Ueber die Schwingungen der Luftplatten.

Von

August Kundt.

Die Schwingungsgesetze sind für den Fall, dass die schwingende Substanz vornehmlich nach einer Richtung ausgedehnt ist, seit längerer Zeit untersucht und mit einiger Vollkommenheit bekannt, mag die schwingende Substanz eigene Elastizität besitzen (feste Stäbe), mag ihr dieselbe durch Spannung ertheilt sein (Saiten), oder mag sie tropfbar oder elastisch flüssig sein (zylindrische Flüssigkeits- und Luftsäulen). Ist der schwingende Körper vornehmlich nach zwei Dimensionen ausgedehnt, bildet derselbe also eine Fläche, so sind die Schwingungsformen und Gesetze nur untersucht, wenn diese Fläche eine feste Platte oder eine gespannte Membran ist. In beiden Fällen können wir von der grossen Mannigfaltigkeit der möglichen Schwingungsformen nach Chladni's Entdeckung durch aufgestreuten Sand eine Anschauung gewinnen. Es ist von vornherein klar, dass ebenso wie feste Platten und Membranen auch Platten oder Scheiben von tropfbaren oder elastisch flüssigen Substanzen eine Reihe von Schwingungsformen müssen annehmen können. So scheinbar nahe aber der Schritt von den Chladnischen Klangscheiben zu den Luft- oder Flüssigkeitsklangscheiben liegen mag, ist derselbe bisher nicht gethan, weil man einerseits kein Mittel besass, die verschiedenen Schwingungsformen bei Luft und

Flüssigkeiten hervorzurufen, andererseits keines, dieselben dem Auge sichtbar zu machen.

Im Folgenden wird gezeigt, wie bei Platten von elastisch-flüssiger Substanz, also bei „Luftplatten" oder „Luftklangscheiben" die verschiedenen Schwingungsformen mit Leichtigkeit hervorgerufen und dem Auge durch Pulver sichtbar gemacht werden können. Bei tropfbaren Flüssigkeiten sind meine Versuche bisher stets misslungen.

Die „Luftplatten" bieten dem Experiment wie der Theorie das gleiche weite Feld, wie die Chladnischen Klangscheiben und die Membranen. Es ist mir daher bisher nicht möglich gewesen, auch nur einigermassen den Gegenstand zu umfassen oder zu erschöpfen. — Ich beschränke mich daher darauf, ausser der Methode, wie die Schwingungsformen der Luftplatten hervorgerufen werden, eine allgemeine Charakteristik derselben und der zugehörigen Luftklangfiguren zu geben, und schliesslich mit kurzen Worten auf die Theorie der Schwingungen, die in mancher Hinsicht keine zu grossen Schwierigkeiten zu bieten scheint, hinzuweisen.

1. Die Begrenzungen der Luftplatten.

Eine Luftplatte soll im Allgemeinen ein Luftvolumen genannt werden, welches zwischen zwei gleich grossen, festen, einander parallelen Scheiben sich befindet, deren Abstand von einander gegen ihre Ausdehnung klein ist. Der Abstand der festen begrenzenden Platten von einander, d. i. die Dicke der Luftplatte, betrug bei den folgenden Versuchen zwischen 3 und 20$^{\text{mm}}$. Ebenso wie eine in einem Rohr eingeschlossene Luftsäule entweder mit offenen oder mit gedeckten Enden schwingen kann, kann eine Luftplatte entweder mit offenem Rande oder mit geschlossenem Rande schwingen. Im ersten Fall ist die Luft der Luftplatte mit der äusseren Luft in Verbindung, im zweiten ist sie von derselben ganz abgeschlossen.

Eine Luftplatte mit offenem Rande erhält man am einfachsten, indem man auf die äussersten Ecken einer horizontal gelegten festen Scheibe, am besten einer dicken Spiegelglasscheibe, 3 oder 4 Stückchen Kork von der Höhe, die man der Dicke der Luftplatte geben will, befestigt und auf diese Korkstückchen die zweite gleich grosse feste Scheibe legt. — Für genauere Versuche ist es nöthig, die untere Glasscheibe auf ein Stativ mit einem kleineren Tischchen zu bringen, damit der Rand der Luftplatte nach oben und unten gleich offen ist. Legt man die untere Glasscheibe direkt auf einen grösseren Tisch, so bildet dieser die Fortsetzung der Glasscheibe und der Rand der Luftplatte ist nach unten nicht völlig frei und offen. — Wenn es sich nicht um genaue Untersuchung der Schwingungsformen handelt, ist die Modifikation, die der offene Rand durch die Tischplatte erleidet, natürlich ohne Bedeutung.

