Beweis von Pohlke's Fundamentalsatz der Axonometrie,

von

Dr. Th. Reye.

Wird ein Körper durch parallele Strahlen auf eine beliebige Ebene projicirt, so kann die Projektion desselben auf folgende Art axonometrisch gezeichnet werden. Wir beziehen den Körper auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, und suchen zunächst die Projektionen der drei Coordinaten-Axen, sowie die Verhältnisse, in welchen die drei Coordinaten irgend eines Punktes zu ihren resp. Projektionen stehen. Werden dann die Coordinaten eines beliebig gegebenen Punktes diesen drei Verhältnissen gemäss verändert, und hernach parallel zu den resp. Projektionen der Axen und mit Berücksichtigung ihres Sinnes aneinandergesetzt, indem man vom Schnittpunkte der Axen-Projektionen ausgeht: so erhalten wir eine aus den Projektionen der drei Coordinaten zusammengesetzte, gebrochene Linie, deren zweiter Endpunkt die Projektion des gegebenen Punktes sein muss. Auf diese Weise können alle Eck- und Kantenpunkte des Körpers in der Ebene verzeichnet, also die Projektion des Körpers und deren Umrisse gefunden werden. Wird diese Projektion in beliebigem Massstab vergrössert oder verkleinert, so erhalten wir ein neues Bild des Körpers, welches jener Parallelprojektion ähnlich ist; dasselbe kann auf dieselbe Weise construirt werden wie das erste, und heisst desshalb gleich diesem eine axonometrische Zeichnung des Körpers.

Herr Pohlke nun hat (in seiner „darstellenden Geometrie“ pag. 113) zuerst den Satz aufgestellt, dass in der Projektions-Ebene die Richtung der drei Coordinatenaxen, sowie die Verhältnisse, in welchen die Coordinaten jedes Punktes zu ändern sind, bevor man sie aufträgt, (d. h. die Massstäbe, nach denen man diese Coordinaten verzeichnet), ganz willkürlich angenommen werden können, und dass sogar irgend zwei von den drei Coordinaten-Axen zusammenfallen oder eine derselben sich auf einen Punkt reduciren dürfe. Mit Recht wird dieser Satz als Fundamentalsatz der Axonometrie bezeichnet; er giebt uns bei der Herstellung axonometrischer Zeichnungen alle nur wünschenswerthe Freiheit. Den ersten Beweis desselben (in dieser Vierteljahrsschrift 1861, pag. 254) verdanken wir Herrn v. Deschwanden, welcher auch die grossen Vortheile, die der Satz dem Zeichner darbietet, gebührend hervorhebt. Herr Kinkelin hat (ebenda pag. 358) die an den Satz sich knüpfenden Aufgaben auf analytischem Wege gelöst; und neuerdings hat Herr Schwarz (im 63. Bande des Journals für Mathematik) noch einen elementaren Beweis des Pohlke'schen Satzes gegeben. Die Wichtigkeit des Gegenstandes rechtfertigt wohl die Veröffentlichung eines neuen, von den bisherigen wesentlich verschiedenen Beweises.

Wir führen diesen Beweis durch Lösung der folgenden Aufgabe:

Ein Tetraeder *ABCD* soll durch parallele Strahlen so auf eine beliebig zu wählende Ebene projicirt werden, dass seine Projection $A_2 B_2 C_2 D_2$ einem gegebenen Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ ähnlich wird.

Wenn nämlich diese Aufgabe ausführbar ist, so gilt der Pohlke'sche Satz nicht nur für rechtwinklige, sondern sogar für schiefwinklige Coordinaten-Axen. Denn ein Tetraeder, dessen Kanten AB, AC, AD mit den Coordinaten-Axen zusammenfallen, lässt sich dann so projiciren, dass die Projektionen der Axen dieselben Winkel mit einander bilden, wie die beliebig gegebenen Geraden $A_1 B_1$, $A_1 C_1$, $A_1 D_1$; und weil die Strecken $A_1 B_1$, $A_1 C_1$ und $A_1 D_1$ willkürlich gegeben sind, so sind auch die Verhältnisse $\frac{AB}{A_1 B_1}$, $\frac{AC}{A_1 C_1}$, $\frac{AD}{A_1 D_1}$, in denen die Coordinaten sich ändern, ganz beliebig. Um zugleich die vorhin erwähnten besonderen Fälle des Pohlke'schen Satzes zu erledigen, wollen wir zulassen, dass im Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ der Eckpunkt B_1 auf die Seite $A_1 C_1$ oder auch auf den Punkt A_1 fallen dürfe, wobei das Viereck in ein Dreieck ausartet.

