, als

die Anziehung, daher bei Compression eines Körpers jene vorwaltet, bei Ausdehnung desselben diese; daraus erklären sich die Elasticitätserscheinungen.

4) durch Erwärmung eines Körpers verstärkt man die Abstossung; das Gleichgewicht findet bei immer kleinern Werthen der Kräfte statt, endlich besteht ein solches nicht mehr, weil die Abstossung ganz vorwaltet, oder der Verband der Theilchen ganz aufhört. Man gibt sich so von den Aggregatformen des Festen, Flüssigen und Luftförmigen Rechenschaft.

5) Bei geringer Wirkung der Abstossung offenbart sich nach verschiedenen Richtungen eine verschiedene Molecularkraft, mag diese Verschiedenheit nun von der besondern Gestalt, oder der Gruppierung oder der Bewegungsweise der Theilchen herrühren. Darin findet sich die Erklärung der Krystallbildung, durch Anordnung der Theilchen in die stabilsten Lagen.

Es wäre nun von hohem Interesse zu wissen, bis auf welche Entfernung die resultirenden Molecularkräfte merkbare Wirkungen ausüben. Daraus z. B. dass die hebende Wirkung einer engen Glasröhre auf Wasser die gleiche bleibt, so weit man auch die Glasdicke verdünnen kann, hatte man schliessen wollen, dass jene Entfernung eine wirklich unmessbare sei. Diese Annahme ist nicht ganz richtig. Plateau*) (1861) beweist mit guten Gründen, dass eine dünne Blase, welche unverändert fort dauert (aus einem Gemisch von Seifenwasser und Glycerin

*) Plateau, Mém. d. Brux. 1861, XXXIII. Pogg. Ann. CXIV. 608.

stellte er solche her, die sich viele Stunden erhielten) eine Hüllendicke besitzt, die dem doppelten Bereich der Molecularkräfte der Flüssigkeitstheilchen gleich ist. Diese Dicke, optisch aus den Newton'schen Farben und dem Brechungsverhältniss der Flüssigkeit bestimmt, ergab für jene Flüssigkeit die Wirkungsgrenze λ :

Glycerin-Seifenlösung $\lambda = 0,00005645$ Mm.

Quincke*) (1869), davon ausgehend, dass das Steigen oder Sinken einer netzenden oder nichtnetzenden Flüssigkeit an einer Wand, d. h. der Randwinkel sich verändert, wenn die von der Wand ausgehende Molecularkraft sich ändert, hat auf die Wand einen dünnen keilförmigen Ueberzug angebracht und untersucht, von welcher Dicke an die Wirkung nur von dem Ueberzuge abhängt. Unterhalb dieser Dicke übt auch die Wand noch einen Einfluss und jene Dicke bezeichnet daher die Grenze der Wandwirkung.

So fand Quincke

Glas, durch Silber auf Wasser	$\lambda = 0,0000542$ Mm.
„ „ Schwefelsilb. auf Qu.	$\lambda = 0,0000482$ „
„ „ Jodsilber auf Qu.	$\lambda = 0,0000590$ „
„ „ Collodium auf Qu.	$\lambda < 0,0000797$ „

Diese Bestimmungen, die einzigen genauern, die man besitzt, stimmen merkwürdig überein, die Wirkungsgrenze der Molecularkräfte auf

0,00005 Mm.

zu setzen, eine Grösse, die immer noch zehnmal kleiner ist als die Wellenlänge des Lichtes.

Eine nothwendige Folge der Wirkungssphäre der Theilchen ist es, dass die Grenzschicht einer

*(Quincke, Pogg. Annal. 1869. CXXXVII. 402.

