Ueber die centralen oder polaren Projektionen von vier beliebigen Punkten.*)

Von

W. von Deschwanden.

1. Die Parallelprojektionen von vier Punkten, oder von drei, von einem Punkte ausgehenden geradlinigen Axen mit gegebener Länge und gegenseitiger Richtung, sind der Gegenstand mehrfacher Untersuchungen gewesen. Sowohl die orthogonalen als schiefen Parallelprojektionen von rechtwinkligen und schiefen Axensystemen sind vorzugsweise seit der Zeit einer eingehenden Betrachtung unterworfen worden, als die axonometrische Darstellungsart von Gegenständen aus dem Gebiete der Technik und verschiedener Zweige der Naturwissenschaften eine umfassendere Anwendung gefunden hat.

Den Polarprojektionen von vier Punkten oder drei Axen wurde dagegen bisher nicht so viel Aufmerksamkeit geschenkt. Gleichwohl verdienen sie dieselbe wohl in noch höherem Masse als die Parallelprojektionen, indem sie, als der allgemeinere Fall, die letztern als einen einzelnen Spezialfall in sich begreifen und ausserdem auch für die praktische Anwendung, nämlich im Gebiete der Linienperspektive, von hervorragender Bedeutung sind.

*) Anmerkung. Statt des Ausdruckes: Projektionscentrum wird in diesem Aufsatze der Kürze wegen der Ausdruck: Pol, also auch statt Centralprojektion, Polarprojektion u. s. f. gebraucht. Verwechslungen mit den andern gebräuchlichen Bedeutungen des Wortes Pol können nicht vorkommen.

2. Eine umfassende Untersuchung des Zusammenhanges, welcher zwischen allen, bei diesen Projektionen vorkommenden Grössen besteht, kann nicht von ganz geringem Umfange sein, denn die Zahl dieser Grössen ist ziemlich bedeutend und die zwischen ihnen bestehenden Verhältnisse sind manigfaltig. Eine erschöpfendere Behandlung dieses Gegenstandes mag daher einer grösseren, selbstständigen Abhandlung vorbehalten bleiben, während in dem engen Rahmen dieser Zeitschrift nur eine der zunächst liegenden und zugleich für die Anwendungen wichtigsten hierher gehörenden Fragen erörtert werden soll. Unter der Voraussetzung nämlich, dass im Allgemeinen eine Polarprojektion eines Punktes auf einer Ebene ebenfalls ein Punkt ist, soll angenommen werden:

> Die gegenseitige Lage von vier Punkten A, B, C, D im Raume, sowie vier beliebige Punkte a, b, c, d auf einer Ebene seien gegeben; man untersuche, unter welchen Umständen die letztern als eine Polarprojektion der erstern betrachtet werden können, wo alsdann der Pol liege und was für eine Lage die vier Punkte im Raume zur gegebenen Ebene haben.

Bevor auf die Beantwortung der Frage selbst eingetreten wird, ist zu bemerken, dass die gegenseitige Lage der vier Punkte A, B, C, D auf sehr verschiedene Weise gegeben werden kann. Entweder können die sechs zwischen ihnen befindlichen Entfernungen, AD, BD, CD, AB, AC und BC, oder nur drei Entfernungen AD, BD, CD und die zwischen diesen Linien enthaltenden Winkel, oder die, zwischen den durch sie bestimmten Ebenen, enthaltenen diedrischen

Winkel, u. s. w. gegeben sein. Für die vorliegende Untersuchung wird es am zweckmässigsten sein, drei Entfernungen *AD*, *BD*, *CD* und die drei, zwischen diesen drei Linien liegenden Winkel, als gegeben zu betrachten. Dabei soll:

$$\angle\, ADB \text{ als } \angle\, C$$
$$\angle\, ADC \text{ „ } \angle\, B \text{ und}$$
$$\angle\, BDC \text{ „ } \angle\, A$$

bezeichnet werden.

Ausserdem wird statt der absoluten Längen *AD*, *BD* und *CD* nur das Verhältniss derselben zu einander in den folgenden Betrachtungen als gegeben angenommen werden; denn wenn die Lage des Poles und der vier Punkte im Raume auch nur für einen einzigen Werth ihrer absoluten Entfernungen bekannt ist, so kann ihre Lage für beliebige andere, aber im gleichen Verhältnisse zu einander stehende Entfernungen dadurch leicht gefunden werden, dass man die ganze Gruppe von Punkten dem Pole mehr genähert oder von demselben entfernt denkt, dabei aber die Linien *AD*, *BD* und *CD* stets parallel mit ihrer ursprünglichen Lage voraussetzt. Aus demselben Grunde ist es gestattet, einen der vier Punkte *A*, *B*, *C*, *D* an eine beliebige Stelle der ihm entsprechenden projizirenden Linie zu verlegen, und es wird daher im Folgenden stets angenommen, der Punkt *D* falle mit seiner Polarprojektion *d* auf der gegebenen Ebene zusammen. Für denselben wird entweder die Bezeichnung *D* oder *d* beibehalten werden, je nachdem er als ein Punkt des Raumes oder als ein Theil der Polarprojektion betrachtet werden soll.

3. Ausser den bisher genannten Grössen werden ferner noch in die Betrachtung verflochten werden:

Die Fluchtpunkte der Linien *DA*, *DB*, *DC*, *AB*, *AC* und *BC*, welche mit (*A*), (*B*), (*C*), (*AB*), (*AC*) u. (*BC*) bezeichnet werden sollen. Unter diesen Fluchtpunkten werden diejenigen Punkte verstanden, in welchen die Geraden, welche man vom Pole aus parallel zu den Linien *DA*, *DB* . . . ziehen kann, die Projektionsebene schneiden. Es geht daraus hervor, dass (*A*) stets irgendwo auf der Geraden *da* oder ihrer Verlängerung, (*B*) stets auf der Geraden *db*, überhaupt: dass jeder Fluchtpunkt stets auf der Polarprojektion der Linie, welcher er angehört, oder auf den Verlängerungen dieser Projektion liegen muss.

4. Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen kann zur Behandlung der oben gestellten Hauptfrage selbst geschritten werden.

In Fig. 1 seien *a*, *b*, *c*, *d* die vier auf der Projektionsebene, die hier zugleich als Zeichnungsebene angenommen wird, gegebenen Punkte, welche als Polarprojektionen der im Raume gedachten Punkte *A*, *B*, *C*, *D* betrachtet werden sollen. Ferner seien für irgend eine der Aufgabe entsprechende Lage der Punkte *A*, *B*, *C*, *D* und des Poles, der mit *P* bezeichnet werden mag, (*A*), (*B*) und (*C*) die Fluchtpunkte der Linien *DA*, *DB* und *DC*.

Alsdann liegt der Fluchtpunkt der Linie *AB* im Durchschnittspunkte von *ab* mit (*A*) (*B*), denn ausserdem, dass er in *ab* oder der Verlängerung dieser Linie liegt, muss er sich auch auf (*A*) (*B*) oder deren Verlängerung befinden. (*A*) (*B*) ist nämlich die Schnittlinie der im Raume befindlichen Ebene *PAB* mit der Projektionsebene, und die Linie *P* (*AB*) liegt, da sie parallel mit *AB* ist und durch *P* geht, in der Ebene *PAB*; sie kann also die Projektionsebene nur in der Schnittlinie (*A*) (*B*) treffen. Ebenso liegt der Fluchtpunkt (AC) der Linie AC auf dem Durchschnittspunkte der Linien ac und (A) (C) oder ihrer Verlängerungen.