Für eine Luftplatte mit geschlossenem Rande bedarf es eines festen Rahmens von der betreffenden Form, der zwischen die beiden Glasscheiben gelegt wird. Die Ränder des Rahmens müssen da, wo sie die Glasplatten berühren, zum luftdichten Verschluss mit Leder oder Tuch überzogen sein. Solcher Rahmen kann man leicht eine Anzahl aus Holz oder dicker Pappe von verschiedenen Formen und Dicken anfertigen lassen, die dann beliebig zwischen zwei grössere Glasplatten gelegt werden. Um einen völlig sicheren Verschluss der Luftplatte an den Rändern zu erhalten, ist es für genauere Versuche gut, die beiden Glasscheiben auf irgend eine Weise auf den Rand aufzupressen; wie dies in einfacher Weise geschehen kann, ist weiter unten beschrieben.

2. Die Erregung der Schwingungen der Luftplatten.

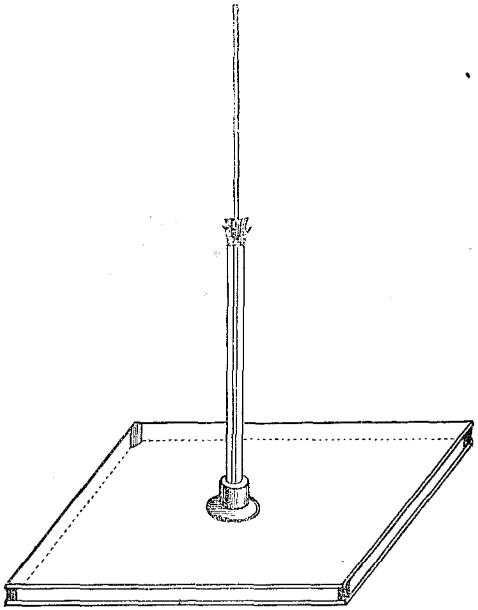
Es ist mir bisher nicht gelungen, eine Luftplatte auf irgend eine Art anzublasen, wie wir die cylindrischen Luftsäulen anblasen, ich zweifle indess nicht, dass es später gelingen wird, ein geeignetes Luftplattenmundstück zu konstruiren. — Zur Zeit muss man sich begnügen, die verschiedenen Schwingungen einer Luftplatte durch Mitschwingen auf andere Töne zu erregen. Auch die Schwingungen der Membranen rufen wir ja durch Mitschwingen auf Stimmgabel- oder Orgelpfeifentöne hervor.

Als erregende Töne für Luftplatten bieten sich am geeignetsten die Longitudinaltöne geriebener Stäbe oder Röhren. Ich habe früher[1]) gezeigt, wie durch den Longitudinalton einer geriebenen Glasröhre eine cylindrische Luftsäule in energische Schwingungen versetzt werden kann. Die gleiche Methode ist für die Luftplatten anwendbar. Die obere Glasscheibe, welche die Luftplatte begrenzt, muss zu dem Ende mit einem etwa 10 bis 20^{mm} weiten runden Loch versehen sein. Gerade über dies Loch wird das Ende einer ebenso wie früher mit einem Kork versehenen

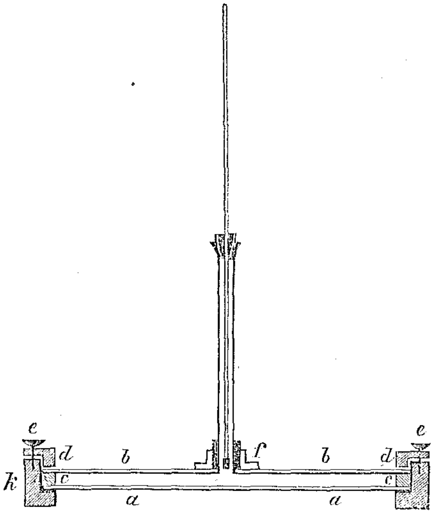
[1]) Pogg. Ann. Bd. CXXVII, pag. 497—523.

vertikal gehaltenen Glasröhre gebracht. Wird die letztere in der Mitte gehalten, auf ihren tiefsten Ton angerieben, und entspricht dieser Ton einem der Töne der Luftplatte, so geräth diese in lebhafte Mitschwingung. Man erkennt dies daraus, dass leichtes Pulver, welches in die Luftplatte gestreut ist, stark bewegt wird. Um die longitudinal tönende Röhre bequem über dem Loch zu halten, kann man dieselbe entweder in ein Stativ klemmen, oder man verfährt, und das ist das einfachste, folgendermassen.