Flüssigkeit, sowohl gegen den freien Raum hin, als gegen eine Wand, in einem andern Gleichgewichtszustande sich befinden und mit einer andern weit geringern Beweglichkeit begabt sein muss, als mehr im Innern. Im Innern nämlich wird ein Theilchen ringsherum von andern gleichartigen umschlossen, die Verschiebbarkeit ist, was die Molecularkräfte betrifft, nach allen Seiten gleich und so auch die Dichte der Masse constant. An der Begrenzung hingegen bestehen in der Dicke λ der Wirkungssphäre offenbar veränderliche Verhältnisse. Während die Theilchen parallel der Grenzfläche immer noch ringsherum gleichartigen Wirkungen ausgesetzt sind, kann diess normal zu ihr nicht mehr der Fall sein, die Einwirkungen von der einen Seite weichen von denen der andern ab, daher werden Dichte und Beweglichkeit von der innern Flüssigkeit bis zu ihrer mathematischen Begrenzung variiren müssen. Dass die Kräftewirkungen an der äussersten Grenzfläche wirklich andere sind als im Innern, beweist z. B. die freie Verdunstung der meisten Flüssigkeiten und selbst mancher fester Körper; sie beweist nämlich, dass daselbst die Wärmeabstossung oder richtiger ausgesprochen, die Wärmeschwingungen der kleinsten Theilchen, nicht mehr von Anziehungen aufgehoben werden. Diese an Dichte und Beweglichkeit abweichende Grenzschicht pflegt man gewöhnlich als oberflächliche Haut oder oberflächliche Spannung zu bezeichnen, Ausdrücke, welche aber zu vielen falschen Deutungen und naturwidrigen Vorstellungen geführt haben.

Freilich ist der direkte Nachweis für das Dasein

jener abweichenden Grenzschrift durch die Beobachtung noch nicht gegeben worden. Doch darf man ihn später sicher von dem Umstande erwarten, dass das Volumen eines bestimmten Flüssigkeitsgewichtes bei sehr grosser Grenzfläche, wegen Ueberführung einer grösseren Menge Flüssigkeit in den Grenzstand, ein etwas an der es sein muss als bei kleineren. Besteht der Grenzstand in einer Verdünnung, wie man es an der freien Begrenzung anzunehmen berechtigt ist, so muss eine Vergrösserung des Volumens, besteht er in einer Verdichtung, wie an der Grenzfläche gegen eine benetzte Wand, so muss eine Verkleinerung des Volumens eintreten. Bis jetzt indess erreichten die Volumenbestimmungen die zur Prüfung dieser Frage erforderliche Genauigkeit nicht. Dagegen hat Wilhelmy*) (1864) eine Reihe auf Wägung beruhender Versuche ausgeführt, deren Resultate sich nicht anders als durch Annahme einer an Dichte veränderten Grenzschrift erklären lassen.

Er wog nämlich einen genau cylindrischen Körper von bekanntem Durchmesser, indem er denselben auf verschiedenen gemessenen Tiefen eintauchen liess. Das Gewicht in der Flüssigkeit erschien immer grösser als es nach Abzug der verdrängten (homogen gedachten) Flüssigkeit, unter Berücksichtigung der constanten Capillarität sein sollte und diess Mehrgewicht erwies sich proportional der eingetauchten Oberfläche und abhängig von der Natur des Körpers und der Flüssigkeit, so wie in gewissem Grade von der Krümmung der Oberfläche. Wilhelmy gibt für Aethyl

*) Wilhelmy, Pogg. Ann. 1863. CXIX. 177—1864. CXXII. 1.

und Amylalcohol (Spec.-Gew. 0,793 bei 17°,5 und 0,815 bei 15°) folgende Verdichtungscoefficienten, das heisst Mehrgewichte in Milligr. auf 1 Qu. Mm. Fläche:

	Aethylalcohol	Amylalcohol
Silber	0,01512	0,01160 Mgr.
Glas	0,01259	0,01242 „
Aluminium	0,00716	0,00657 „
Zink	0,00709	0,00786 „
Platin	0,00641	0,00449 „
Kupfer	0,00467	0,00405 „

Merkwürdiger Weise ergab Glycerin, dessen Spec. Gewicht weit grösser 1,26355 ist, entgegengesetzte Resultate, das Gewicht des eintauchenden Körpers erschien vermindert statt vergrössert, woraus folgen würde, dass die Grenzschicht weniger dicht und nicht dichter sei, mit andern Worten, dass die Wirkung der festen Wand auf die Flüssigkeit kleiner sei als die Wirkung der Letztern auf sich selbst, was übrigens von einer stärkern Anziehung der leichtern Wassertheilchen herrühren könnte.

Diese wenig beachteten Versuche haben eine grosse Wichtigkeit, weil sie eine bisher unbekante Quelle der Unsicherheit bei allen Bestimmungen des Spec. Gewichtes durch hydrostatische Wägung aufdecken. Sie sind auch darum merkwürdig, weil sie ungeheure Kräfte voraussetzen, wenn man an die geringe Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeit, beim Alcohol nach Grassi*) nur 0,0000904 für 1 Atm. Druck, so wie an die Kleinheit des Bereiches der

*) Grassi, Annal. d. Ch. et Phys. Sér. 3. XXXI. 437.