5. Unter der Voraussetzung, dass alle fünf Fluchtpunkte (A), (B), (C), (AB) und (AC) die richtige Lage haben, finden ferner folgende Verhältnisse statt: es ist:

$$P\,(A) \mathrel{\#} DA,\ P\,(B) \mathrel{\#} DB,\ P\,(C) \mathrel{\#} DC,$$
$$P\,(AB) \mathrel{\#} AB,\ P\,(AC) \mathrel{\#} AC,$$

und daher:

1. $\angle\ (A)\ P\ (B) = \angle\ ADB = \angle\ C$
2. $\angle\ (A)\ P\ (C) = \angle\ ADC = \angle\ B$
3. $\angle\ (B)\ P\ (C) = \angle\ BDC = \angle\ A$
4. $\angle\ (B)\ P\ (AB) = \angle\ ABD$
5. $\angle\ (C)\ P\ (AC) = \angle\ ACD.$

Daraus aber folgt, dass der Pol P in folgenden fünf Rotationsflächen liegen muss:

Erstens in der Rotationsfläche, welche durch Drehung des Kreisbogens (A) P^c (B) um die Linie (A) (B) erzeugt wird, unter der Voraussetzung, dass dieser Kreisbogen dem Peripheriewinkel (A) P^c $(B) = \angle\ C$ entspricht. Alsdann in der Rotationsfläche, welche durch Drehung des, dem Peripheriewinkel (A) P^b $(C) = \angle\ B$ entsprechenden Kreisbogens (A) P^b (C) um (A) (C), sowie in derjenigen, welche durch Drehung eines durch (B) und (C) gehenden, dem Peripheriewinkel $\angle\ A$ entsprechenden Kreisbogens um die Linie (B) (C) entsteht. Dabei muss ausserdem:

6. $(A)\ P^b = (A)\ P^c$

sein, weil diese beiden Linien im Raume in ein und dieselbe Linie zusammenfallen. Ferner liegt P in den beiden Rotationsflächen, die durch die Drehung der Kreisbogen (B) P^b (AB) und (C) P^c (AC), welche den Peripheriewinkeln (B) P^c $(AB) = \angle\ ABD$ und (C) P^b

$(AC) = \angle\, ACD$ entsprechen, um die Linien $(B)\ (AB)$ und $(C)\ (AC)$ entstehen.

Durch die drei ersten Rotationsflächen werden die zwischen den Linien AD, BD und CD liegenden Winkel $\angle\, A$, $\angle\, B$ und $\angle\, C$, durch die beiden letzten die Längenverhältnisse dieser Linien bestimmt.

Je zwei der zwei ersten und der zwei letzten Rotationsflächen schneiden einander in Kreisen, nämlich die Rotationsflächen $(A)\ P^c\ (B)$ und $(B)\ P^c\ (AB)$ in dem Kreise, welcher durch Drehung des Punktes P^c um die Linie $(A)\ (B)$, und die Rotationsflächen $(A)\ P^b\ (C)$ und $(C)\ P^b\ (AC)$ in dem Kreise, welcher durch Drehung des Punktes P^b um die Linie $(A)\ (C)$ entsteht. Der Punkt P muss mithin im Durchschnittspunkte dieser beiden Kreise liegen, was nur dann möglich ist, wenn, in Uebereinstimmung mit der sechsten Bedingung, die beiden Linien $(A)\ P^c$ und $(A)\ P^b$ gleich lang sind. Die Bedingung, dass P auch noch auf der fünften der oben genannten Rotationsflächen liegen muss, ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass die drei Linien $(B)\ (C)$, $(B)\ P^c$ und $(C)\ P^b$ miteinander ein Dreieck bilden müssen, dessen Winkel bei $P^c\ P^b$ gleich dem Winkel $\angle\, A$ ist. In der Figur 1, in welcher $(B)\ P^a = (B)\ P^c$ und $(C)\ P^a = (C)\ P^b$ gemacht wurde, stellt $(B)\ (C)\ P^a$ dieses Dreieck vor.

Nachdem hiedurch die Lage bezeichnet worden ist, welche der Pol P im Raume haben muss, ergiebt sich aus Folgendem diejenige der vier Punkte A, B, C, D. Der Punkt D kann, der Voraussetzung zufolge, auf den Punkt d gelegt werden. Die Punkte A, B, C liegen alsdann erstlich in drei Linien DA, DB, DC welche beziehungsweise mit den Linien $P\ (A)$, $P\ (B)$, $P\ (C)$ parallel sind, ausserdem aber noch in den drei Linien Pa, Pb und Pc, weil a, b, c die Polarprojektionen von A, B und C sein sollen. Die drei letztgenannten Punkte liegen also in den Durchschnittspunkten von DA mit Pa, von DB mit Pb und von Dc mit Pc. Sobald man P kennt ist es also leicht die vier Punkte A, B, C, D nach irgend einer der bekannten Methoden, z. B. durch orthogonale Projektionen, genau zu bestimmen und darzustellen.

6. Auf diese Weise bestimmt sich die Lage des Poles und der vier Punkte A, B, C, D zur Projektionsebene, wenn eine richtige Lage der drei Fluchtpunkte (A), (B) und (C) bekannt ist. Da sich diese Punkte aber nicht unter den gegebenen Grössen der Aufgabe befinden, so müssen sie zuerst aufgesucht werden, und die ganze Aufgabe ist als gelöst zu betrachten, sobald es gelungen ist, alle möglichen zusammengehörigen Lagen der drei Fluchtpunkte (A), (B), (C) zu bestimmen. Diese Bestimmung kann auf folgende Weise durchgeführt werden.

Es ist gezeigt worden, dass in Fig. 1 die oben angeführten sechs Bedingungen erfüllt sein müssen, wenn die Fluchtpunkte (A), (B) und (C) eine der Aufgabe genügende Lage besitzen. Man kann nun diesen Satz umkehren und behaupten: Wenn jenen sechs Bedingungen in Fig. 1 entsprochen ist, so befinden sich die genannten Fluchtpunkte in einer der Aufgabe genügenden Lage, und es ist mithin nun zu zeigen, auf welche Weise die Fig. 1 so hergestellt werden könne, dass sie jenen sechs Bedingungen entspricht. Man kann sich zu diesem Zwecke folgendes Verfahren eingeschlagen denken.

Man zeichne sich zuerst die gegebenen Winkel ADB und ADC mit den gegebenen Schenkelverhältnissen der drei Linien *AD*, *BD* und *CD* und verbinde die Endpunkte *A* und *B*, *B* und *C* miteinander. In den beiden hierdurch erhaltenen Dreiecken sind alsdann Winkel *ABD* und *ACD*, welche zur Herstellung von Fig. 1 verwendet werden müssen, enthalten.

Alsdann nehme man auf *da* oder auf der Verlängerung dieser Linie den Punkt (*A*) und auf *db* und *dc* oder den Verlängerungen dieser Linien die Punkte (*B*) und (*C*) willkührlich an und ziehe über (*A*) (*B*) einen Kreisbogen, welcher dem Peripheriewinkel *ADB* oder *C*, und über (*A*) (*C*) einen solchen, der dem Peripheriewinkel *ADC* oder *B* entspricht. Hierauf verlängere man die Linien (*A*) (*B*) und (*A*) (*C*) bis zu ihren Schnittpunkten (*AB*) und (*AC*) mit den Linien *ab* und *ac* oder den Verlängerungen derselben, und ziehe über den Linien (*B*) (*AB*) und (*C*) (*AC*) die zwei Kreisbogen, welche den Peripheriewinkeln *ABD* und *ACD* entsprechen. Die Schnittpunkte P^c und P^b dieser beiden Kreisbogen mit den beiden zuerst genannten verbinde man einerseits mit (*A*) und (*B*) andererseits mit (*A*) und (*C*). Die bis hierher ausgeführte Figur wird sodann den in Nro. 5 aufgestellten Bedingungen 1, 2, 4 und 5, noch nicht aber den Bedingungen 3 und 6 entsprechen.

