fig im Süden zu zeigen, also zu der Zeit, in welcher die Eisgränze am weitesten vorrückt. Hiermit stimmt der Ausspruch George Fisher's, der 1834 (in Lond. u. Edinb. Phil. Mag.) sich dahin ausspricht, dass das Nordlicht sich am meisten am Rande des Eismeeres und bei grossen Anhäufungen von Eis zeige und die Beobachtungen M'Clintock's, der 1857 und 1858 das Nordlicht 18 Mal an Stellen beobachtete, wo am Tage Wasser sichtbar war und im Winter 1858 auf 1859 zu Port Kennedy von 42 beobachteten Nordlichtern 24 an solchen Orten, an welchen während des Winters offenes Wasser war oder Nebel aus solchen aufstiegen.

Des Bestimmtesten geht aus Obigem hervor, dass die Erklärung der Richtung der Sichtbarkeit mittelst eines über der Erde schwebenden Kreises unmöglich ist, wie ganz richtig Morlet (in Froriep's Notizen, Ser. III, B. 4) nachzuweisen suchte.

Geometrische Mittheilungen

von

F. Graberg.

Beiliegende Tafel enthält eine Reihe von Grundrissen, welche erklären, warum zwei projectivische, gerade Punktreihen, deren Träger sich in allgemeiner Lage befinden, einen Kegelschnitt bestimmen und warum jeder Punkt in der Ebene dieses Kegelschnittes Mittelpunkt eines Strahlsystemes sei.

A_1, A_2 sind die Grundrisse zweier Punkte, welche mit den in der Bildfläche liegenden Geraden BC_1, BC_2 die Ebenen (A_1, BC_1), (A_2, BC_2) bestimmen. Ist A die Grundspur der Geraden A_1A_2, so stellt jede durch den genannten Punkt in der Grundfläche gezogene Gerade AD_1 den Grundschnitt einer durch A_1A_2 gelegten Ebene (A, D_1) vor, welche die Ebenen (A_1, BC_1), (A_2, BC_2) nach den Geraden $d_1A_1B_1$, $d_2A_2B_1$ schneidet und der Punkt B_1 liegt in der Geraden B, nach welcher die Ebenen (A_1, BC_1) (A_2, BC_2) sich schneiden. Ebenso bestimmt eine Ebene (A, D_2) auf der Schnittlinie B den Punkt B_2.

So zeigt die Fig. 1 in den Geraden B, BC_1 die Träger zweier projectivischer Punktreihen $(B_2B_1B_2, BC_1d_3)$, welche durch den Strahlbüschel A_1 perspectivisch auf einander bezogen sind; anderseits in den Geraden A, AC_1 die Träger zweier projectivischer Punktreihen (AA_1A_2, AC_1d_2), welche durch den Strahlbüschel B_1 perspectivisch auf einander bezogen sind. Nun wird durch die Punktenpaare AB, A_1B_1, A_2B_2 eine projectivische Beziehung der Geraden A, B festgestellt, welche sich im Raum nicht treffen. Um ein viertes Paar (A_3, B_3) entsprechender Punkte auf den genannten Geraden zu bestimmen, zeichnen wir in der Grundfläche den Strahlbüschel E, welcher die perspectivische Beziehung der Punktreihen AC_1d_2, BC_1d_3 vermittelt, legen durch die entsprechenden Punkte A_1, B_1 und den Strahl Ed_4d_5 die Ebenen (A_1Ed_5) (B_1Ed_5) und suchen ihren Durchschnitt (A_3B_3) mit den Geraden A, B.

Der Punkt A_3 bestimmt mit der Geraden B eine Ebene, deren Grundschnitt Bd_4 heisst, ebenso bestimmt der Punkt B_3 mit der Geraden A eine Ebene (A, Ad_5); die Gerade A_3B_3 ist die Schnittlinie der bezeichneten Ebenen, ihre Grundspur liegt darum in dem Durchschnitt F_3 von Ad_5, Bd_4.