Molecularkräfte denkt. Darum verdienen diese Versuche im höchsten Grade wiederholt und vervielfältigt zu werden.

Wie dem auch sei, es kann, auch nach andern mehr indirekten Gründen, als erwiesen betrachtet werden, dass jede Flüssigkeit an ihrer Begrenzung von einer dünnen Schicht an Dichtigkeit abweichender und in der Dicke variabler Schicht überzogen ist, auf welche eine jede naturgemässe Theorie der Capillarerscheinungen Rücksicht zu nehmen hat. Daraus, dass man die einfachen Grundgesetze der Capillarität unter Annahme einer bis zur Grenze homogenen Flüssigkeit mathematisch abzuleiten vermag, hat man in neuester Zeit noch ein Argument gegen die von Poisson*) auf das Dasein einer veränderten Grenzschicht aufgebaute Capillarthorie zu finden geglaubt. Das Dasein dieser abweichenden Schicht ist aber keine Hypothese, sondern eine feste Thatsache; daher beweist die Möglichkeit jener doppelten Erklärung, mit oder ohne Annahme der gedachten Schicht, mehr nicht, als dass beide Theorien für ihre Glieder erster Annäherung, welche bisher allein der Beobachtung anheim fallen, auf die nämliche Form führen, wobei nichts destoweniger die Constanten eine andere theoretische Bedeutung haben können.

Die 3 Hauptgesetze, auf welche die Physiker die Erklärung der einzelnen Erscheinungen und selbst die numerische Berechnung derselben gründen, sind die folgenden:

*) Poisson, *Nouv. Théorie d. l'action capill.* Paris 1831. *Stahl, Pogg. Ann.* CXXXIX. 239.

1. *Das Gesetz des Cohäsionsdruckes.*

Bezeichnen ϱ_1 und ϱ_2 den grössten und kleinsten Krümmungsradius, y die Erhebung der Oberfläche über das äussere horizontale Niveau, s das spec. Gewicht der Flüssigkeit, so hat man

$$y \cdot s = - \gamma \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right)$$

γ ist die Cohäsionsconstante, einzig abhängig von der Natur der Flüssigkeit. Wenn man die Radien nach Aussen +, nach Innen — nimmt, so muss, da für eine hohle Oberfläche, der Beobachtung nach, die Flüssigkeit steigt oder y + ist, γ eine negative Grösse sein.

2. *Das Gesetz des Randwinkels.*

Wo die Flüssigkeitsoberfläche die Wandfläche erreicht, bildet sie einen Randwinkel φ , der sowohl von der Natur der Flüssigkeit als der des festen Körpers abhängt. Bezeichnet α eine von beiden Körpern abhängige Adhäsionsconstante, so hat man

$$\alpha = - \gamma \cos \varphi.$$

Der Randwinkel φ ist für einen bestimmten Körper mit bestimmter Flüssigkeit constant. Da γ negativ, muss bei netzender Flüssigkeit, wo der Erfahrung nach φ spitz, α +; bei nicht netzender wo φ stumpf, α — sein. α und γ sind aber Grössen gleicher Art und es muss immer $\gamma > \alpha$, soll die Erscheinung überhaupt möglich sein.

3. *Das Gesetz der gehobenen Flüssigkeitsmenge.*

Sei u der Umfang der Flüssigkeitsoberfläche an einer verticalen Wand; das über das Niveau gehö-

bene Flüssigkeitsgewicht p wird sein

$$p = \alpha \cdot u = - \gamma u \cos \varphi.$$

Die Theorie stellt sich nun die Aufgabe, diese Grundgesetze aus der Natur der sämtlichen Kräfte, die auf die Theilchen der Flüssigkeit wirken, mathematisch abzuleiten, wodurch natürlich auch die Constanten γ und α ihre bestimmte Definition erhalten werden. Hierbei sind im Allgemeinen zwei Wege eingeschlagen worden. Der zuerst von Laplace*) (1806) und dann von Poisson**) (1831) befolgte bildet, der Form nach die Ausdrücke der auf jeden Punkt der Oberfläche wirkenden Kräfte und stellt die Bedingung für das hydrostatische Gleichgewicht dieser Kräfte auf. Der andere Weg, zuerst von Gauss†) (1830), und neuerdings von Beer††) (1869) eingeschlagen, leitet die Bedingung des Oberflächengleichgewichtes aus dem bekannten Satz der virtuellen Bewegungen ab. Beide Wege haben bisher nicht anders als mit einem bedeutenden Aufwande mathematischer Entwicklungen zum Ziele geführt. Es scheint mir aber möglich, unbeschadet der wissenschaftlichen Richtigkeit, auf sehr einfache Weise dahin zu gelangen, indem man von vornherein den beiden Constanten die angemessene mechanisch-physicalische Bedeutung gibt.