Auf die obere Glasplatte ist, wie Fig. 1 (eine



quadratische offene Luftplatte) zeigt, ein die Oeffnung, die sich in der Mitte der Scheibe befindet, umschliessende Messingfassung gekittet von etwa 20—30^{mm} Höhe und 20—40^{mm} Weite. In den emporstehenden runden Messingcylinder kann mit einem Kork ein Glasrohr, welches etwa die Weite des Loches hat, vertikal eingesetzt werden. In dies Glasrohr wird die longitudinal tönende Röhre mit einem in ihrer Mitte befindlichen Kork eingesetzt, wie bei den frühern Apparaten für tönende Luftsäulen.[1] In Fig. 2 ist die



Anordnung noch im Querschnitt für eine Luftplatte mit geschlossenem Rand gezeichnet. Die Glasplatte *a* ist in einem viereckigen Kasten ohne Boden eingelegt, auf dieselbe ist der die Luftplatte umschliessende Rahmen *cc* gelegt und auf diesen die zweite Glasscheibe *b*. Diese wird durch einen viereckigen

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. CXXVII, Taf. V, Fig. 6.

Rahmen *dd* mittelst vier Schrauben *ee*, die in den äusseren Kasten gehen, fest auf die obere Glasscheibe gepresst, so dass die Luftplatte an den Ränsern fest zusammengehalten wird. Die Befestigung des tönenden Rohres auf der obern Glastafel ist aus der Figur ohne Weiteres ersichtlich.

Statt des Rahmens *cc* kann auch jeder beliebige kleinere Rahmen zwischen die Glasscheiben gebracht werden, sodass bei hinreichend kleinen Rahmen der Erregungspunkt *f* nicht immer in die Mitte, sondern an jede Stelle der Luftplatte gebracht werden kann. Ich bemerke nur noch, dass sowohl eine offene wie geschlossene Luftplatte nicht nur durch ein Loch in der obern Glasscheibe, sondern auch von irgend einer Stelle des offenen oder geschlossenen Randes, also von der Seite her erregt werden kann.

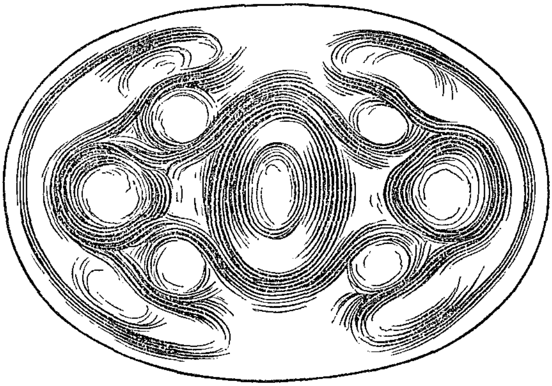
Damit eine Luftplatte nun zu einem ihrer Eigentöne erregt werde, ist es nöthig, dass der Ton der geriebenen Glasröhre möglichst genau mit dem betreffenden Ton derselben stimme. Es wäre daher nöthig, die longitudinal tönende Röhre beliebig zu verstimmen. Wenn es nun auch möglich ist, wenigstens in gewissen Grenzen mittelst verschiebbarer metallener Ansatzstücke den Ton zu ändern, so habe ich es doch am Bequemsten gefunden, eine Glasröhre so lange durch Abbrechen ganz kleiner Stückchen zu verkürzen, bis der Ton derselben mit einem der Töne der Luftplatte übereinstimmt. Man verschafft sich auf diese Weise leicht eine Zahl von Röhren für die verschiedenen Töne derselben Luftplatte. Ob der erregende und der zu erregende Ton der Luftplatte genügend mit einander stimmen, wird dadurch erkannt, ob Pulver, welches in die letztere gestreut ist, eine deutliche regelmässige Klangfigur bildet. Als Pulver, welches recht gleichmässig auf die untere Glasscheibe zu sieben ist, wendet man entweder Lycopodium, feine Kieselsäure oder Korkfeilicht an. Lycopodium gibt die Figuren oft nicht deutlich, Kieselsäure gibt nur gute Figuren, wenn sie sehr trocken ist, mit feinem Korkfeilicht entstehen die Figuren ganz sicher. — Jede Klangfigur muss schon nach kurzem Reiben der longitudinal tönenden Röhre auftreten, muss scharf und regelmässig sein, und darf ihre Form bei weiterem Tönen nicht merklich ändern. Ist sie entschieden unsymmetrisch und ändert sie bei längerem Tönen ihre Form, so darf man annehmen, dass der Ton der geriebenen Röhre nicht genügend mit einem Ton der Platte stimmt. Diese letztere gibt dann nicht einen Eigenton, d. h. Ton stärkster Resonanz, sondern dieselbe wird nur durch einen starken Zwang zu einer ihr fremden Bewegung gebracht. Wenn man aber auch einmal den Longitudinalton einer Röhre in Uebereinstimmung mit einem Eigenton der Luftplatte gebracht hat, so tritt dieser und damit die zugehörige Klangfigur nur auf, wenn der stossende Kork am Ende der Röhre sich in der geeigneten Lage zu dem Loch in der obern Glasscheibe befindet. Je nach dem Ton und der erregenden Röhre muss das mit dem Kork verschlossene Ende der Röhre bald in dem Loch, bald dicht, bald in grösserer Entfernung über demselben sich befinden. Man ermittelt die richtige Stellung leicht, indem man das tönende Rohr in dem Kork, durch den dasselbe in dem weiteren Rohr befestigt ist, etwas auf- und niederschiebt.