Nun erkennen wir in den Punkten A, B die Mittelpunkte zweier Strahlbüschel, welche zu den Punktreihen BC_1d_3, AC_1d_2 mithin auch unter sich projectivisch sind und die sich in perspectivischer Lage befinden, weil in AB zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen, und weil Ad_5, Bd_4 entsprechende Strahlen der beiden Büschel A, B sind, so muss ihr Schnittpunkt F_3 in der Geraden C_1F_2 liegen, welche deren perspectivischen Durchschnitt darstellt.

So ist die Gerade C_1F in der Grundfläche der Ort der Spuren aller Projectionsstrahlen, welche entsprechende Punkte der beiden im Raum sich nicht treffenden Reihen AA_1A_2, BB_1B_2 projectivisch auf einander beziehen.

Fig. 2. Umgekehrt können wir jetzt auf CF_2 einen Punkt F annehmen und den Projectionsstrahl suchen, welcher F zur Grundspur hat. Ist z. B. F_b ein solcher Punkt, so suchen wir den Durchschnitt B_t einer Ebene (AF_b) mit B und finden in $B_tA_oF_b$ den gesuchten Projectionsstrahl. Sein Grundriss fällt mit dem der Geraden B zusammen; der Projectionsstrahl liegt also mit B in derselben Verticalebene. Auch in der Verticalebene durch die Gerade A findet man auf ähnliche Weise einen Projectionsstrahl, dessen Grundspur F_a heisst, und welcher A im Schnittpunkt A_t der Ebene (F_a, B) mit dieser Geraden trifft.

Der Durchschnitt A_o der beiden Grundrisse A, B hat eine doppelte Bedeutung; denn dieser Punkt ist:

1) Grundriss des Punktes A_0, in welchem der Projectionsstrahl F_b die Gerade A trifft; 2) Grundriss des Punktes B_0, in welchem der Strahl F_a die Gerade B trifft.

Daraus erhellt, dass bei der projectivischen Beziehung der Geraden A, B, welche nicht in einer Ebene liegen, ihrem scheinbaren Durchschnitte A auf B der Punkt B_t, auf A der Punkt A_t entspricht; die Grundrisse A, B befinden sich somit nach dem Ausdruck Steiners in schiefer, oder, wie Schröter sagt, in allgemeiner Lage.

Fig. 3. Wie in den Verticalebenen von A, B je ein Projectionsstrahl liegt, so können wir uns auch in der Verticalebene des Projectionsstrahles $C_1A_1B_1$ eine Gerade G denken, deren Grundspur G auf AB liegt und welche Träger einer zu A, B projectivischen Punktreihe G_t, G_b, G_a ist, indem sie in den genannten Punkten von den Projectionsstrahlen C_1, F_b, F_a getroffen wird. Der Punkt G_t, in welchem der Projectionsstrahl C_1 die Gerade G trifft, liegt im Durchschnitte der Ebene (A, C_1) mit einer andern, welche durch die Grundspur G und den Strahl F_a bestimmt ist. Diese Schnittlinie hat ihre Grundspur d im Durchschnitt der Tracen AC_1, GF_a und geht durch den Punkt A_t, in welchem die Gerade A vom Strahle F_a getroffen wird; somit findet man den Grundriss des Punktes G_t im Durchschnitt der Grundrisse C_1G, dA_t. Hätten wir die Ebene (G, F_b) zu Hülfe genommen, so würden wir auf denselben Punkt G_t gekommen sein, denn man ersieht aus Fig. 1, dass die Punktreihen F, F_a, F_b; A, A_t, A_0 projectivisch sind; dieselbe Beziehung besteht nach Fig. 3 auch für die Punktreihen A, g_a, g_b,