Wenn eine gegebene Flüssigkeitsmenge durch

*) Laplace, Suppl. au Livr. X. de la Mec. céleste. Paris 1806.

**) Poisson, Nouv. Théorie d. l'act. capill. Paris 1831.

†) Gauss, Princip. gen. theor. fig. fluid. in statu aequ. Goettingen 1830.

††) O. Beer, Einleitung zur math. Theorie der Elast. und Capill. Leipzig 1869.

blasse Aenderung der Gestalt ihre Oberfläche vergrössert, so wandelt sich ein Quantum homogener Flüssigkeit um zu oberflächlicher Schicht mit veränderter und in der Dicke variabler Dichte. Da hierbei innere Theile, die ringsherum den Kräften anderer ausgesetzt waren, diesen Verband theilweise lösen und nur einseitig noch mit der Flüssigkeit in Verbindung stehen, da ferner die Dichte sich in der ganzen Oberflächenschicht und zwar im Sinne einer Auflockerung vermindert hat — so hat diese Umwandlung eine grosse mechanische Arbeit der Molecularkräfte zur Folge gehabt und zwar, da die Theilchen auseinandergegangen sind, eine grosse negative Arbeit. Diese für jede Flüssigkeit eigenthümliche auf Bildung der Flächeneinheit Oberflächenschicht fallende Moleculararbeit wird durch die Cohäsionsconstante γ dargestellt. Wenn die freie Oberfläche, wie anzunehmen ist, stets einer Auflockerung entspricht, muss α immer eine — Grösse sein, wie die obigen Gesetze es verlangen.

Ganz analog bezeichnet die Adhäsionsconstante α die Moleculararbeit, welche zur Bildung der Einheit Wandschicht aus homogener Flüssigkeit aufgewendet wird, wobei nothwendig auch die von der Wand ausgehenden Kräfte mit in Betracht fallen. Je nachdem die Flüssigkeit an der Wand verdichtet oder verdünnt wird, mit stärker oder schwächer wirkenden Theilchen in Beziehung kommt als die eigenen waren, wird der Constanten α das + oder — Zeichen zukommen, was wie gesagt die Bildung eines spitzen oder stumpfen Randwinkels

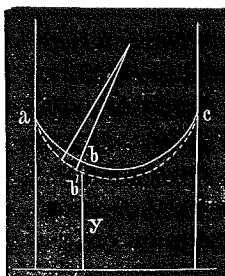
bestimmt. Man sieht wie diese Definitionen sich genau den Anforderungen der empirischen Gesetze anschmiegen.

Um die Ableitung der Gesetze selbst zu geben, halte ich mich an den Satz der virtuellen Bewegungen, der wie bekannt folgendermassen lautet: Wenn ein System materieller Punkte unter der Wirkung von Kräften im Gleichwichte steht, und man giebt den Punkten eine von ihrem Zusammenhang gestattete kleine Verschiebung, so ist die Summe aller Produkte der Kräfte mit der Projection der kleinen Verschiebung ihrer Angriffspunkte gleich 0, insofern man die Projectionen $+$ oder $-$ nimmt, je nachdem sie im Sinne der Kraftwirkung oder ihr entgegen ausfallen. Ein solches Produkt ist aber nichts anders als eine virtuelle mechanische Arbeit, so dass der Satz auch heisst: wenn ein System von Punkten im Gleichwicht steht, so heben sich bei einer beliebigen kleinen möglichen Verschiebung alle geleisteten und erlittenen Arbeiten auf. Der Satz hat so eine physische Realität. In der Wirklichkeit gelangt jedes System materieller Theile nur aus benachbarten Durchgangslagen in die Lage des stabilen Gleichwichtes, das einzige, das wirklich vorkommt, und nur wenn die Arbeiten bei der letzten Ueberführung sich aufheben, kann das System die Ruhe finden, was von jeder möglichen Nachbarsstellung aus der Fall sein soll. Dieser Satz übrigens ist absolut richtig, wenn man nur die sämtlichen Kräfte, also auch die Molecularkräfte, gehörig in Rechnung zieht.

