Einige geometrische Betrachtungen

von

C. F. Geiser,

Dozent am eidgenössischen Polytechnikum.

I.

Die beiden Polarebenen eines Punktes P in Bezug auf zwei feste Flächen F_1 und F_2 des zweiten Grades schneiden sich im Allgemeinen längs einer Geraden L, und wenn sich P auf einer zweiten Geraden l bewegt, so wird L derart fortschreiten, dass sie stets l_1 und l_2, die beiden Polaren von l nach F_1 und F_2 schneidet. Auf diese Weise gehört zu jedem Punkte von l ein Punkt auf l_1 und ein Punkt auf l_2, welche beiden letztern nun ebenfalls als einander entsprechend gedacht werden können. Es ist leicht zu erkennen, dass die verschiedenen Lagen von L eine Fläche zweiten Grades bilden; denn irgend vier Punkte auf l bestimmen vier Punkte auf l_1 und vier andere Punkte auf l_2, so dass jede dieser beiden Punktengruppen gleiches Doppelverhältniss mit der ursprünglichen hat, also haben sie auch unter sich gleiches Doppelverhältniss, woraus folgt: l_1 und l_2 werden von L projectivisch geschnitten, d. h. L beschreibt eine Fläche zweiten Grades $F_{1,2}$.

Nimmt man jetzt zu F_1 und F_2 noch eine dritte Fläche vom zweiten Grade, F_3, so erhält man durch Combination von F_1 und F_3 eine Fläche $F_{1,3}$ und durch Zusammenstellung von F_2 und F_3 eine Fläche $F_{2,3}$

beide vom zweiten Grade. $F_{1,2}$ und $F_{1,3}$ haben l_1 gemein, l_2 liegt sowohl auf $F_{1,2}$ als auf $F_{2,3}$ und l_3 gehört zugleich $F_{1,3}$ und $F_{2,3}$ an. Da jede dieser Geraden nur von einer einzigen der Flächen F_1, F_2, F_3 bestimmt wird, so bilden sie „den zufälligen oder unwesentlichen Durchschnitt“ der drei Flächen $F_{1,2}$, $F_{2,3}$, $F_{3,1}$; „der wesentliche Durchschnitt“ derselben ist eine Raumcurve dritten Grades C_3, welche allen dreien zugleich angehört und desshalb auch von allen drei Flächen F_1, F_2, F_3 abhängt.

II.

Jedem Punkte P im Raume entspricht im Allgemeinen ein anderer P^1 als der Durchschnitt seiner drei Polarebenen nach F_1, F_2, F_3 und zwar ist diese Beziehung eindeutig und reciprok, d. h. einem Punkte P entspricht im Allgemeinen nur ein, und stets ein Punkt P^1, und diesem ist wiederum der Punkt P zugeordnet. Bewegt sich nun der Punkt P längs einer Geraden, so beschreibt der Punkt P^1 eine Raumcurve C_3 vom dritten Grade, wie aus den Entwickelungen in I. leicht folgt. Um den Ort des Punktes P^1 zu bestimmen, wenn P auf einer beliebigen Ebene sich bewegt, bemerke man, dass in Folge der Eindeutigkeit und Reciprozität unserer Zuordnung eine Gerade den gesuchten Ort in eben so vielen Punkten schneiden wird, als die ihr entsprechende Raumcurve dritten Grades die vorgelegte Ebene.

Man hat also den Satz:

Bewegt sich ein Punkt auf einer Ebene so beschreibt der Durchschnitt seiner Polarebenen nach drei festen Flächen zweiten Grades eine Fläche vom dritten Grade.

Oder unter Berücksichtigung des Satzes, dass die Polarebenen eines festen Punktes in Bezug auf alle Flächen zweiten Grades, welche durch sieben gegebene Punkte gehen, sich in einem andern Punkte schneiden:

Sucht man die Pole einer festen Ebene nach sämmtlichen Flächen zweiten Grades, welche durch sieben gegebene Punkte gehen, so findet man als deren Ort eine Fläche dritten Grades.