Endlich will ich noch die Bemerkung hinzufügen, dass, um die entstehenden Klangfiguren sofort deutlich zu erkennen, es vortheilhaft ist, den Grund, auf dem sie gesehen werden, schwarz zu wählen. Ich überziehe daher die untere Glasscheibe der Luftplatte auf ihrer unteren Seite mit schwarzem Firniss, oder lege unter dieselbe eine mit schwarzem Papier überzogene Pappe.

3. Allgemeine Charakteristik der Schwingungsformen und Klangfiguren der Luftplatten.

Es sind von mir bisher nur einigermassen die Schwingungen der kreisrunden, elliptischen und quadratischen Luftplatten untersucht. Um eine Vorstellung von den übrigens in grosser Zahl erhaltenen Klangfiguren zu geben, sind in den Figuren 3 bis 7 eine Figur einer elliptischen und vier Klangfiguren einer quadratischen Scheibe gezeichnet. An den Stellen, die in den Figuren weiss geblieben, blieb beim

Fig. 3.



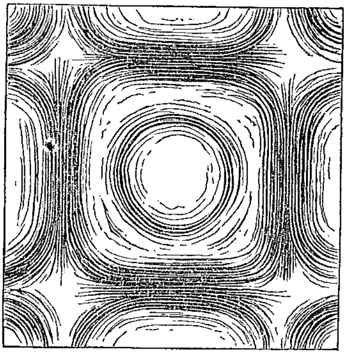


Fig. 4.

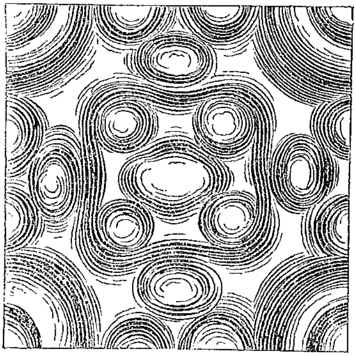


Fig. 5.

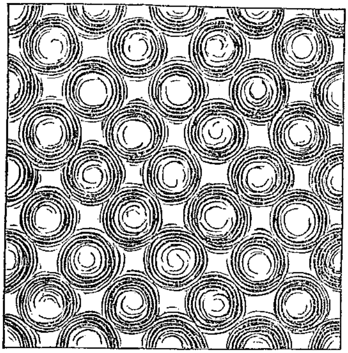


Fig. 6.

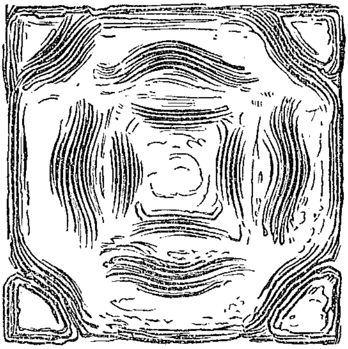


Fig. 7.

Tönen der Staub ruhen, an den andern Stellen bildete er die in den Figuren gezeichneten Rippungen. Alle vier Schwingungen sind in der Mitte erregt und Fig. 3 bis 6 gehören Luftplatten mit geschlossenem Rande zu, Fig. 7 einer Luftplatte mit offenem Rande. Bevor wir auf eine nähere Betrachtung der Figuren eingehen, ist es aber nöthig, ein allgemeines Resultat der Untersuchung anzuführen. So weit die Versuche reichen, hat sich ergeben, was übrigens zu erwarten war, dass die Töne einer Luftplatte unabhängig sind von der Dicke derselben. Eine Luftplatte von gleicher Grösse sprach bei einer Dicke zwischen 3 und 20^{mm} auf die gleichen longitudinal tönenden Röhren an und gab für die verschiedenen Dicken die gleichen Klangfiguren.