Wenden wir den Satz auf die Gleichgewichts-

oberfläche einer in einer verticalen Röhre capillar gehobenen Flüssigkeit und denken uns drei Fälle der Verschiebung, der erste ohne Aenderung der Grenzlinie, in einer kleinen Senkung der krummen Fläche bestehend, der zweite eine Senkung der Fläche und der Grenzlinie, der dritte eine Senkung der Grenzlinie ohne Aenderung der Krümmung.

1. Senkung ohne Aenderung der Grenzlinie.



Die Oberfläche gehe aus abc über in $ab'c$. Die Gesamtarbeit, welche mit dieser Veränderung in Beziehung steht, setzt sich zusammen aus einer Arbeit der Schwere, ein Sinken der ganzen gehobenen Flüssigkeit, und aus derjenigen der Molecularkräfte. Die Schwerenarbeit ist eine $+$ und reduziert sich,

wie leicht zu erkennen, auf diejenige die geleistet wird, wenn die Zwischenschicht $abcb'$ auf das horizontale unbegrenzte Niveau herabsinkt. Seien δo und δn das Element der Oberfläche und der normalen kleinen Verschiebung, S das Spec. Gewicht der homogenen Flüssigkeit, so wird die an diesem Theilchen oder besser in der entsprechenden Flüssigkeitssäule geleistete Schwerenarbeit $s y \delta o \delta n$ sein. Die ganze Schwerenarbeit wird sein

$$s \cdot S [y \delta o \delta n]$$

wo die Summe auf alle δo und zugehörigen δn auszudehnen ist.

Was die Moleculararbeit betrifft, so verschwindet sie für den ganzen homogenbleibenden Theil der Flüssigkeit, denn so viele Theile sich von einander entfernen, so viele nähern sich wieder, so dass die einen und andern Arbeiten sich nothwendig aufheben. So bleiben einzig die Moleculararbeiten an der Oberfläche in Betracht zu ziehen. Man denke sich das Flächenelement δo von zwei rechtwinklichten Bogenelementen begrenzt, die mit dem grössten und kleinsten Krümmungsradius ϱ_1 und ϱ_2 gezogen sind, so wird bei Verschiebung von δo normal um δn , das Flächenelement, wie leicht zu finden, bei erster Annäherung sich vergrössern um

$$\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) \delta o \cdot \delta n.$$

Ist zur Bildung der oberflächlichen Flächeneinheit die Arbeit γ erforderlich, so erhält man die für jene Flächenzunahme nothwendige durch Multiplication mit γ . Die ganze Fläche verlangt demnach

$$\gamma S \left[\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) \delta o \cdot \delta n \right]$$

wobei γ , wie gesagt — ist.

Der Satz der virtuellen Arbeiten führt also, da die Summation die nämlichen Grössen betrifft, auf

$$S \left[s \cdot y + \gamma \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) \right] \delta o \cdot \delta n = 0.$$

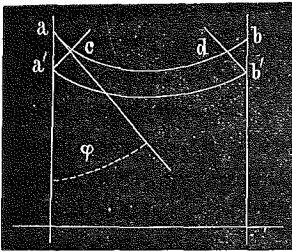
Dieser Gleichung kann, da δo , δn beliebige Grössen sind, nur dadurch entsprochen werden, dass an jeder Stelle der freien Oberfläche

$$s \cdot y = -\gamma \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)$$

was das Gesetz des Cohaesionsdruckes ist, aus welchem durch Einführen der Differenzialaus-

drücke für die Krümmungsradien, die Gestalt der Oberfläche abgeleitet wird.

2. Senkung mit Aenderung der Grenzlinie.



Die Oberfläche ab sinke nach $a'b'$. Für den ganzen Theil $a'cd b'$, durch die Normalen $a'c$ und $b'd$ begrenzt, hat man die gleichen Ausdrücke der Arbeit wie im vorigen Fall; es bleiben nur noch die Arbeiten zu berücksichtigen, welche sich

auf die Randtheile, deren Querschnitt $a a' c$ ist, beziehen.