Man lasse nun die Punkte (*A*) und (*B*) und den ganzen, mit denselben zusammenhängenden Theil der Figur unverändert bestehen, denke sich aber den Punkt (*C*) über die ganze Linie *dc* und ihre beiden unendlichen Verlängerungen hinbewegt und für jede Lage, die er während dieser Bewegung erhält, den Punkt P^b stets in gleicher Weise construirt, so wird die Länge (*A*) P^b alle möglichen, zwischen gewissen Grenzen liegenden Werthe durchlaufen. Liegt

(A) (P^c) ebenfalls zwischen diesen Grenzen, so wird mithin (A) P^b mindestens für eine Lage des Punktes (C) gleich (A) P^c werden, und damit die Bedingung 6 erfüllt sein. Man kann diese Lage von (C) mittelst einer Fehlerkurve finden, welche man erhält, wenn man die Differenz zwischen (A) P^c und (A) P^b jedesmal von (C) aus auf (A) (C) aufträgt, und zwar, je nachdem sie positiv oder negativ ist, in der Richtung (C) (A) oder in entgegengesetzter Richtung. Wo die durch diese Punkte erhaltene Kurve die Linie dc schneidet, da ist der gesuchte Punkt.

7. Construirt man nun aber aus den Linien (B) (C), (B) P^c und (C) P^b das Dreieck (B) (C) P^a, so wird die Bedingung 5, die Gleichheit der Winkel (B) P^a (C) und BDC, noch nicht erfüllt sein. Um auch dieser Anforderung noch zu genügen, denke man den Punkt (B) nach und nach auf alle Punkte der nach beiden Seiten unendlich verlängerten Linie db verlegt, und suche für jede Lage von (B) auf die soeben angegebene Weise diejenige Lage von (C) für welche (A) P^b = (A) P^c ist. Dabei wird der Winkel (B) P^a (C) alle, zwischen gewissen Grenzen liegenden Werthe durchlaufen, und liegt nun der gegebene Winkel $\angle A$ ebenfalls zwischen diesen Grenzen, so muss es mithin mindestens eine Lage des Punktes (B) und eine zugehörige Lage des Punktes (C) geben, welche allen sechs oben gestellten Bedingungen genügen, und durch deren Bestimmung daher eine Lösung der gestellten Aufgabe gefunden ist. Will man auch den Punkt (B) durch eine Fehlerkurve bestimmen, so kann es in der Weise geschehen, dass man nach jeder Bestimmung von (C) und P^a an die Linie (C) P^a bei P^a den gegebenen Winkel $\angle A$ aufträgt und den neuen

Schenkel desselben gleich der schon vorhandenen Linie P^a (B) macht. Da wo die, durch die Endpunkte dieser Schenkel gehende Kurve die Linie db schneidet, ist die gesuchte Stelle des Punktes (B).

8. Auf diese Weise wird derjenige Pol und die zugehörige Lage der Punkte A, B, C, D bestimmt, welche dem beliebig angenommenen Punkte (A) und den ihm zugehörigen Punkten (B) und (C) entsprechen, insofern ein solcher Pol überhaupt möglich ist. Um aber, wie es die gestellte Aufgabe fordert, alle denkbaren, der Aufgabe genügenden Pole zu finden, muss noch ein weiterer Schritt gethan werden: Es sind dieselben Construktionen, welche zur Bestimmung des Poles für den beliebig gewählten Punkt (A) ausgeführt werden, für alle Punkte der Linie ad und ihrer beiden, bis in's Unendliche fortgesetzten Verlängerungen zu wiederholen. Da kein Pol denkbar ist, welchem nicht ein irgendwo auf der Linie ad oder auf deren Verlängerungen liegender Fluchtpunkt (A) entspricht, so erhält man auf diesem Wege alle denkbaren Pole, welche der Aufgabe genügen, mithin die vollständige Auflösung der letztern.

Um eine klare Vorstellung von der Lage aller, der Aufgabe entsprechenden Pole zu erhalten, müssen daher die Ergebnisse der soeben beschriebenen Construktionen genauer untersucht werden. Diese Construktionen bilden nur den Weg zu dem angestrebten Ziele; eine genauere Kenntniss dieses Zieles selbst werden die folgenden Betrachtungen vermitteln.

9. Die erste hier hervorzuhebende Eigenthümlichkeit der beschriebenen Construktionen besteht darin, dass sie nicht bloss für vereinzelte, sondern stets für eine Reihe unmittelbar aufeinander fol-

gender Fluchtpunkte Pole liefern. Wenn nämlich drei Fluchtpunkte (A), (B) und (C) gefunden worden sind, für welche ein Pol existirt, so giebt es im Allgemeinen auch drei unmittelbar auf jene folgende oder unendlich nahe bei ihnen befindliche Fluchtpunkte, für welche ebenfalls ein der Aufgabe entsprechender Pol besteht. Denn, wenn für eine bestimmte Lage von (A) und (B) ein zugehöriges (C) möglich sein soll, so muss die einzige Bedingung erfüllt sein, dass die Länge $(A)\ P^c$ zwischen den zwei äussersten Grenzwerthen liege, welche nach Nr. 6 die Länge (A) P^b annehmen kann. Diese Grenzen werden im Allgemeinen zwei um eine endliche Grösse von einander verschiedene Werthe haben. Denkt man sich nun zuerst nur den Punkt (A) unendlich wenig auf ad, z. B. nach (A) verschoben, so wird jetzt sowohl der Werth der Länge $(A)\ P^c$ als derjenige jener beiden Grenzen nur eine unendlich kleine Veränderung erleiden, und der erste wird daher auch jetzt wieder zwischen den beiden letztern liegen. Es wird daher auch jetzt wieder ein dem neuen Punkte $(A)_1$ und dem Punkte (B) entsprechendes (C) gefunden werden können, das mit $(C)_1$ bezeichnet werden mag. Den Punkten $(A)_1$ und $(C)_1$ werden zwei, ebenfalls unendlich wenig von P^c und P^b verschiedene Punkte $P_1{}^c$ und $P_1{}^b$ entsprechen. Lässt man sodann, ohne dass sich $(A)_1$ verändert, (B) wieder nach und nach über alle möglichen Punkte der Linie db und ihrer Verlängerungen gleiten, so erhält man eine Reihe von Lagen der Punkte $(C)_1$, $P_1{}^c$ und $P_1{}^b$, welche in jeder Beziehung nur unendlich wenig von der analogen, für den Punkt (A) nach der Angabe von Nr. 7 erhaltenen Reihe verschieden ist und daher zwei

Grenzwerthe für den Winkel $(AB)_1 P_1^a (AC)_1$ ergiebt, welche auch jetzt wieder den Werth des Winkels $\angle A$ zwischen sich enthalten. Man erhält mithin auch für den Punkt $(A)_1$ eine Lage $(B)_1$ und $(C)_1$ der zwei andern Fluchtpunkte, welche der Aufgabe genügen. Dasselbe lässt sich auf ähnliche Weise für alle folgenden Lagen nachweisen, welche man dem Fluchtpunkte (A) zu beiden Seiten seiner ersten Lage auf *ad* anweisen kann, wobei indessen denkbar ist, dass gewisse Grenzpunkte auf *ad* nicht überschritten werden dürfen, wenn noch reelle Ergebnisse möglich sein sollen.