Was nun die Rippungen anlangt, die in den letzteren gezeichnet sind, so habe ich schon früher angeführt und gezeigt, dass dieselben in einer tönenden Luftmasse immer da auftreten, wo eine hin- und hergehende Bewegung der Luft vorhanden ist, also wo, wie wir sagen, ein Bauch sich befindet, und dass die Richtung dieser Rippen immer senkrecht ist zu der Bewegung der Luft. An den Knotenstellen einer schwingenden Luftsäule, an denen keine Bewegung, wohl aber Dichtigkeitsänderungen stattfinden, fehlen dagegen die Rippen stets. In unsern Klangfiguren zeigen uns also die Rippungen erstens die Stellen an, an denen Bewegung der Luft überhaupt statt hat, dann geben sie uns aber durch ihre Richtung auch noch die Richtung dieser Bewegung zu erkennen.

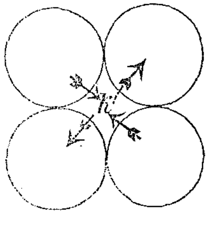
Die entstandenen Rippungen oder Schichtungen geben uns mithin ein ziemlich klares Bild von der Bewegung der Luft in den tönenden Luftplatten. Von den Stellen, an denen der Staub liegen bleibt, wissen wir zunächst nur, dass dort keine Bewegung stattfindet, es können dort aber sehr wohl und werden im Allgemeinen nach unserer Kenntniss der schwingenden Luftsäulen Dichtigkeitsänderungen vorhanden sein. In den tönenden cylindrischen Luftsäulen sind die Stellen, an denen keine Bewegung vorhanden ist, die Knotenpunkte, stets Stellen des wechselnden

Druckes oder der wechselnden Dichtigkeit. Eine einfache Betrachtung lehrt, dass dies für unsere Luftplatten nicht mehr allgemein gültig sein kann. Es lassen sich vielmehr die Stellen, an denen keine Bewegung stattfindet, an denen also in den Klangfiguren der Staub ruhen blieb, in zwei Klassen theilen. Bei der ersten Klasse von Ruhestellen, die wir Knoten erster Ordnung oder einfache Knoten nennen wollen, findet zwar keine Bewegung, wohl aber finden Dichtigkeitsänderungen statt, wie in den Knoten einer Orgelpfeife. Bei der zweiten Klasse von Ruhestellen ist keine Bewegung und zugleich keine Aenderung der Dichtigkeit der Luft vorhanden; wir wollen diese Ruhestellen Knoten zweiter Ordnung oder doppelte Knoten nennen. Um das Vorhandensein der beiden Arten von Knoten zu erkennen, genügt ein Blick auf die in Fig. 6 gezeichnete Klangfigur. In Fig. 6 ordnet sich das Pulver um einzelne Punkte in sehr regelmässigen konzentrischen Kreisen; in der Mitte dieser Kreise befindet sich eine Ruhestelle. Diese Ruhestelle muss nothwendig ein einfacher Knoten sein, denn die Bewegung der Luft geht von allen Seiten radial zu diesem Punkte hin oder von ihm fort. Es muss also nach einander in jedem Mittelpunkt der Rippungen Verdichtung oder Verdünnung herrschen. Da die Rippungen ganz kontinuirlich um den betrachteten Punkt gehen, kann nicht etwa ein Theil der Luft zu dem Mittelpunkt radial hinströmen, während gleichzeitig auf einer andern, z. B. der entgegengesetzten Seite ein Theil radial fortströmt, sodass also in dem Mittelpunkt trotzdem immer Atmosphärendruck bliebe; wäre ein gleichzeitiges Hin- und Wegströmen der

Luft vorhanden, so müssten nothwendig zwischen diesen beiden Luftmassen die konzentrischen Rippen irgendwo unterbrochen sein. Alle die von konzentrischen Rippen umgebenen Punkte in unserer Fig. 6 sind also einfache Knoten. Vier solcher einfacher Knoten mit ihren umgebenden Bäuchen schliessen aber zwischen sich noch eine Ruhestelle ein, die von vier Gruppen kreisbogenförmiger Rippen umschlossen ist. Diese Ruhestellen sind Knoten zweiter Ordnung oder Doppelknoten. Betrachtet man nämlich einen Zeitmoment, in dem in einem der vier umgebenden einfachen Knoten ein Maximum der Verdichtung herrscht, so muss in den beiden dem betrachteten Knoten benachbarten einfachen Knoten ein Maximum der Verdünnung sein. Es bedarf dies keiner weiteren Begründung; es ist ganz ohne weiteres klar, dass in zwei benachbarten einfachen Knoten, die durch einen einfachen Bauch getrennt sind, entgegengesetzte Phasen sein müssen. Es muss also in dem vierten einfachen Knoten, der um den fraglichen Doppelknoten herumliegt, wieder ein Maximum der Verdünnung sein.