Wir wollen der deutlicheren Vorstellung wegen annehmen, dem Tetraeder sei im Raume eine bestimmte Lage gegeben, so dass wir nur die Richtung der parallelen Projektionsstrahlen und die Stellung der Projektions-Ebene zu suchen haben. Wenn nun unsere Aufgabe ausführbar, also das Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ einer Parallelprojektion des Tetraeders ähnlich und somit eine Abbildung des letzteren ist, so kann leicht zu jedem Punkte P der Kante BD der entsprechende Punkt P_1 auf $B_1 D_1$ gefunden werden, und umgekehrt; denn durch P wird die Strecke BD in demselben Verhältniss getheilt, wie durch P_1 die

Strecke $B_1 D_1$. Wenn also eine Projektion von $ABCD$ dem Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ ähnlich ist, so ist zugleich die Projektion des Tetraeders $APCD$ dem Vierecke $A_1 P_1 C_1 D_1$ ähnlich. Da wir so die Eckpunkte des Vierecks $A_1 B_1 C_1 D_1$ mit anderen Punkten der Ebene vertauschen können, so lassen sich die besonderen Fälle, in denen B_1 entweder auf $\overline{A_1 C_1}$ oder in A_1 liegt, sofort auf den allgemeinen Fall zurückführen.

Ebenso leicht aber können wir statt des beliebigen Vierecks $A_1 B_1 C_1 D_1$ ein Parallelogramm einführen. Wir bestimmen auf der Seite $A_1 B_1$ oder deren Verlängerung einen Punkt B_1', und auf $A_1 D_1$ einen Punkt D_1' so, das $B_1' C_1 \parallel A_1 D_1$ und $D_1' C_1 \parallel A_1 B_1$ ist und folglich $A_1 B_1' C_1 D_1'$ ein Parallelogramm. Der Punkt B_1', welcher die Seite $A_1 B_1$ im Verhältniss $\frac{A_1 B_1'}{B_1 B_1'}$ theilt, muss dann die Abbildung eines Punktes B' von AB sein, durch welchen diese Tetraederkante in demselben Verhältniss getheilt wird; und ebenso ergiebt sich zu D_1' der entsprechende Punkt D' auf der Kante AD. Unser Problem wird also gelöst, indem wir von dem Tetraeder $AB'CD'$ eine Parallelprojektion bestimmen, welche dem Parallelogramm $A_1 B_1' C_1 D_1'$ ähnlich ist.

Wir dürfen somit, ohne die Allgemeinheit der Aufgabe zu beschränken, das Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ als Parallelogramm annehmen. Dann müssen die Projektionen der Tetraederkanten AB und CD und folglich auch die projicirenden Ebenen derselben einander parallel sein; und ebenso muss die projicirende Ebene von BC parallel zu AD und diejenige von AD parallel zu BC sein. Diese vier projicirenden Ebenen sind hiernach leicht zu construiren; sie schneiden einander in den vier parallelen Strahlen a, b, c, d, durch welche die resp. Eckpunkte A, B, C, D des Tetraeders projicirt werden. Die Richtung der Projektionsstrahlen ist also völlig bestimmt; sie ist zugleich diejenige einer Geraden, welche die Halbirungspunkte der Tetraederkanten AC und BD mit einander verbindet, denn die Abbildungen dieser Halbirungspunkte fallen beide auf den Punkt, in welchem die Diagonalen A_1C_1 und B_1D_1 des Parallelogramms $A_1B_1C_1D_1$ sich schneiden.