Da ferner einer jeden Gruppe von drei zusammengehörigen Fluchtpunkten (A), (B), (C), $(A)_1$, $(B)_1$, $(C)_1$ . . . . stets mindestens ein Pol im Raume entspricht, so folgt aus dem Gesagten, dass es nicht bloss einen, oder einige vereinzelte Pole im Raume giebt, welche der gestellten Aufgabe genügen, sondern dass, wenn die Aufgabe überhaupt lösbar ist, deren stets unendlich viele denkbar sind, welche in der Art aufeinander folgen, dass ein jeder von ihnen unendlich nahe bei einem zunächst vorhergehenden und einem zunächst folgenden liegt. Die sämmtlichen, der Aufgabe entsprechenden Pole bilden also im Raume befindliche Linien, welche mit dem Namen Pollinien bezeichnet werden mögen.

Es wird sich mithin jetzt darum handeln, die Eigenschaften dieser Pollinien auszumitteln, und namentlich auch nachzuweisen, ob solche Linien in allen oder nur in einigen, und in welchen Fällen sie möglich sind.

10. Zunächst muss folgende Eigenthümlichkeit der Pollinien bemerkt werden. Wenn in Fig. 1 die

Fluchtpunkte (A), (B), (C) eine der Aufgabe genügende Lage besitzen, so kann der zugehörige Pol gefunden werden, indem man die Dreiecke (A) (B) P^c, (A) (C) P^b und (B) (C) P^a um die Linien (A) (B), (A) (C) und (B) (C) so umdreht, dass die Spitzen P^c, P^b und P^a auf der einen, z. B. der vordern oder obern Seite der Zeichnungs- oder Projektionsebene, oder auch so, dass sie auf der entgegengesetzten Seite derselben zusammentreffen. Jeder der beiden Punkte P, welche man durch diese beiden Drehungen erhält, ist ein der Aufgabe genügender Pol. Diese beiden Pole haben überdiess eine symmetrische Lage zur Projektionsebene. Da nun diess von jeder Gruppe je dreier zusammengehöriger Fluchtpunkte und dem ihnen entsprechenden Pole gilt, so gilt es auch von den ganzen Pollinien. Die Pollinie, welche einer gegebenen Aufgabe entspricht, besteht daher stets aus zwei kongruenten, zu beiden Seiten der Projektionsebene und symmetrisch zu derselben liegenden Hälften. Manchmal ist es vorzuziehen, jede dieser beiden Hälften als eine besondere Linie aufzufassen, und dann kann man sagen: alle Pollinien kommen stets paarweise vor, und die beiden Hälften eines jeden Linienpaares liegen symmetrisch zu beiden Seiten der Projektionsebene.

Es folgt hieraus unmittelbar, dass die beiden Hälften eines Pollinienpaares entweder ganz getrennt, einander schneidend oder in einander übergehend gedacht werden können. Die Durchschnitts- und Uebergangspunkte der beiden Hälften müssen stets auf der Projektionsebene liegen und die Tangente an die Uebergangspunkte muss senkrecht zu dieser Ebene stehen.

Ebenso wie die Pollinien, sind auch die einer jeden Aufgabe entsprechenden Lagen der vier Punkte *A*, *B*, *C*, *D* im Raume stets paarweise vorhanden, und die beiden, einem Paare zugehörenden Lagen sind zu beiden Seiten der Projektionsebene, in symmetrischer Stellung zu derselben.

Den wesentlichsten Aufschluss über die Natur der Pollinien erhält man durch die Untersuchung der Eigenschaften, welche sie in verschiedenen Entfernungen von den gegebenen Punkten *a*, *b*, *c*, *d* und von der Projektionsebene besitzen.

11. Man nehme zuerst an, der Fluchtpunkt (*A*) befinde sich auf der Linie *ad* unendlich nahe beim Punkte *d*, und untersuche die Lage der diesem Falle entsprechenden Pole. Fig. 1 verändert sich alsdann in folgender Art. Der Punkt (*A*) fällt nun zwischen *d* und *a*, unendlich nahe zu *d*. Die Punkte (*B*) und (*C*) liegen im Allgemeinen ebenfalls unendlich nahe bei *d* zwischen *bd* und *cd*, denn die Strecken *d* (*B*) und *d* (*C*) wären nur in dem speziellen Falle endlich oder unendlich gross, wenn (*A*) (*B*) und (*A*) (*C*) parallel zu *db* und *dc* lägen. Die Bogen (*A*) P^c (*B*), (*A*) P^b (*C*) und (*B*) P^a (*C*) werden daher zwar immer noch den gegebenen Peripheriewinkeln ∠ *A*, ∠ *B* und ∠ *C* entsprechen, aber ihre Sehnen (*A*) (*B*), (*A*) (*C*), (*B*) (*C*) und mithin auch ihre Radien sind jetzt unendlich klein.

Die Linien (*B*) (*AB*) und (*C*) (*AC*), welche als Sehnen der Kreise (*B*) P^c (*AB*) und (*C*) P^b (*AC*) auftreten, behalten im Allgemeinen einen endlichen Werth, und daher bleiben auch die Radien jener Kreise endlich.

Hieraus folgt, dass jetzt die Bogen (*B*) P^c und (*C*) P^b der Kreise (*B*) P^c (*AB*) und (*C*) P^b (*AC*) unendlich kleine Theile von endlichen Kreislinien sind, und mithin als unendlich kleine Gerade, oder als Sehnen der unendlich kleinen Kreise (A) P^c (B) und (A) P^b (C), mithin als identisch mit den Geraden (B) P^c und (C) P^b betrachtet werden können. Da ferner die Punkte P^c und P^b unendlich nahe bei (B) und (C) liegen, (B) (AB) und (C) (AC) aber einen endlichen Werth beibehalten so sind jetzt die Geraden, (AB) P^c und (AC) P^b parallel zu (A) (B) und (A) (C), und es sind daher die Winkel (A) (B) P^c und (A) (C) P^b gleich den Winkeln (B) P^c (AB) und (C) P^b (AC) oder ABD und ACD. Die Dreiecke (A) (B) P^c, (A) (C) P^b und (B) (C) P^a von Fig. 1 sind daher jetzt geometrisch ähnlich den Dreiecken ABD, ACD und BCD zwischen den gegebenen vier Punkten des Raumes, und die unendlich kleine dreiseitige Pyramide, deren Basis das Dreieck (A) (B) (C) in Fig. 1 und deren Spitze der zugehörige Pol P ist, ist geometrisch ähnlich der dreiseitigen Pyramide, deren Basis das Dreieck ABC und deren Spitze der Punkt D ist.

Es ist mithin jetzt leicht, die richtige Lage der Punkte (A), (B), (C) und des zugehörigen Poles zu bestimmen. Man zeichne nämlich die unendlich kleine Stelle (A) (B) (C) d von Fig. 1 in beliebig grossem, endlichem Massstabe, indem man vorerst die Richtungen da, db, dc, Fig. 2a, andeutet; alsdann zeichne man das Dreieck ABC, ebenfalls in beliebigem Massstabe, und trage dasselbe in der Weise auf die Figur, dass die Ecken A, B, C auf die Linien da, db, dc oder deren Verlängerungen fallen.

Die Punkte, auf welche jetzt die Ecken A, B, C zu liegen kommen, sind die gesuchten Fluchtpunkte (A), (B), (C). Macht man ausserdem noch die Dreiecke (A) (B) P^c und (A) (C) P^b gleich den gegebenen Dreiecken ABD und ACD, und dreht man dieselben um die Linien AB und AC, bis die Punkte P^b und P^c sich in einem Punkte treffen, dessen orthogonale Projektion P_1 ist, so ist damit auch der Pol P bestimmt. Wählt man irgend eine Linie XY als Projektionsaxe orthogonaler Projektionen, so ist es leicht die zweite orthogonale Projektion P_2 des Poles zu zeichnen.

Der zweite, symmetrisch liegende Pol hat die gleiche erste Orthogonalprojektion P_1, dagegen die zweite Projektion P_2', indem $P_2'm = P_2 m$ gemacht wird.