Diese Sätze sind ohne Beweis von Steiner in den Monatsberichten der Berlinerakademie vom 31. Januar 1856 gegeben worden.

Anmerkung. Analytisch lässt sich der erstere dieser beiden Sätze wie folgt beweisen: Seien $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ die Gleichungen der drei Flächen zweiten Grades, seien ferner x_0, y_0, z_0, p_0 die Coordinaten des Punktes P, so erhält man zur Bestimmung des Punktes P' die Gleichungen:

$$1)\quad x_0 f'_1(x) + y_0 f'_1(y) + z_0 f'_1(z) + p_0 f'_1(p) = 0$$
$$2)\quad x_0 f'_2(x) + y_0 f'_2(y) + z_0 f'_2(z) + p_0 f'_2(p) = 0$$
$$3)\quad x_0 f'_3(x) + y_0 f'_3(y) + z_0 f'_3(z) + p_0 f'_3(p) = 0$$

wo x, y, z, p die Coordinaten von P^1 sind. Nun bewegt sich aber P auf einer Ebene, man hat also noch

$$4)\quad x_0\,\alpha + y_0\,\beta + z_0\,\gamma + p_0\,\delta = 0$$

und durch Elimination von x_0, y_0, z_0, p_0 aus den Gleichungen 1, 2, 3, 4:

$$5)\quad \begin{vmatrix} f'_1(x) & f'_1(y) & f'_1(z) & f'_1(p) \\ f'_2(x) & f'_2(y) & f'_2(z) & f'_2(p) \\ f'_3(x) & f'_3(y) & f'_3(z) & f'_3(p) \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0$$

als die Gleichung des gesuchten Ortes, welcher also vom dritten Grade ist, da ja die f' alle die x, y, z, p nur linear enthalten.

III.

Man hätte den ersten Steiner'schen Satz auch mit Hülfe der folgenden Betrachtungen finden können:

Es kann eintreten, dass der Punkt P' in die Ebene E hineinfällt, welche P durchläuft. In diesem Falle müssen die drei Polaren des Punktes P in Bezug auf die drei Kegelschnitte K_1, K_2, K_3, in welchen E die Flächen F_1, F_2, F_3 schneidet, sich in einem Punkt treffen. Man weiss aber, dass dann der Ort des Punktes P und der Ort des Punktes P' dieselbe ebene Curve dritten Grades bilden, welche die Tripelcurve der Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 heisst, weil sie durch die drei Tripel harmonischer Punkte geht, die den Kegelschnitten, zu je zweien gruppirt, gemein sind. Da nun eine algebraische Fläche von jeder Ebene in einer Curve geschnitten wird, deren Grad mit dem Grade der Fläche identisch ist, so schliesst man leicht auf den gegebenen Satz.

Nimmt man jetzt noch die zweite Form desselben zu Hülfe, so erhält man folgendes Theorem:

Greift man aus der Schaar von Kegelschnitten, in denen eine Ebene von den sämmtlichen Flächen zweiten Grades durch sieben Punkte geschnitten wird, je zwe heraus, und bestimmt das denselben entsprechende Tripel harmonischer Punkte, so liegen alle diese Tripel auf einer und derselben Curve dritten Grades.

IV.

Eine Fläche zweiten Grades hat die Eigenschaft, dass sie von jeder ihrer Tangentialebenen in zwei Geraden geschnitten wird, deren gemeinsamer Punkt der Pol der Tangentialebene nach der Fläche ist. Diess gibt den Satz:

Es gibt unendlich viele Flächen zweiten Grades, welche durch sieben Punkte gehen und eine gegebene Ebene berühren. Der Ort der Berührungspunkte ist eine Curve dritten Grades.