Die beistehende Figur zeigt durch + und — die Dichte der Luft und durch die Pfeile die zugehörige Bewegung derselben an. Statt der grösseren Zahl von conzentrischen Rippungen ist um jeden der vier einfachen Knoten nur ein einziger Kreis gezeichnet.

Fig. 8.



Man erkennt nun sofort, dass in dem Punkt in der Mitte k'', der von den vier konvexen Kreisbogen eingeschlossen ist, eine Dichtigkeitsänderung nicht eintreten kann. Soviel Luft, als von zwei Seiten zu dem Punkt k'' bewegt wird, wird nach zwei andern Richtungen von demselben fortbewegt. Dasselbe gilt für den ganzen Verlauf der Schwingung. Also ist im Punkt k'' keine Bewegung und auch keine Dichtigkeitsänderung.

Es kam mir zunächst nur darauf an, das Vorhandensein dieser doppelten Knoten in ihrer einfachsten Form zu zeigen. Wenn auch nicht so klar und leicht wie in Fig. 6, kann man dieselben in fast allen Klangfiguren der Luftplatten auffinden. Dieselben sind meist schon deutlich dadurch charakterisirt, dass sie nicht von geschlossenen Rippungskurven umgeben sind, sondern von mehreren Parthien von Rippungen, die dem fraglichen Doppelknoten ihre konvexen Seiten zukehren. Es können übrigens auch Klangfiguren vorkommen, bei denen die Doppelknoten ganz fehlen, so bei einer kreisrunden Scheibe, wenn bei derselben nur konzentrische Rippen auftreten.

Was die Bezeichnung einfache und doppelte Knoten anlangt, so rechtfertigt sich dieselbe in Rücksicht auf analoge Erscheinungen bei den tönenden festen Platten und Membranen. Auf einer festen Klangscheibe oder Membran ist zwar die Bewegung in einer Knotenlinie Null, die Tangente des Winkels, den die Platte in jedem Moment mit ihrer ursprünglichen Gleichgewichtslage macht, ein Maximum. An einem Punkte aber, in dem sich auf der Membran zwei Knotenlinien schneiden, liegen die Krümmungsradien der Platte stets nach entgegengesetzten Richtungen und die Tangentialebene in dem Schnittpunkt der beiden Knotenlinien fällt stets zusammen mit der Ruhelage der Platte. Ein solcher Schnittpunkt, der zwei Knotenlinien angehört, wird geeignet ein doppelter Knotenpunkt genannt. -- Was bei den Membranen für die Neigung der Tangentialebene gilt, gilt bei den Luftplatten für die Dichtigkeitsänderungen. In einem Doppelknoten haben wir also gewissermassen zwei Bewegungszustände, die aber entgegengesetzte Phase haben.

Vergleichen wir aber im Allgemeinen die Klangfiguren der Luftplatten mit den Klangfiguren der Chladnischen Scheiben oder der Membranen, so tritt uns eine auffällige Verschiedenheit entgegen. Während auf festen Klangscheiben oder Membranen die Ruhestellen immer kontinuirliche Linien sind, die die Bewegungsstellen umschliessen, und während die Maxima der Bewegung meist einzelne isolirte Punkte in den umschlossenen Räumen sind, sehen wir bei den Klangfiguren der Luftplatten gerade das Gegentheil. Die Stellen der Ruhe, die einfachen, wie die doppelten Knoten, sind fast immer oder wenigstens sehr häufig einzelne isolirte Punkte, und zwischen ihnen ziehen sich die Rippungen, die Stellen der Maxima der Bewegung, in längeren Linien hindurch. Es ist dies ein charakteristischer Unterschied der Klangfiguren und Schwingungsformen fester Platten und derjenigen der Luftplatten.

Wie bereits angedeutet, sind meine Untersuchungen über die Luftplatten noch nach jeder Richtung unvollständig, und wenn ich auch schon eine grosse

Zahl von Klangfiguren gezeichnet habe, die dieser Mittheilung nicht wohl alle beigefügt werden konnten, die auch bereits manches Eigenthümliche erkennen lassen, so bleibt doch selbst für die einfachsten Fälle noch so viel zu thun, dass die Arbeit eines Einzelnen wohl überhaupt eine gründliche Erschöpfung des Gegenstandes nicht schnell liefern kann.