Zieht man noch die Linien $d_2 A_2$, $d_2 B_2$, $d_2 C_2$ parallel zu $P_2(A)_2$, $P_2(B)_2$, $P_2(C)_2$, und $P_2 A_2$, $P_2 B_2$, $P_2 C_2$ parallel zu der zweiten Projektion von da, db, dc, d. h. parallel zu XY, so erhält man auch die zweiten Orthogonalprojektionen A_2, B_2, C_2, der drei Punkte A, B, C, deren erste Projektionen in den Verlängerungen von ad, bd, cd, bei A_1, B_1 und C_1 liegen. Die gleichen ersten Projektionen, aber auf der entgegengesetzten Seite von XY befindliche, hier der Vereinfachung der Figur wegen nicht gezeichnete zweite Projektionen, erhält man für die dem zweiten Pole $P_1 P_2$ entsprechende Lage der Punkte A, B, C.

Denkt man sich endlich die ganze Figur wieder in den unendlich kleinen Massstab zurückgeführt, so dass der Punkt $d d_1$ unverändert und alle Linien parallel mit ihrer jetzigen Richtung bleiben, so erhält man die Lage des Poles und der vier Punkte für den Fall, dass (A) unendlich nahe bei d liegt.

12. Man gelangt mittelst dieser Ergebnisse zur Kenntniss folgender Eigenschaften der in unmittelbarer Nähe des Punktes d befindlichen Pole oder Pollinien und der zugehörigen Lagen der Punkte A, B u. C:

Vor Allem muss beachtet werden, dass die in Nr. 11 beschriebenen Construktionen unter allen Umständen, bei jeder beliebigen Lage der Punkte a, b, c, d, sowie bei jeder beliebigen gegenseitigen Stellung der Punkte A, B, C, D möglich sind, und hieraus folgt zunächst, dass es in unmittelbarer Nähe des Punktes d stets Pole giebt, welche jeder Aufgabe entsprechen. Zufolge Nr. 10 muss also durch den Punkt d mindestens ein Paar Pollinien gehen.

Bei genauerer Betrachtung des Weges, auf welchem Fig. 2_a erhalten wurde, bemerkt man aber, dass die Zahl der durch d gehenden Paare von Pollinien grösser ist. Das Dreieck A, B, C kann nämlich mit seinen Ecken in verschiedener Weise auf die Linien da, db und dc gelegt werden. Man erhält durch folgendes Verfahren die verschiedenen Stellungen, deren es fähig ist.

Wenn in Fig. 2_a der Punkt (A) zwischen d und a, der Punkt (B) zwischen d und b liegt, so fällt d auf den Scheitel des Winkels adb; befindet sich dagegen (B) auf der Verlängerung von bd, jenseits des Punktes d, so liegt dieser letzt genannte Punkt auf dem Scheitel des Winkels $\pi - adb$. Man erhält daher den geometrischen Ort des Punktes d auf der Ebene des Dreiecks ABC Fig. 3 mit Bezug auf die Punkte A und B, wenn man über AB zwei Kreisbogen Ad_1B und Am_1B zieht, von denen der eine dem Peripheriewinkel adb und der andere dem Peripheriewinkel $\pi - adb$ entspricht, und welche auf der einen Seite der Linie AB liegen, und wenn man ausserdem, da der Punkt d sich auf jeder der beiden Seiten von AB befinden kann, zwei andere, aber gleich grosse Kreisbogen $Ad_1'B$ u. $Am_1'B$ zieht, welche auf der entgegengesetzten Seite von AB liegen.

Ganz dasselbe gilt für den geometrischen Ort des Punktes d mit Bezug auf die Punkte A und C und die Winkel adc und $\pi - adc$, und dieser Ort besteht daher aus den Kreisbogen Ad_1C und $Ae_1'C$, welche dem Peripheriewinkel adc, und aus den Kreisbogen An_1C unb $An_1'C$, welche dem Peripheriewinkel $\pi - adc$ entsprechen.

Man sieht sofort, dass die Kreisbogen Ad_1B und $Am_1'B$, $Ad_1'B$ und Am_1B u. s. f. stets vollständige Kreise mit einander bilden.

Der Punkt d selbst kann mithin nur in den Durchschnittspunkten der über AB und der über AC gezogenen Kreise liegen, deren es, ausser dem Punkte A, viere giebt, die mit d_1, d_1', n_1 und n_1' bezeichnet sind. Zieht man von diesen Punkten Linien nach A, B und C, so schliessen dieselben zwischen sich die Winkel adb und adc oder deren Ergänzungen zu π ein, und zwar in allen Anordnungen, deren diese Winkel fähig sind. Nun sind aber zweierlei Anordnungen der Winkel adc und $\pi - adc$ zu den Winkeln adb und $\pi - adb$ denkbar: entweder liegt $\angle\, adc$ auf der entgegengesetzten, und $\angle\, \pi - adc$ auf der gleichen Seite der Linie ad wie der Winkel adb, oder umgekehrt. Zwei von den vier Punkten d_1, d_1', n_1, n_1' müssen daher der einen, zwei andere der andern dieser beiden Anwendungen entsprechen. Da aber dadurch, dass die vier Punkte a, b, c, d gegeben sind, auch eine dieser Anordnungen gegeben, die andere ausgeschlossen ist, so können von den vier Punkten d_1, d_1', n_1, n_1' nur zwei der gegebenen Aufgabe entsprechen, und nur diese sind daher zugleich diejenigen Stellen des Punktes d, welche der Aufgabe genügen. Es ist leicht, in jedem einzelnen Falle die eine Hälfte dieser Punkte von der andern zu unterscheiden; so sind z. B. in Figur 3 die brauchbaren Punkte mit d_1 und d_1', die andern mit n_1 und n_1' bezeichnet, denn die Winkel Ad_1B und Ad_1C, welche gleich adb und adc sind, liegen, wie in Fig. 2a, auf verschiedenen, die Winkel $Ad'B$ und $Ad'C$, welche gleich adb und $\pi - adc$ sind, auf derselben Seite von Ad_1 und Ad_1', während die gleich grossen Winkel $An_1'B$ und $An_1'C$ oder deren Ergänzungen zu π, sowie An_1B und An_1C die entgegengesetzte Lage zu An_1' und An_1 haben.

Man erhält daher stets zwei, von einander verschiedene Stellungen des Dreieckes ABC, indem man entweder die Längen d_1A, d_1B, d_1C, wie in Fig. 2a, oder die Längen $d_1'A$, $d_1'B$, $d_1'C$ wie in Fig. 2b, von d aus auf dA, dB, dC, in der gleichen Anordnung wie in Fig. 3, aufträgt.

Man kann ferner die Strecken d_1A, d_1B und d_1C von d in Fig. 2a auch auf die Verlängerungen von da, db und dc auftragen, und dadurch eine, der Lage $(A)\,(B)\,(C)$ in gewissem Sinne entgegengesetzte, und scheinbar neue Stellung des Dreieckes ABC erhalten; allein dieselbe führt auf keine neue Pollinie, sondern nur auf die, jenseits der Projektionsebene zu denkende Fortsetzung derjenigen, welche der Stellung $(A)\,(B)\,(C)$ entspricht. Aehnlich verhält es sich mit der aus dem Punkte d_1' abgeleiteten Lage des Dreieckes ABC.

Es folgt daher aus dem soeben Gesagten, dass durch den Punkt d stets zwei Paare Pollinien gehen.