Betrachtet man nun acht Punkte im Raume und eine Ebene, so kann man zu je sieben der Punkte eine Curve dritten Grades in der Ebene konstruiren, was acht verschiedene Curven gibt. Wir beantworten die Frage, ob es Punkte gebe, welche allen diesen Curven gemein sind. Es werden diess offenbar die Berührungspunkte derjenigen Flächen zweiten Grades sein, welche durch die acht Punkte gehen und die Ebene berühren. Aber alle Flächen zweiten Grades, welche durch acht von einander unabhängige Punkte im Raume gehen, schneiden sich in einer Raumcurve vierten Grades, welche die vorgelegte Ebene in vier Punkten trifft, die allen Kegelschnitten gemeinsam sind, welche als Durchschnitt der Flächenschaar mit der Ebene bestimmt werden können. Unter diesen Kegelschnitten befinden sich drei, welche in Gerade zerfallen, deren zugehörige Flächen zweiten Grades also die Ebene berühren, und deren Mittelpunkte, das allen Kegelschnitten gemeinsame Tripel, sind die gesuchten Punkte — also drei an der Zahl. Als Corollar findet sich also:

Durch acht Punkte gibt es drei Flächen zweiten Grades, welche eine gegebene Ebene berühren.

Anmerkung. Je zwei der genannten Curven schneiden sich ausser in den drei, allen gemeinsamen Punkten, noch in sechs andern. Welche Bedeutung haben dieselben?

V.

Die in II aufgestellte Zuordnung enthält einen scheinbaren Widerspruch: der Ort der Punkte, welche einer Geraden entsprechen, ist als Raumcurve dritten Grades erkannt worden, während, wenn die Gerade als Durchschnitt zweier Ebenen aufgefasst wird, ihr eine Raumcurve neunten Grades, in welcher sich doch zwei Flächen dritten Grades schneiden, entsprechen müsste. Aber unter den Flächen zweiten Grades, welche durch sieben Punkte gehen, befinden sich unendlich viele Kegel. Für irgend einen dieser Kegel wird der Pol einer beliebigen Ebene mit dem Mittelpunkte desselben zusammenfallen, d. h.

Sucht man den Ort der Pole einer willkürlich gewählten Ebene in Bezug auf alle Flächen zweiten Grades, welche durch sieben Punkte gehen, so enthält derselbe nothwendiger Weise die Mittelpunkte sämmtlicher Kegel, welche sich unter diesen Flächen befinden.

Betrachtet man also zwei Polflächen, die zwei gegebenen Ebenen entsprechen, so wird man einen wesentlichen Durchschnitt, welcher von allen vorkommenden Elementen, also auch den beiden Ebenen abhängt, unterscheiden müssen von einem unwesentlichen Durchschnitte, welcher nur von den sieben Fundamentalpunkten bestimmt wird, und also allen Polflächen gemein ist. Der erste Theil ist die Raumcurve dritten Grades, welche der Durchschnittsgeraden der beiden Ebenen entspricht, und der zweite Theil ist der erwähnte Ort der Kegelmittelpunkte. Damit ist der angedeutete Widerspruch gehoben, und zugleich folgender Satz gewonnen:

Der Ort der Mittelpunkte aller Kegelflächen zweiten Grades, welche durch sieben von einander unabhängige Punkte gehen, ist eine Raumcurve sechsten Grades.

Erinnert man sich des Zusammenhanges der Theorie der Kegelflächen zweiten Grades mit der Theorie der harmonischen Eigenschaften, so kann man den Satz folgendermassen aussprechen:

Ordnet man die Flächen zweiten Grades, welche durch sieben Punkte gehen, zu zweien, und bestimmt jedesmal das gemeinsame Quadrupel harmonischer Punkte, so liegen alle diese Quadrupel auf derselben Raumcurve sechsten Grades.

Weitere Eigenschaften dieser Raumcurve finden sich unter Berücksichtigung des Satzes: Bestimmt man von drei Flächen zweiten Grades zu zweien genommen die drei Quadrupel harmonischer Punkte, so liegen dieselben auf einer Fläche zweiten Grades.