Die Projektionsstrahlen a, b, c, d sind die Kanten eines prismatischen Raumes, welcher von jeder Transversal-Ebene in einem Parallelogramm $A_2B_2C_2D_2$ geschnitten wird. Es gilt nun, eine Schnitt-Ebene so zu legen, dass dieses Parallelogramm dem gegebenen $A_1B_1C_1D_1$ ähnlich wird; denn zu einer solchen Schnitt-Ebene ist die gesuchte Projektions-Ebene parallel. Zu dem Ende brauchen wir nur die drei Ebenen ab, ac und ad so zu schneiden, dass die entstehenden Schnittlinien A_2B_2, A_2C_2 und A_2D_2 dieselben Winkel mit einander bilden wie die gegebenen Geraden A_1B_1, A_1C_1 und A_1D_1; dann haben nämlich die Dreiecke $A_2B_2C_2$ und $A_1B_1C_1$ gleiche Winkel, und die Parallelogramme $A_2B_2C_2D_2$ und $A_1B_1C_1D_1$ sind ähnlich. Beziehen wir den Ebenenbüschel a projektivisch auf den Strahlenbüschel A_1, sodass den Ebenen ab, ac, ad die resp. Strahlen A_1B_1, A_1C_1, A_1D_1 entsprechen, so ist also folgende nicht unwichtige Aufgabe der synthetischen Geometrie zu lösen:

Ein Ebenenbüschel a (bcd) soll so durch eine Ebene geschnitten werden, dass der entstehende Strahlenbüschel A_2 ($B_2C_2D_2$) einem gegebenen, zu jenem projektivischen Strahlenbüschel A_1 $(B_1 C_1 D_1)$ gleich wird. Oder: Ein Strahlenbüschel A_1 $(B_1 C_1 D_1)$ soll auf einen zu ihm projektivischen Ebenenbüschel a (bcd) gelegt werden, sodass der erstere als Schnitt des letzteren erscheint.

Wir schneiden zunächst den Ebenenbüschel a (bcd) durch eine zur Axe a senkrechte Ebene in einem Strahlenbüschel A' $(B' C' D')$. Ist nun dieser dem Büschel A_1 $(B_1 C_1 D_1)$ projektivisch gleich, so ist die Aufgabe gelöst; wo nicht, so giebt es im Büschel A' ein einziges Paar zu einander senkrechter Strahlen $A'M'$ und $A'N'$, deren entsprechende $A_1 M_1$ und $A_1 N_1$ gleichfalls auf einander senkrecht stehen. (Vgl. Steiner, System. Entwickelung etc. pag. 31.) Um diese Strahlen zu finden, bringen wir die Strahlenbüschel in perspektivische Lage, indem wir sie in dieselbe Ebene und zwei einander entsprechende Strahlen auf einander legen, bestimmen sodann ihren perspektivischen Durchschnitt u und legen durch die Mittelpunkte A' und A_1 einen Kreis, dessen Centrum auf u liegt. Die Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden u werden aus A' und A_1 durch die gesuchten Schenkel der entsprechenden rechten Winkel $M'A'N'$ und $M_1 A_1 N_1$ projicirt. Die Ebenen am und an des Büschels a, in welchen die resp. Strahlen $A'M'$ und $A'N'$ liegen, stehen ebenfalls auf einander senkrecht.

Soll nun der Strahlenbüschel A_1 $(B_1 C_1 D_1)$ so auf den Ebenenbüschel a (bcd) gelegt werden, dass der erstere als Schnitt des letzteren erscheint, und soll zugleich A_1 mit A' zusammenfallen, so müssen entweder die Strahlen $A_1 M_1$ und $A' M'$ oder die Strahlen

$A_1 N_1$ und $A' N'$ zur Deckung gebracht werden; denn nur dann kann der rechte Winkel $M_1 A_1 N_1$ in den ihm entsprechenden rechten Flächenwinkel *man* hineingelegt werden. Nun ist von den spitzen Winkeln $M' A' B'$ und $B' A' N'$, welche zusammen den rechten Winkel $M' A' N'$ ausmachen, der eine grösser und der andere kleiner als der entsprechende $M_1 A_1 B_1$ oder $B_1 A_1 N_1$, weil auch $M_1 A_1 B_1 + B_1 A_1 N_1 = 90°$. Sei etwa

$$M' A' B' < M_1 A_1 B_1,$$

so muss $A_1 M_1$ mit $A' M'$ zur Deckung gebracht, und der Winkel $M_1 A_1 B_1$ um diesen Schenkel $A_1 M_1$ gedreht werden, bis der bewegliche Schenkel $A_1 B_1$ in die ihm entsprechende Ebene *ab* fällt. Wir erhalten so zwei Stellungen für die Ebene des Büschels A_1, und dieselben sind symmetrisch zur Axe des Ebenenbüschels *a*. Da für jede dieser Stellungen die drei Strahlen $A_1 M_1$, $A_1 B_1$ und $A_1 N_1$ in ihren entsprechenden Ebenen liegen, so fällt jeder Strahl von A_1 in die ihm entsprechende Ebene und der Strahlenbüschel A_1 stellt sich dar als Schnitt des Ebenenbüschels *a*. Unsere Aufgabe hat also zwei Lösungen.