13. Ueber die Richtung, welche diese beiden Paare von Pollinien in d haben, geben die Tangenten, welche man an dieselben ziehen kann, vollständigen Aufschluss. Hat man in Fig. 2a die Punkte (A), (B),

(C) und den Pol P in beiden Projektionen in endlichem Massstabe dargestellt, so ist die Verbindungslinie des Poles P mit dem Punkte d diese Tangente. Daher sind d_2P_2 und d_2P_2' die einen Projektionen, und ist d_1P_1 die gemeinschaftliche andere Projektion der Tangenten für das erste Paar der durch d gehenden Pollinien. Die Tangenten des andern Paares werden auf ähnliche Art aus der zweiten Stellung abgeleitet, welche die Punkte (A), (B), (C) und P erhalten können.

Man sieht daraus, was sich übrigens zufolge Nr. 10 von selbst versteht, dass die beiden Tangenten der dem gleichen Paare zugehörenden Pollinien in d den gleichen Winkel mit der Projektionsebene bilden und in der gleichen senkrechten Ebene zu derselben liegen. Da ferner diese Tangenten die Projektionsebene in d im Allgemeinen schneiden, so gilt dasselbe auch von den beiden Pollinienpaaren. Eine Ausnahme hievon findet nur dann statt, wenn der Pol P in der Ebene der Punkte $(A)(B)(C)$, oder D in der Ebene von ABC liegt, d. h. wenn alle vier gegebenen Punkte im Raume der gleichen Ebene angehören, und wenn nicht zugleich in Fig. 2 der Punkt P mit d zusammmenfällt.

14. Eine besondere Aufmerksamkeit verdient die Lage der vier Punkte A, B, C, D für die bei d liegenden Pole insofern, als die Ebene der vier Punkte ABC stets parallel zur Projektionsebene liegt. Dieses folgt daraus, dass in Fig. 2 die Projektionen A_2, B_2, C_2 in einer zu xy parallelen Geraden liegen. Aus dem unendlich kleinen Massstabe, in welchem man in d die Pyramide $ABCD$ für die Pole, welche bei dem Punkte d liegen, ausgeführt denken muss, kann man die Figur leicht in einen endlichen überführen, indem

man sie in der Weise vergrössert denkt, dass ihre Gestalt stets mit der ursprünglich gegebenen geometrisch ähnlich bleibt und die Punkte A, B, C, D stets auf den Geraden $P_1 P_2 A_1 A_2$, $P_1 P_2 B_1 B_2$, $P_1 P_2 C_1 C_2$ und $P_1 P_2 dd_2$ liegen bleiben. Auf diese Weise ist es namentlich leicht, einen der drei Punkte A, B, C mit einem beliebigen Punkte der Linien da, db, dc zusammenfallen zu lassen. Für alle endlichen Entfernungen von d fallen nämlich die Linien $P_1 P_2 A_1 A_2$ u. s. f. mit den Linien da, db, dc zusammen, da jene mit diesen parallel sind und unendlich nahe bei ihnen liegen. Man kann daher leicht die Pyramide soweit vergrössern, bis einer der drei Punkte A, B, C, z. B. A auf der Linie $P_1 P_2 A_1 A_2$ unendlich nahe zu einem beliebigen Punkte (a) dieser Linie, d. h. bis zum Punkte (a) selbst gelangt ist.

Fasst man alles über die Lage der vier Punkte A, B, C, D Gesagte zusammen, so kann man nun Folgendes behaupten: Wenn der Pol in d liegt, so befinden sich die vier Punkte A, B, C, D auf den Linien da, db, dc und auf einer der durch d gehenden Tangenten zu den Pollinien in beliebigen, aber in dem gegebenen Verhältnisse zu einander stehenden Entfernungen von einander. Für jede Grösse der Pyramide $ABCD$ gibt es zwei Paar Stellungen, welche der Aufgabe genügen, und für welche mithin die Punkte a, b, c, d als Polarprojektionen von A, B, C, D mit Bezug auf den Pol d betrachtet werden hönnen.

15. Die Punkte A, B, C, D und a, b, c, d haben bei der hier besprochenen Frage unter sich ganz gleiche Bedeutung; keiner der vier ersten zeichnet sich seinem Werthe nach irgend wie von den übrigen aus, und dasselbe Verhältniss findet auch unter den

letzten vier Punkten statt. Wenn bisher die Punkte *D* und *d* dadurch eine andere Bedeutung erhielten als die übrigen Punkte, dass sie als zusammenfallend angenommen wurden, so bewirkte diese Annahme nur grössere Einfachheit bei der Behandlung der Frage, und die dadurch bewirkte Veränderung ihrer Bedeutung ist daher nur formell. Man könnte ganz ebenso gut die Punkte *A* und *a*, *B* und *b*, *C* und *c* als zusammenfallend annehmen, ohne dadurch an den bisher erhaltenen Ergebnissen irgend etwas Wesentliches zu ändern.

Daraus folgt, dass alle Ergebnisse, welche bisher für die Punkte *d* und *D* erhalten worden sind, ganz analog auch für die Punkte *a*, *b*, und *c*, *A*, *B*, und *C* gültig sind. Man kann daher nun Folgendes behaupten:

> Durch jeden der vier Punkte *a*, *b*, *c*, *d* gehen stets zwei Paare Pollinien, deren Tangenten in diesen Punkten durch die in Nro. 11 bis 13 beschriebene Konstruktion bestimmt werden.
>
> In jedem dieser vier Punkte kann mithin ein Pol angenommen werden.
>
> Von den vier Punkten *A*, *B*, *C*, *D*, deren Polarprojektionen *a*, *b*, *c*, *d* sind, liegt derjenige, auf dessen Projektion der Pol selbst angenommen wurde, ausserhalb der Projektionsebene, die drei andern liegen dagegen auf denjenigen Linien der Projektionsebene, welche man vom Pole aus durch ihre Projektionen ziehen kann. Für jeden der vier Pole gibt es vier verschiedene Lagen der vier Punkte *A*, *B*, *C*, *D*; je zwei und zwei dieser Lagen sind symmetrisch zur Projektionsebene und bilden ein Paar von Punktsystemen.

16. Hieran knüpft sich von selbst die Frage: Ob es wohl, ausser den gegebenen Punkten a, b, c, d noch andere Punkte der Projektionsebene gebe, welche als Pole betrachtet werden können, in welchen also die Pollinien die Projektionsebenen schneiden oder berühren?

Man nehme, um diese Frage zu beantworten, an, irgend ein Punkt x der Projektionsebene, welcher nicht mit einem der vier Punkte a, b, c, d zusammenfalle, sei ein Pol. Alsdann würden alle vier projizirenden Linien xa, xb, xc, xd in der gleichen Ebene liegen, und die Punkte A, B, C, D, welche auf diese Projizirenden fallen, müssten sich daher ebenfalls in ein und derselben Ebene befinden, was im Allgemeinen nicht der Fall ist, Man kann daher behaupten:

> Die Pollinien treffen die Projektionsebene nur in den Punkten a, b, c, d, sonst an keiner andern Stelle. Eine Ansnahme davon ist nur möglich, wenn die vier Punkte A, B, C, D selbst in einer Ebene liegen.