VI.

Da durch acht unabhängige Punkte im Raume vier Kegel zweiten Grades gehen, deren Mittelpunkte ein Quadrupel bilden, und da durch sieben Punkte unendlich viele solcher Kegel gehen, deren Mittelpunkte auf einer Raumcurve liegen, so lässt sich schliessen, dass man als Ort der Mittelpunkte der Kegelfläche zweiten Grades durch sechs von einander unabhängige Punkte im Raume eine Fläche finden wird. Bevor wir ihren Grad bestimmen, wollen wir einige Eigenschaften derselben angeben. Verbindet man zwei der sechs Punkte durch eine Gerade, so kann man auf dieser Geraden jeden beliebigen Punkt als Mittelpunkt eines Kegels wählen, welcher die sechs Punkte enthält, denn man hat ausser der Geraden nur noch vier Strahlen nach den vier übrigen Punkten zu ziehen — und durch fünf von einem Punkte ausgehende Strahlen lässt sich stets eine Kegelfläche zweiten Grades legen. So erhält man als dem gesuchten Orte angehörig alle Verbindungsgeraden, welche zwischen je zwei der gegebenen Punkte möglich sind, also fünfzehn Gerade.

Da man ferner zwei sich schneidende Ebenen als Kegel auffassen kann, dessen Mittelpunkt auf der Schnittgeraden beliebig gewählt werden darf, so erhält man auf der Fläche der Mittelpunkte noch so viele Gerade als verschiedene Gruppirungen der sechs Punkte zu drei und drei möglich sind, diess gibt zehn, so dass also die Mittelpunktsfläche 25 gerade Linien enthält. Da in einer Ebene, welche drei der gegebenen sechs Punkte enthält, vier dieser Geraden liegen, so folgt daraus, dass der Grad der Fläche mindestens vier ist; dass er diese Zahl nicht übersteigt, soll im Folgenden bewiesen werden.

VII.

Vertheilt man sieben Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$, in zwei Gruppen: $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ und P_1, P_2, P_3,

P_4, P_5, P_7, so erhält man für jede derselben eine Mittelpunktsfläche. Diese beiden Flächen M und M' sind beide, wofern wir die Punkte als von einander unabhängig betrachten, von demselben Grade, den wir mit x bezeichnen wollen. M und M' werden sich nun schneiden, und ihrem Durchschnitte muss nothwendigerweise die nach V bestimmte Raumcurve sechsten Grades der Punkte $P_1 \ldots . P_7$ angehören. Diese Raumkurve, als von allen auftretenden Elementen abhängig, ist der wesentliche Durchschnitt von M und M'. Da diese Flächen aber sich in einer Raumcurve vom x^2 Grade schneiden, und sechs keine Quadratzahl ist, so muss noch ein unwesentlicher Durchschnitt vorhanden sein, der nicht von allen sieben der Punkte $P_1 \ldots . P_7$ abhängt. In der That liegen die zehn Verbindungsgeraden der fünf Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, welche also unabhängig von P_6 und P_7 sind, nach den Betrachtungen in VI auf beiden Mittelpunktsflächen zugleich; sie bilden mit der Raumcurve sechsten Grades zusammen genommen den vollständigen Durchschnitt von M und M', welcher also vom sechszehnten Grade ist. Man hat jetzt die Gleichung $x^2 = 16$, oder $x = 4$, d. h.:

D e r O r t d e r M i t t e l p u n k t e a l l e r K e g e l f l ä c h e n z w e i t e n G r a d e s, w e l c h e d u r c h s e c h s v o n e i n a n d e r u n a b h ä n g i g e P u n k t e i m R a u m e g e h e n, i s t e i n e F l ä c h e v o m v i e r t e n G r a d e, a u f w e l c h e r m a n l e i c h t 25 G e r a d e n a c h w e i s e n k a n n.