Für die Hauptaufgabe und damit auch für den Pohlke'schen Satz ergiebt sich, dass die Richtung der Projektionsstrahlen durch die Lage des Tetraeders und die Form seines Bildes völlig bestimmt ist, dass dagegen die Projektions-Ebene zwei verschiedene, zu den Projektionsstrahlen symmetrische Stellungen annehmen kann. Nur wenn die Projektion orthogonal ausfällt, erhalten wir ausnahmsweise eine einzige Stellung für die Projektions-Ebene.

Nachdem so die Lösbarkeit unserer Aufgabe nachgewiesen ist, können wir auch direkt aus den gegebenen Stücken die Richtung der Projektionsstrahlen und die Stellung der Projektions-Ebene finden, ohne erst ein Parallelogramm in der Bildfläche zu Hülfe zu nehmen. Sei wieder die Abbildung des Tetraeders $ABCD$ ein ganz beliebiges Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$. Dann ist der Punkt Q_1, in welchem die Gegenseiten $A_1 B_1$ und $C_1 D_1$ des Vierecks sich schneiden, die Abbildung eines Punktes von AB und gleichzeitig eines Punktes von CD, und diese beiden Punkte lassen sich construiren mittelst der Theilungsverhältnisse $\frac{A_1 Q_1}{B_1 Q_1}$ und $\frac{C_1 Q_1}{D_1 Q_1}$. Die Verbindungslinie q dieser beiden Punkte giebt offenbar die Richtung der Projektionsstrahlen an, weil zwei und folglich alle Punkte dieser Linie sich in Q_1 abbilden. Ebenso finden wir zu den Punkten R_1 und S_1, in welchen die Seiten $A_1 C_1$ und $A_1 D_1$ des Vierecks von den resp. gegenüberliegenden Seiten $B_1 D_1$ und $B_1 C_1$ geschnitten werden, zwei Strahlen r und s, welche zu den Projektionsstrahlen parallel sind, weil zwei und folglich alle Punkte derselben in resp. R_1 und S_1 sich abbilden. Der prismatische Raum, von welchem die Projektionsstrahlen q, r, s die drei Kanten sind, muss dann durch eine Transversal-Ebene so geschnitten werden, dass das entstehende Dreieck $Q_2 R_2 S_2$ dem Dreick $Q_1 R_1 S_1$ ähnlich wird. Zu der Schnitt-Ebene, deren Construktion oben angegeben worden ist, und für welche wir zwei verschiedene Stellungen erhalten, ist sodann die Projektions-Ebene parallel.

Sobald wir von den Strahlen p, q, r nur zwei Punkte kennen, so ist deren Lage im Tetraeder und folglich auch das Verhältniss, in welchem jede Tetraederkante von ihnen getheilt wird, völlig bestimmt. Daraus folgt beiläufig der Satz:

„Sind von den Verhältnissen, in welchen die „sechs Seiten eines vollständigen Vierecks $A_1 B_1$ „$C_1 D_1$ sich gegenseitig theilen, irgend zwei gege- „ben, so sind dadurch die übrigen vier völlig be- „stimmt."

Weinanalyse

von

Heinrich Suter.

Seit einigen Jahren wurde bei uns durch die Herren Blattmann und Cie. in Bari ein Wein von Barletta, Süd-Italien, eingeführt, dessen Analyse hier mittheile.

Die Farbe des Weines ist tief dunkelroth, der Geruch gewürzhaft. Geschmack stark adstringirend, daneben aber süss.

Der Wein, den ich der Analyse unterwarf, war vom Jahr 1863 und hatte sich vollkommen gut erhalten.

Das specifische Gewicht wurde in 2 Bestimmungen zu 0,996202 bei 15° C. gefunden.

Der Alkoholgehalt wurde mittelst Destillation nach Mohr's Methode bestimmt und zwar, da das Destillat einen bedeutenden Essigsäuregehalt erkennen lies, mit Zusatz von Kreide.

Das Mittel aus 3 Versuchen ergab:

$$13{,}8\,\%\ \text{Vol.} = 11{,}16\,\%\ \text{Gew.}$$