17. An die Frage über die Natur der Pollinien in unmittelbarer Nähe bei der Projektionsebene mag sich diejenige über ihre Eigenschaften in unendlicher Entfernung von derselben und über die zugehörige Lage der Punkte A, B, C, D anschliessen. Man denke sich zu diesem Zwecke die Fig. 1 nicht, wie in Nr. 11, unendlich vergrössert, sondern unendlich verkleinert gezeichnet. Die Linien da, db, dc behalten in dieser unendlich verkleinerten Figur ihre Richtung unverändert bei, aber die Punkte a, b und c fallen jetzt mit d zusammen. Die Linien ab, ac, bc, welche ebenfalls ihre Richtung beibehalten, gehen mithin jetzt durch den Punkt d. Man erhält daher jetzt Fig. 4,

in welcher $d(a)$, $d(b)$, $d(c)$ die Verlängerungen von da, db, dc, die Linien $d(ab)$ und $d(ac)$ die Verlängerungen von ab und ac darstellen. Nun nehme man wieder, wie in Fig. 1, die Punkte (A), (B), (C) auf den Linien $d(a)$, $d(b)$, $d(c)$ beliebig an und construire, ganz wie dort, die Dreiecke $(A)(B)P^c$ und $(A)(B)P^b$. Diese Dreiecke lege man zunächst so, dass der Winkel $(A)P^c(B)$ links von der Linie $P^c(A)$, und der Winkel $(A)P^b(C)$ rechts von der Linie $P^b(A)$, erscheint, wenn man diese Linien in den Richtungen von P^c nach (A) und von P^b nach (A) betrachtet. Die Figur enthält selbst diese Lage der beiden Dreiecke. Alsdann denke man sich den Punkt (B) nach und nach auf alle Punkte der Linie $d(b)$ und ihrer Verlängerung jenseits dem Punkte d gebracht, und für jede dieser Stellungen die Lage von P^c bestimmt, so bilden alle diese Lagen des Punktes P^c eine zusammenhängende krumme Linie dPP_1. Von dieser Linie kommen hier nur zwei Eigenschaften in Betracht, nämlich dass sie geschlossen ist und durch den Punkt d geht. Geschlossen ist sie, weil auch der Punkt (B), indem er von d nach der Richtung $d(b)$ in's Unendliche fortgeht und auf der andern Hälfte der Linie aus unendlicher Ferne wieder nach d zurückkehrt, eine in sich selbst zurückkehrende, ununterbrochene Bewegung macht; durch d aber geht die Linie, weil für den Fall, dass (B) auf d fällt, $(B)(AB)$ und mithin auch $(B)P^c$ gleich Null ist. Wenn man ebenso den Punkt (C) über die ganze Linie $d(c)$ und ihre Verlängerung hinbewegt und alle zugehörigen Lagen des Punktes P^b bestimmt denkt, so bilden auch diese eine geschlossene und durch den Punkt d gehende krumme Linie dP^bP_1.

Diese beiden Linien werden sich daher ausser dem Punkte d noch mindestens in einem andern Punkte P_1 schneiden müssen.

Denkt man sich jetzt die Punkte P^c und P^b nach P_1 gebracht und zeichnet die zugehörigen Punkte (B) und (C), welche nach $(B)_1$ und $(C)_1$ fallen mögen, so sind die beiden Winkel $(A)\,P^c\,(B)$ und $(A)\,P^b\,(C)$ jetzt nach $(A)\,P_1\,(B)_1$ und $(A)\,P_1\,(C)_1$ gelangt; und da der erste immer noch links, der zweite rechts von $P_1\,(A)$ liegt, so werden sie nicht theilweise auf einander fallen, sondern sie liegen vielmehr auf den verschiedenen Seiten von $P_1\,(A)$ an einander.

Bildet man endlich aus den Linien $(B)_1\,(C)_1$, $(B)_1\,P_1$ und $(C)_1\,P_1$ ein Dreieck, wie in Fig. 1 aus den Linien $(B)\,(C)$, $(B)\,P^c$ und $(C)\,P^b$, so ist dieses Dreieck dasselbe mit dem Dreiecke $(B)_1\,(C)_1\,P_1$ selbst, und der Winkel $(B)_1\,P_1\,(C)_1$ oder $\angle A$ ist jetzt gleich $\angle\,(B)_1 P_1\,(A) + \angle\,(C_1)\,P_1\,(A) = \angle B + \angle C$. Wäre $\angle B + \angle C > \pi$, so erhielte man für $\angle A$ den Werth $2\pi - (\angle B + \angle C)$. Dieser Werth des Winkels A ist aber der grösste, welcher möglich ist, weil ein noch grösserer Winkel A mit den gegebenen Winkeln B und C keine körperliche Ecke bei D mehr bilden könnte. $(B)_1$ und $(C)_1$ sind also diejenigen Stellungen von (B) und (C), für welche, bei gegebenen Werthen der Winkel B und C, der Winkel A den grössten möglichen Werth erhält.

18. Man denke sich ferner, das Dreieck $(A)\,(B)\,P^c$ werde so weit um $(A)\,(B)$ gedreht, bis seine Ebene mit der Projektionsebene irgend einen zwischen o und $\frac{1}{2}\pi$ liegenden Winkel einschliesse. Denkt man sich auch jetzt wieder alle Lagen von P^c für alle Stellungen von (B) bestimmt, indem man stets die eben beschriebene Lage des Dreieckes $(A)\,(B)\,P^c$ zur Pro-

jektionsebene festhält, so bilden die sämmtlichen Lagen des Punktes P^c wiederum eine geschlossene und durch den Punkt d gehende Kurve, welche aber nicht mehr auf der Projektionsebene, sondern, mit Ausnahme des Punktes d, über derselben liegt.

Eine analoge Kurve liefert der Punkt P^b, wenn man voraussetzt, dass auch das Dreieck (A) (C) P^c den nämlichen Winkel mit der Projektionsebene bilde.

Die beiden orthogonalen Projektionen dieser Kurven, welche ebenfalls geschlossene Linien sind und durch d gehen, werden sich in diesem Punkte und ausserdem ebenfalls noch in einem zweiten schneiden, welcher aber im Allgemeinen nicht zugleich die Projektion eines Schnittpunktes der beiden im Raume befindlichen Kurven sein wird. Vielmehr wird der entsprechende Punkt einer derselben, z. B. der durch P^b gebildeten Kurve, weiter von der Projektionsebene entfernt sein, als der auf der gleichen orthogonal Projizirenden liegende Punkt der andern Kurve. Lässt man aber den Punkt P^b seine Kurve bilden, indem man den Winkel, den das Dreieck (A) (C) P^b mit der Projektionsebene macht, immer kleiner und kleiner und endlich gleich Null annimmt, so gelangt diese Kurve wieder auf die Projektionsebene selbst, in die auf Fig. 4 gezeichnete Lage $d\,P^b\,P_1$, und wird auch jetzt die Projektion der durch den Punkt P^c gebildeten und unverändert gebliebenen Kurve in d, und ausserdem noch in einem andern Punkte schneiden.

Jetzt aber ist der diesem Schnittpunkte entsprechende Punkt der durch P^b gebildeten Kurve auf der Projektionsebene selbst, also näher bei derselben, als der auf der gleichen Projizirenden liegende Punkt der durch P^c gebildeten Kurve.

Es muss daher einen Neigungswinkel des Dreieckes (A) (C) P^b zur Projektionsebene geben, für welchen diejenigen Punkte der im Raume befindlichen Kurven welche dem Schnittpunkte ihrer Projektionen entsprechen, gleich weit von der Projektionsebene entfernt sind und mithin zusammenfallen, und dieser Neigungswinkel ist, bei der beispielsweise gemachten Voraussetzung, kleiner als der entsprechende Winkel des Dreieckes (A) (B) P^c.

Für diese Lage der Dreiecke (A) P^c (B) und (A) P^b (C) hat der Winkel A bereits einen andern, kleinern Werth, als in dem oben besprochenen ersten Falle.