Die Schwerenarbeit reduziert sich auf das Herabsinken der Theilchen $ac a'$ auf das untere Niveau. Bezeichnen $\delta y'$ die Senkung aa' , φ den Randwinkel $a'ac$, so dass $ac = \delta y' \cos \varphi$, $a'c = \delta y' \sin \varphi$, endlich δu das Element der Umfangslinie, so beträgt jene Arbeit

$$\frac{1}{2} s \cdot y' \sin \varphi \cos \varphi \delta y' \delta u.$$

Die Moleculararbeit entspricht der Aufhebung der Oberflächenschicht ac und der Wandschicht aa' . Diese beiden Arbeiten sind

$$- \gamma \cos \varphi \delta y' \delta u \text{ und } - \alpha \delta y' \delta u.$$

Die Schwerenarbeit ist neben diesen Moleculararbeiten von höherer Ordnung und kann in erster Annäherung vernachlässigt werden. Damit bleibt die Bedingung

$$S [- \gamma \cos \varphi - \alpha] \delta y' \delta u = 0$$

welche, da $\delta y'$, δu willkürlich sind, fordert, dass

$$\alpha = -\gamma \cos \varphi$$

das zweite Gesetz des Randwinkels.

3. Parallele Senkung der krummen Oberfläche.

Sinkt $a b$ parallel um $\delta y'$ nach $a' b'$, so erfolgt keine Oberflächenarbeit, da die Fläche die gleiche geblieben ist, und die ganze Schwerenarbeit muss einfach der Moleculararbeit aus Entblössung der Wandschicht $a a'$ gleich sein.

Nennt man $\delta o'$ die Projection des Oberflächenelementes δo auf die horizontale Ebene, so ist $s \delta y' \delta o'$ das Gewicht des Elementes der Zwischenschicht $a b a' b'$, also

$$s y \delta y' \delta o'$$

die Schwerenarbeit desselben.

Die Moleculararbeit dagegen ist, wie leicht zu erkennen

$$-\alpha \delta y' \delta u.$$

Man erhält also

$$S [s y \delta o' - \alpha \delta u] \delta y' = 0$$

auf alle Oberflächen und alle Umfangstheile ausgedehnt. Da $\delta y'$ willkürlich bleibt, muss

$$s \cdot S (y \delta o') - \alpha S (\delta u) = 0$$

oder da die erste Grösse das Gewicht p der ganzen gehobenen Flüssigkeit darstellt, die zweite αu ist, wo u die ganze Umfangslinie bezeichnet

$$p = \alpha u$$

das dritte Gesetz für die gehobene Flüssigkeit.

Diese drei Fälle mögen genügen um darzuthun, mit welcher Leichtigkeit die gegebenen Definitionen der beiden Cohäsions- und Adhäsionscon-

stanten zur Erklärung der Capillargesetze führen, ohne dass man irgend wie auf die Natur der Molecularkräfte selbst einzugehen braucht. Man mag die Sache ansehen wie man will, die Bildung oder Aufhebung einer veränderten Oberfläche oder Wandschicht muss nothwendig mit mechanischen Moleculararbeiten verbunden sein, und diese sind es, welche bei dieser Erklärung naturgemäss zur Geltung gebracht werden, während dieser Zusammenhang bei den bisherigen Auffassungen weniger klar hervortritt.

Uebrigens erkennt man auch bei dieser Behandlung, dass die gewonnenen einfachen Resultate nur erste Annäherungen sind. Bei Ableitung des Gesetzes über den Cohäsionsdruck z. B. werden auch die Krümmungsradien ρ_1 und ρ_2 kleine Aenderungen erleiden, und in Folge dessen die Aenderung des Flächenelementes δo nur in erster Annäherung dem angegebenen Werthe entsprechen. Ebenso wurde bei Ableitung des Gesetzes für den Randwinkel, wie schon gesagt, die Schwerenarbeit der Randtheile vernachlässigt. Ferner wird die veränderte Grenzschicht, so dünn man sie auch annehmen mag, je nach der Krümmung eine kleine Modification in ihrer Beschaffenheit erleiden und daher nicht streng constant sein, wie hier vorausgesetzt wurde. Endlich wurde der abweichende Zustand des Winkelraumes, wo Oberflächen und Wandschicht zusammenfallen, nicht anders als wie eine Ueberlagerung der unveränderten Grenzschichten in Rechnung gebracht, was gleichfalls nur in erster Annäherung richtig sein mag.