Als Corollar hat man den Satz:

S c h n e i d e t m a n d i e 15 V e r b i n d u n g s g e r a d e n, w e l c h e s e c h s b e l i e b i g e P u n k t e i m R a u m e v e r b i n d e n, d u r c h i r g e n d e i n e E b e n e, s o liegen die 15 Schnittpunkte auf einer Curve vierten Grades.

Anmerkung. Dass die Mittelpunktsfläche vom vierten Grade ist, lässt sich leicht analytisch beweisen:

Man wähle von den sechs Punkten P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 die vier letzten zu den Ecken des Coordinatentetraeders, dann wird jede Fläche zweiten Grades, welche durch diese vier Punkte geht, eine Gleichung haben von der Form:

1) $\alpha xy + \beta xz + \gamma xp + \alpha' yz + \beta' yp + \gamma' zp = 0$

Seien nun die Coordinaten von P_1 und P_2 resp. x_1, y_1, z_1, p_1 und x_2, y_2, z_2, p_2, so werden die Flächen zweiten Grades, welche durch die sechs Punkte $P_1 \ldots . P_6$ gehen sollen, den Coeffizienten der Gleichung 1) die Bedingungen auferlegen:

2) $\alpha x_1 y_1 + \beta x_1 z_1 + \gamma x_1 p_1 + \alpha' y_1 z_1 + \beta' y_1 p_1 + \gamma' z_1 p_1 = 0$

3) $\alpha x_2 y_2 + \beta x_2 z_2 + \gamma x_2 p_2 + \alpha' y_2 z_2 + \beta' y_2 p_2 + \gamma' z_2 p_2 = 0$

Ferner: Die Coordinaten x, y, z des Mittelpunktes der durch die Gleichung 1) dargestellten Fläche sind gegeben durch die Gleichungen:

4) $$\alpha y + \beta z + \gamma p = 0$$

5) $$\alpha x + \alpha' z + \beta' p = 0$$

6) $$\beta x + \alpha' y + \gamma' p = 0$$

und hierzu tritt noch, wenn 1) einen Kegel darstellen soll

7) $$\gamma x + \beta' y + \gamma' z = 0.$$

In den sechs Gleichungen 2) bis 7) treten die Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ homogen und linear auf; man kann sie desshalb climiniren und erhält dann für x, y, z, p, die Gleichung vom vierten Grade

$$8)\quad \begin{vmatrix} x_1 y_1 & x_1 z_1 & x_1 p_1 & y_1 z_1 & y_1 p_1 & z_1 p_1 \\ x_2 y_2 & x_2 z_2 & x_2 p_2 & y_2 z_2 & y_2 p_2 & z_2 p_2 \\ y & z & p & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & z & p & 0 \\ 0 & x & 0 & y & 0 & p \\ 0 & 0 & x & 0 & y & z \end{vmatrix} = 0$$

wodurch der aufgestellte Satz bewiesen ist.

Zürich, den 28. September 1865.

Mittheilungen über die Sonnenflecken

von

Dr. Rudolf Wolf.

XIX. Mittheilung von Herrn Fritz über das periodische Erscheinen des Polarlichtes; Studien über die Declinations-Variationen in Petersburg, Katharinenburg, Barnaoul und Nertschinsk; Fortsetzung der Sonnenfleckenliteratur.

Vor Allem veröffentliche ich mit Vergnügen folgende werthvolle Mittheilung, welche mir mein lieber College und Mitarbeiter, Herr Fritz, über das periodische Erscheinen des Polarlichtes gemacht hat:

„Das Polarlicht, der Lichtprocess der Erde, wurde für die mittleren Breiten der nördlichen Hemisphäre längst für eine periodische Erscheinung erkannt, wie Mairan, Hansteen, Ritter, Muncke, Olmstedt u. A. in vortrefflichen Arbeiten nachzuweisen suchten, während die Zahl der Gegner eines solchen Wechsels, wie Ramus, Schiönning u. s. w., welche entweder den Wechsel geradezu bestritten oder nur für niedere