A, A_t, A_0 und da in A_2 entsprechende Punkte vereinigt sind, und die Punkte C_1, A_1 einander entsprechen, so müssen die Strahlen $g_a A_t$, $g_b A_0$ in demselben Punkt G_t des Strahles $C_1 A_1$ zusammentreffen. Nun wird das Ebenenbüschel $A(F_a, F_b, C_1)$ von der Verticalebene $C_1 A_1$ in dem ebenen Strahlbüschel A_1 geschnitten, das Ebenenbüschel $B(F_a, F_b, C_1)$ in dem ebenen Strahlbüschel B_1 und da die Gerade $C_1 A_1 B_1 G_t$ ein gemeinschaftlicher Strahl beider Strahlbüschel A_1, B_1 ist, in welchem zwei entsprechende Zahlen vereinigt sind, so muss der perspectivische Durchschnitt der beiden Büschel eine durch G_t gehende Gerade sein, welche die Spurpunkte der Strahlen F_a, F_b in der Ebene $C_1 G$ enthält und ihre Grundspur auf AB hat, weil zwei entsprechende Ebenen der Ebenenbüschel A, B sich nach dieser Geraden schneiden. Indem wir das eben Bewiesene auf jeden Projectionsstrahl anwenden können, erhalten wir den Satz:

In der Verticalebene jedes Projectionsstrahles (C_1) liegt eine Gerade (G), welche ihre Grundspur auf AB hat, die Gerade A, B nicht trifft und von den Strahlen F_a, F_b, $C_1 G_t$ so getheilt wird, dass die Punktreihe zu denjenigen der Geraden A, B projectivisch ist.

Fig. 4. Wie der Ebenenbüschel $A(F\ , F_b, C_1)$ die Verticalebene $C_1 G$ nach einem ebenen Strahlbüschel schneidet, dessen Mittelpunkt A_1 auf $C_1 G_t$ liegt, so schneidet ein Ebenenbüschel $F_a(A, B, G)$ dieselbe Verticalebene in einem ebenen Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt G_a sich senkrecht über A_1 auf GG_t befindet, darum fallen in der Senkrechten $A_1 G_a$ zwei entsprechende Strahlen zusammen, sofern wir die Ebenenbüschel projectivisch

auf einander beziehen. Zwei andere entsprechende Strahlen der beiden Büschel A_1, G_a die Tracen der Ebenen (A, C_1) (F_a, G) treffen sich in G_t. Endlich liegen die Durchschnitte von jedem weiteren Paar entsprechender Strahlen, z. B. die Tracen der Ebenen (A, F_b) (F_a, B) mit den Geraden GG_t, C_1G_t je in einer Senkrechten B_1G_b der Schnittlinie der Verticalebenen C_1G, F_bB.

So liegen die Punktreihen $G_tG_bG_a$, $G_tB_1A_1$ perspectivisch in demselben Büschel paralleler Strahlen; dieselbe gegenseitige Lage haben auch die ebenen Strahlbüschel A_1, G_a und die Ebenenbüschel A_1, G_a und die Ebenenbüschel A, F_a. Diese Letztern, unter sich projectivisch, schneiden sich darum in einem ebenen Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt A_t in dem Durchschnitt ihrer Axen A, F_a liegt. Im Weiteren ist z. B. B_t, der Schnittpunkt der Geraden B, F_b, ein gemeinschaftlicher Punkt der einander projectivisch entsprechenden Ebenen (A, F_b) (F_a, B), deren Grundschnitte in L_{ab} die Spur von A_tB_t in der Bildfläche bestimmen. Der Ort der Punkte L_{ab} ist eine gerade Linie: der Grundschnitt L des ebenen Strahlbüschels A_t. Alle Strahlen A_tG_t des Büschels (A_tL) sind Sehnen der Ortscurve G_t, diese selbst ist somit eine ebene Curve. Die Sehnen A_tG_t werden um so kürzer, je mehr der Spurpunkt L_{ag} sich L_0 nähert, dem Kreuzungspunkte des Grundrisses A mit L, je näher die Ebene (A, F_g) der Verticalebene (A, F_a) liegt; in dieser Verticalebene selbst befindet sich demnach eine Tangente A_tL_0 an die Ortscurve G_t. Weil aber alle Punkte G_t in derselben Ebene (A_t, L) liegen, lässt sich durch eine der obigen analoge Betrachtung in jeder Verticalebene G eine Tangente an die Ortscurve G_t nachweisen. So bestimmen die Geraden A, B, welche sich im Raume nicht treffen, vermöge ihrer projectivischen Beziehung zunächst die Geraden AB, $A_1B_1C_1$, C_1F und in zweiter Linie die ebene Curve G_t einerseits, aber anderseits auch einen Punkt F, als gemeinschaftlichen Punkt der drei Ebenen (A, AB), (B, AB), (A_1B_1, C_1F). Es ist somit durch die beiden projectivisch getheilten Geraden A, B in allgemeiner Lage die ebene Begrenzung einer Kegelfläche: ein Kegelschnitt bestimmt.