Hierin mag es seine Entschuldigung finden, dass ich diese ersten Anfänge in ihrer Unvollständigkeit veröffentliche. Vielleicht dürfte es sogar der Theorie eher als dem Experiment gelingen, unseres Gegenstandes Herr zu werden. — Werfen wir zum Schluss noch einen kurzen Blick auf die erstere.

Zur Theorie der Schwingungen der Luftplatten.

Die allgemeine Gleichung für die Schallbewegung der Luft $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)$ wird uns die Bewegung in einer unendlich dünnen Luftplatte geben, wenn wir $z = o$ setzen, also

$$(1) \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)$$

wo die Geschwindigkeiten eines Theilchens nach der x und y Achse sind: (2) $u = \frac{d\varphi}{dx}$, $v = \frac{d\varphi}{dy}$ und die Verdichtung (3) $s = -\frac{1}{a^2}\frac{dy}{dt}$.[1])

Nehmen wir an, dass die Dicke unserer Luftplatte wenigstens in gewissen Grenzen wirklich ohne jeden Einfluss auf die Schwingungsform ist, so ist für irgend eine bestimmte Luftplatte, wenn wir von den

[1]) Poisson, Mechanik. Bd. II.

Anfangsbedingungen absehen, die Gleichung (1) mit Berücksichtigung der betreffenden Grenzbedingungen zu integriren, und wir würden damit Schwingungsformen und Töne der Luftplatte erhalten.

Was nun die Grenzbedingungen anlangt, so wären als solche für eine Luftplatte mit geschlossenem Rande einzuführen, dass die Komponente der Geschwindigkeit nach der Normale der Randbegrenzung am Rande immerwährend Null sei. Für eine Platte mit offenem Rande kann man als erste und hinreichende Näherung nehmen, dass die Verdichtung am Rande konstant Null sei, also $s = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt} = 0$. Es wäre also am Rande φ von t unabhängig. Desshalb braucht φ indess nicht am Rande überhaupt Null zu sein, es kann dort sehr wohl eine Funktion von x und y sein. Ueber φ können wir, da dasselbe eine einfache physikalische Bedeutung nicht hat, direkt Nichts aussagen. Gesetzt aber, es sei für eine offene Luftplatte φ am Rande keine Funktion von x und y, sondern unabhängig von denselben und gleich 0, es sei wenigstens dieser Fall möglich, so ergibt sich eine sehr einfache Beziehung der Schwingungen einer Luftplatte mit offenem Rande zu einer Membran von gleicher Form.

Die Differentialgleichung für eine schwingende Membran ist[1])

$$\frac{d^2w}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2}\right)$$

mithin von der gleichen Form, wie die Differentialgleichung für eine Luftplatte. In der Gleichung be-

---

[1]) Cf. Lamé: Leçons sur l'élasticité des corps solides, pag. 115.

deutet w die Entfernung eines Theilchens aus seiner Gleichgewichtslage und c ist eine Konstante. — Die Grenzbedingung für die Membran ist $w = o$. Gilt also auch für unsere Luftplatte mit offenem Rande die Grenzbedingung $\varphi = o$, so sind, immer abgesehen von den Anfangsbedingungen, die Integrale der beiden Gleichungen genau identisch; an die Stelle des w, also der Entfernung eines Theilchens bei der Membran aus seiner Gleichgewichtslage, ist für die Luftplatte φ getreten. Da φ physikalisch in Bezug auf die Schwingung nicht direkt interpretirbar ist, so ist die Identität der Lösungen zunächst nur eine mathematische. An den Stellen, an denen bei der Membran bei einer bestimmten Schwingungsart $w = o$, ist bei unserer Luftplatte mit offenem Rande $\varphi = o$, wo auf der Membran $w =$ Maximum, ist in der Luftplatte $\varphi =$ Maximum.

Wenn nun aber φ in Bezug auf einen Punkt constant gleich o ist, so ist also hier φ von der Zeit unabhängig, d. h. $\frac{d\varphi}{dt} = o$, also ist auch $-\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt} = s = o$, also die Verdichtung gleich Null.

Wenn ferner φ für einen Punkt x und y ein Maximum, so ist $\frac{d\varphi}{dx} = o$, $\frac{d\varphi}{dy} = o$, also $\frac{d\varphi}{dx} = u = o$; $\frac{d\varphi}{dx} = \mathrm{v} = o$, mithin sind die Geschwindigkeiten des Theilchens gleich Null.