Fig. 5. Aus den Betrachtungen des Eingangs lässt sich erkennen, dass jede Gerade, welche A, B trifft und ihre Grundspur auf C, F hat, ein Projectionsstrahl sei, welche zwei entsprechende Punkte der Reihen A, B verbindet. So liegt in der Verticalebene C_1F der Projectionsstrahl A_fB_f, der seine Grundspur F_0 im Kreuzungspunkte der Geraden C_1F, L hat; denn es sind die Ebenen (A, F_1) (F_a, F) zwei entsprechende der Ebenenbüschel A, F_a, weil sie die Geraden B, F_b in zwei entsprechenden Punkten B_f, F_b der projectivischen Reihen $B_tB_0B_f$, $B_tA_0F_b$ treffen. Wie F_0, so ist auch G_0, der Kreuzungspunkt von L mit der Geraden A, B, ein Punkt der Curve G_t. Die Gerade G_0, welche in der Verticalebene von AB liegt, trifft mit dem Strahle F_0 in dem Punkte F_1 (senkrecht unter F) zusammen. Die Grundschnitte GF_0, C_1G_0 bestimmen die Grundspur H der Schnittlinie G_tF_1 zweier Ebenen (G, F_0) (C_1, G_0). Die Verticalebene G_tF schneidet die Ebene (G_t, L) nach diese bestimmt mit G, C_1 die Ebenen GF_f, C_1G_f. Die G_t L_f und Letzteren, indem sie einander in den Ebenenbüscheln G, C_1 entsprechen, enthalten auch den Projections-

strahl F_f und die in seiner Verticalebene liegende Gerade G_f, deren gemeinschaftlicher Punkt G_t' ein zweiter Punkt der Curve G_t auf der Geraden G_tL_f ist. Für's Weitere sagt die Fig. 5, dass die Senkrechte FF_1 die Polare zu der Geraden L in der Grundfläche sei[1]).

Endlich entheben wir der Fig. 6 folgende Gleichheiten der Doppelverhältnisse:

$$\begin{array}{c}
(A_0A\ A_2A_t) = (B_tB\ B_2B_0) \\
(A_0A_3A_2A_t) = (B_0B_2B_3B_t) \\
\hline
(A_3A\ A_2A_t) = (B_3B\ B_2B_0)
\end{array}$$

Wenn man also durch einen Punkt P der Geraden A_tB_t Strahlen zieht nach den entsprechenden Punkten A_2, B_2 der Geraden A, B und dieselben verlängert, einerseits bis der Grundriss des Strahles PA_2 den der Geraden B, anderseits bis der Grundriss des Strahles PB_2 den der Geraden A trifft, so bestimmen die Projicirenden dieser Kreuzungspunkte auf B, A wieder einen Projectionsstrahl B_3A_3. Der Punkt P ist der Mittelpunkt zweier Strahlbüschel, von denen der Eine zu A, der Andere zu B perspectivisch liegt. Weil aber der Strahl PB_3 mit PA_2 und umgekehrt PA_3 mit PB_2 sich in derselben Verticalebene befinden, so scheint das im Grundrisse, als ob zwei gleiche Winkel zweier projectivischer Strahlbüschel verkehrt auf einander lägen und eine solche Verbindung zweier projectivischer Strahlbüschel hat man Strahlsystem genannt.

So erklären sich die Punkte eines Kegelschnittes, als Durchschnitte zweier in einer Verticalebene liegender Geraden, die Strahlen eines dem Kegelschnitte

---

[1]) Vergl. auch Fig. 7.

zugehörenden Strahlsystemes, als Grundschnitte eines Büschels von Verticalebenen.

In Fig. 7 sind die Hauptergebnisse vorstehender Untersuchung in einer perspectivischen Ansicht dargestellt.

Notizen.

Abweichung der Magnetnadel in Zürich. — Den auf pag. 91—92 des Jahrganges 1858 mitgetheilten ältern Bestimmungen über die Abweichung der Magnetnadel in Zürich ist beizufügen, dass Fäsi in seinen «Deliciae astronomicae, Zürich 1697 in 4,» sagt, es betrage die westliche Abweichung in Zürich «vast in die 7 Grad», was zu den Bestimmungen in Basel, s. pag. 175 desselben Jahrganges, nicht übel passt. [R. Wolf.]

Naturereignisse beobachtet in Konstanz, und aus der gleichzeitigen Chronik des Domherrn Hch. v. Diessenhofen ausgezogen:

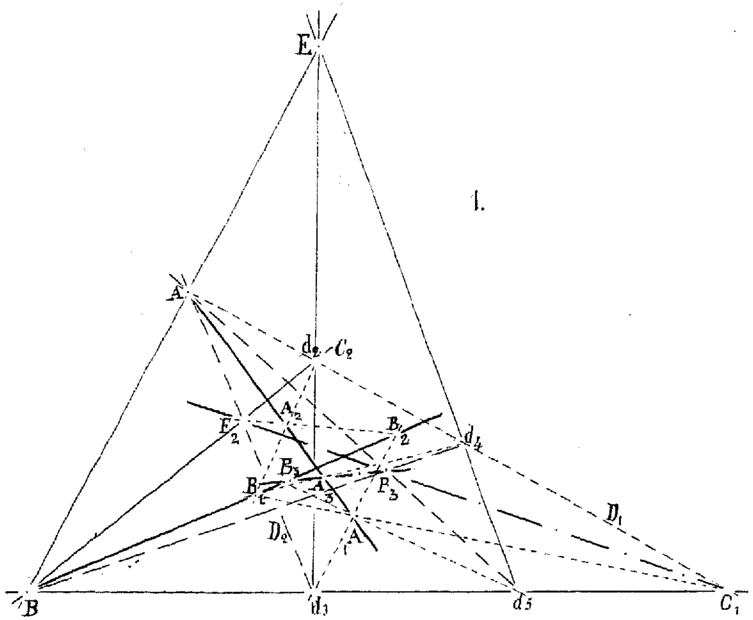
1339. Juli 7. (Nachm. zwischen 12—4 Uhr). Eine Stunde lang ist Sonnenfinsterniss, bis auf $^1/_3$ der Sonnenscheibe.

1347. Sept. 28. Nach Mitternacht nimmt man 3 Monde neben einander wahr, in der Mitte den wirklichen abnehmenden, (Halb-) Mond, zu jeder Seite einen Vollmond. (Symbol der Verwirrung im Reiche, wo Kaiser Ludwig der Bayer, König Karl von Böhmen und Cola Rienzi in Rom gleichzeitig die Herrschaft beanspruchen).

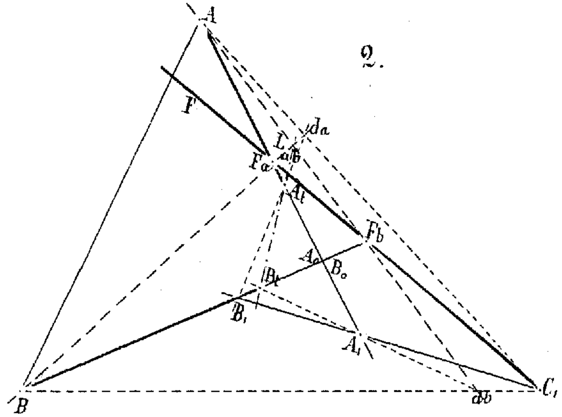
1348. April 13. Jetzt fällt (im Winter? seit Neujahr?) der erste Schnee. Weinreben und Nussbäume leiden; Nachtigall und Kukuk singen im Schnee.