Es ergibt sich also das Resultat:

An den Punkten, an denen auf der Membran $w = o$, also an den Knoten, sind in unserer Luftplatte keine Verdichtungen, also keine einfachen Knoten, da $\frac{d\varphi}{dt} = o$. Es sind hier entweder Stellen der Bewegung, und zwar wie leicht zu zeigen, Maxima der Bewegung, oder die von uns früher sogenannten doppelten Knoten.

An den Vibrationsmaximis der Membran für die $w =$ Maximum, ist in unserer Luftplatte $u = o$

$$v = o,$$

also keine Bewegung, wir haben also hier Knotenpunkte.

Der Schwingungszustand der Luftplatte ist genau der entgegengesetzte von dem der Membran. Wo auf der Membran Ruhe, ist in der Luftplatte Bewegung und umgekehrt.

Wir sehen also hier theoretisch erklärt, worauf oben hingewiesen wurde, dass nämlich in der Luftplatte die Stellen der Ruhe meist einzelne Punkte, die Stellen der Maxima der Bewegung Linien sind im geraden Gegensatz zu den Klangfiguren der Membranen. Man sieht auch, wie sich wirklich die Schnittpunkte zweier Knotenlinien den doppelten Knoten unserer Luftplatte werden entsprechen müssen oder wenigstens entsprechen können.

Unsere Zusammenstellung der Schwingungen der Membranen und Luftplatten gilt aber nur für den Fall, dass der Rand der Luftplatte offen, und dass an diesem Rande überall $\varphi = o$.

Für einen geschlossenen Rand einer Luftplatte tritt eine Grenzbedingung ein, für die wir bei einer Membran keine analoge aufstellen können. Diese Luftplatten müssen also einer speziellen Behandlung unterzogen werden.

Aber auch für eine offene Luftplatte muss die Zulässigkeit der Grenzbedingung $\varphi = o$ noch nachgewiesen werden. Ohne auf allgemeine Betrachtungen einzugehen, können wir die Möglichkeit der Grenzbedingung für rechteckige Luftplatten leicht aufweisen, und wollen wir uns auf diesen Nachweis beschränken.

Der Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)$$

leistet jeder Ausdruck von der Form

$$\varphi = A \sin\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, at\right) . \sin \alpha x . \sin \beta y$$

Genüge.

Bilden wir

$$\frac{d\varphi}{dt} = A\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} . a . \sin \alpha x . \sin \beta y . \cos \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, at$$

so muss diess, wenn jenes Integral uns irgend welche Schwingung der Luftplatte darstellen soll, für den Rand einer offenen Platte Null sein. Haben wir eine rechteckige Platte, so muss also, wenn der Anfang der Coordinaten in einer Ecke des Rechtecks liegt,

$$\frac{d\varphi}{dt} = o \text{ für } x = o \text{ und } x = l$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = o \text{ für } y = o \quad y = l',$$

dem wird genügt, wenn $\alpha = \frac{n\pi}{l}$

$$\beta = \frac{n'\pi}{l'}$$

Werden diese Werthe in den Werth für φ eingeführt, so ist aber für $x = o \quad y = o$

$$x = l \quad y = l',$$

d. h. für den Rand, φ selbst gleich Null. Mithin ist für eine rechteckige Luftplatte, deren Schwingungen unter der Form

$$\varphi = A \sin \pi \sqrt{\frac{n^2}{l^2} + \frac{n'^2}{l'^2}}\, at \,.\, \sin \frac{\pi n x}{l} \,.\, \sin \frac{\pi n' y}{l'}$$

dargestellt werden, am Rande $\varphi = o$.

Es sollten diese letzten Betrachtungen nur dazu dienen, auf die möglichen einfachen Beziehungen zwischen Membranen und Luftplatten hinzuweisen. Eine umfassende theoretische wie experimentelle Behandlung wird diese Beziehungen erst in's rechte Licht setzen können.

Die Gewitter und Hydrometeore in ihrem Verhalten gegenüber den Polarlichtern.

Von

H. Fritz.

Die Meteorologie bietet bei der Reichhaltigkeit des ihrem Gebiete angehörenden Stoffes und den vielen Wechselbeziehungen der mannigfachen Erscheinungen unter einander, wodurch die zusammengesetztesten Verkettungen und Verwicklungen entstehen, der Untersuchung ein so weites Feld, dass trotz der vielen Beobachtungen, die schon bis jetzt ein so reichhaltiges Material aufhäuften, und trotz der grössten Anstrengungen und trotz dem rastlosesten Fleisse einer grossen Zahl von Forschern, kaum nur wenige allgemeine Gesetze erkannt sind; dem ungeachtet aber gibt es vielleicht kein anderes Gebiet der Naturwissenschaften, auf welchem eben so viele Gesetze und