1349. April 19. und 23. Reife und Kälte zerstört in Schwaben die Hoffnungen an Reben und Nussbäumen. — Weniger

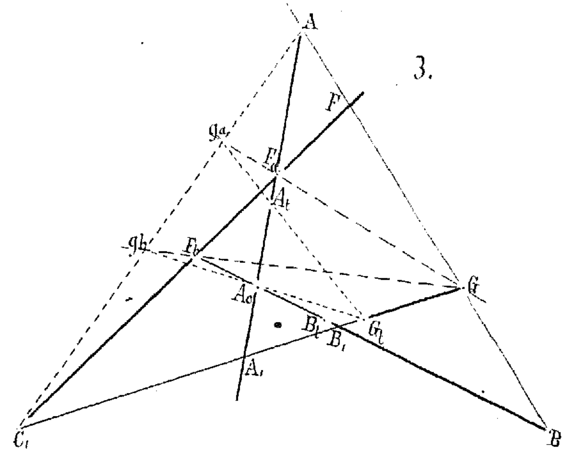
1.



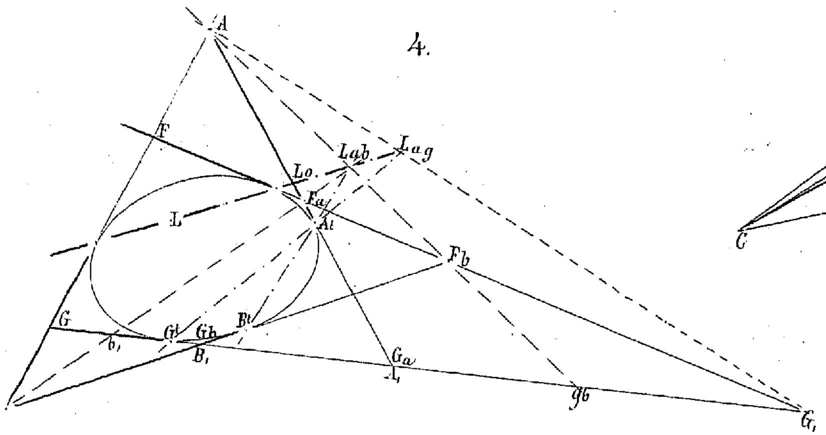
2.



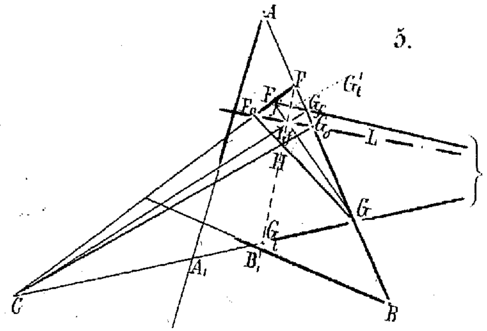
3.



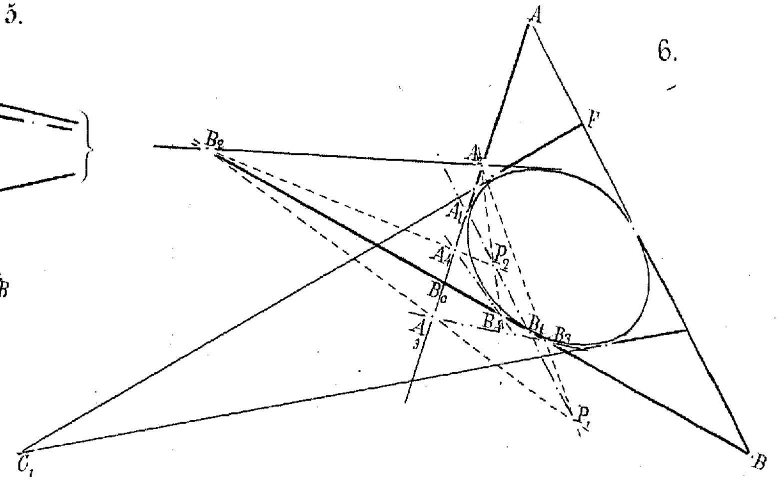
4.



5.



6.



7.