19. Nichts hindert, diese Operationen für alle Winkel zu wiederholen, welche das Dreieck (A) P^c (B) mit der Projektionsebene bilden kann. Dieser Winkel kann daher zunächst bis zu $\frac{1}{2}\pi$, dann aber auch über diesen Werth hinaus bis zum Werthe π vergrössert werden. Für alle zwischen o und π liegenden Werthe dieses Neigungswinkels wird es also stets einen Neigungswinkel des Dreieckes (A) P^b (C) geben, für welchen bei einer gewissen Lage der Punkte (B) und (C) die Punkte P^c und P^b zusammenfallen, und dieser Neigungswinkel ist stets kleiner als der entsprechende des Dreieckes (A) P^c (B). Seinen grössten Werth hat er, wenn der Neigungswinkel von (A) P^c (B) gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist; er nimmt dagegen wieder ab und durchläuft die frühern Werthe bis zu Null, wenn der letzgenannte Winkel von $\frac{1}{2}\pi$ bis π zunimmt. In diesem letzten Falle liegt das Dreieck (A) P^c (B) wieder auf der Projektionsebene, wie in dem in Nro. 17 be-

schriebenen Falle, jedoch mit dem Unterschiede, dass sich der Winkel $(A)\ P^c\ (B)$ jetzt nicht mehr auf der linken, sondern auf der rechten Seite der Linie $P^c(A)$ befindet. Auch der Winkel $(A)\ P^b\ (C)$ liegt jetzt wieder auf der Projektionsebene, ohne aber auf die andere Seite der Linie $P^b\ (A)$ gelangt zu sein, da er, nachdem er seinen grössten Werth erreicht hatte, wieder rückwärts die frühern Werthe bis zu Null durchlief. Der Punkt P_2, in welchem die beiden Punkte P^b und P^c in diesem Falle zusammentreffen, liegt daher einerseits wieder auf der Kurve $d\,P^b\,P_1$, andrerseits auf der Kurve, welche durch alle Lagen des Punktes P^c gebildet wird, wenn man (B) über die ganze Linie $d\ (b)$ und ihre Verlängerungen hinbewegt, das Dreieck $(A)\ P^c\ (B)$ aber an die andere Seite von $(A)\ (B)$ legt, so dass der Winkel $(A)\ P^c\ (B)$ stets rechts von der Linie $P^c\ (A)$ liegt.

Bezeichnet man die dem Punkte P_2 entsprechende Lage von (B) und (C) mit $(B)_2$ und $(C)_2$, und konstruirt man auch für diesen Fall aus den Linien $(B)_2\ (C)_2$, $(B)_2 P^c$ und $(C)_2 P^b$ ein Dreieck, so ist dasselbe identisch mit dem Dreiecke $(B)_2\,(C)_2\,P_2$; der bei P_2 befindliche Winkel $(B)_2\,P_2\,(C)_2$ oder $\angle\ A$ dieses Dreieckes aber ist jetzt gleich $\angle\ (B_2)P_2 A - \angle\ (C)_2 P_2 A = \angle\ B - \angle\ C$. Dieser Werth des Winkels A ist aber der kleinst mögliche, wenn die Winkel A, B und C die drei Kantenwinkel eines körperlichen Dreieckes, oder einer dreiseitigen Pyramide sein sollen.

Da nun der erste Fall, in welchem der Winkel A den grösst möglichen Werth $(B)_1\,P_1\,(C)_1$ hatte, ganz allmählig in den zweiten, in welchem jener Winkel den kleinst möglichen Werth $(B)_2\,P_2\,(C)_2$ erhielt, übergeführt werden konnte, so gingen auch diese beiden Werthe selbst allmählig in einander über. Der Winkel A nahm daher alle Werthe an, deren er fähig ist, mithin auch denjenigen, welcher gegeben ist.

Es folgt hieraus, dass im Verlaufe der beschriebenen Operationen mindestens eine Lage der Punkte (B) und (C) und des zugehörigen Poles P vorkommen muss, welche der gestellten Aufgabe genügt.

Diesem Pole entspricht auf der entgegengesetsten Seite der Projektionsebene ein anderer, mit dem ersten symmetrisch zur Polarprojektion liegender Pol, der mit dem ersten ein Paar von Polen bildet.

Ein ganz gleiches Ergebniss würde man erhalten haben, wenn bei gleichen Neigungswinkeln der Dreiecke $(A)\,P^c\,(B)$ und $(A)\,P^b\,(C)$ der Punkt P^c weiter von der Projektionsebene entfernt wäre, als der Punkt P^b; die beiden Dreiecke müssten alsdann nur ihre Rollen vertauschen.

20. Anstatt die beiden Dreiecke $(A)\,(B)\,P^c$ und $(A)\,(C)\,P^b$, Fig. 4, im Anfange der in Nr. 17 und 19 beschriebenen Operationen so zu legen, dass sich der Winkel $(A)\,P^c\,(B)$ links von der Linie $P^c\,(A)$, und der Winkel $(A)\,P^b\,(C)$ rechts von der Linie $P^b A$ befindet, kann man sich dieselben an die andere Seite der Linien $(A)\,(B)$ und $(A)\,(C)$ angelegt denken, so dass auch jene Winkel die entgegengesetzte Lage zn den Linien $P^c\,(A)$ und $P^b\,(A)$ erhalten. Statt der Kurven $dP^c\,P_1$ und $d\,P^b\,P_1$ erhält man alsdann zwei andere, aber ebenfalls geschlossene und durch den Punkt d gehende Kurven. Von diesen ausgehend, gelangt man durch ganz ähnliche Betrachtungen und Schlüsse auf ein zweites Paar von Polen, welches von dem ersten verschieden ist.

21. Da sich eine andere, wesentlich verschiedene Stellung jener Dreiecke im Anfange sowie im

Verlaufe der beschriebenen Operationen nicht denken lässt, so folgt hieraus, dass es für jeden unendlich fern von d liegenden Fluchtpunkt (A) mindestens zwei Paare Pole giebt. Die gegenseitige Lage derselben soll nachher erörtert werden; zunächst aber ist noch auf Folgendes aufmerksam zu machen.

Denkt man sich in Fig. 4 für irgend eine andere Lage des Punktes (A) die gleichen Construktionen, gestützt auf die gleichen Betrachtungen, wiederholt, so erhält man eine Figur, welche der ersten geometrisch ähnlich ist, und daher auch zwei Paare Pole, welche eine geometrisch ähnliche Lage in der Figur besitzen, wie die beiden zuerst gefundenen Pole. Die Entfernungen der beiden Polpaare vom Punkte d werden sich zu einander verhalten, wie die Entfernungen der Punkte (A) vom Punkte d. Je zwei, den beiden Lagen von (A) entsprechende, aber analoge Pole, liegen daher stets in der gleichen, durch d gehenden geraden Linie.

Denkt man sich endlich den Punkt (A) nach und nach auf alle Punkte der Linie $d(a)$ und ihrer Verlängerung jenseits (a) verlegt und jedesmal die zugehörigen Pole bestimmt, so bilden also dieselben zwei Paare gerade, einerseits gegen den Punkt d, andrerseits in's Unendliche gehende Pollinien.

Um die Zahl der denkbaren Pollinien vollständig zu erschöpfen, hat man nun noch Alles, was für die auf der Linie $d(a)$ liegenden Punkte (A) gesagt wurde, auch für die jenseits dem Punkte d liegende Verlängerung dieser Linie zu wiederholen. Man erhält dadurch zwei weitere Paare von Pollinien, welche auf der entgegengesetzten Seite des Punktes d liegen, ihrer Gestalt und Richtung nach aber mit den beiden ersten Linienpaaren vollständig übereinstimmen, indem sie mit denselben beziehungsweise parallel und ebenfalls gegen den Punkt d hin gehen, so dass sie als deren Verlängerungen erscheinen, und jedenfalls in allen Beziehungen mit denselben vollständig analog sind.

Dabei muss aber beachtet werden, dass diese vier geraden Pollinienpaare nur in unendlichen Entfernungen von d in dieser Gestalt vorhanden sind, und daher in Fig. 4 nur auf jeder Seite bis in eine unendlich kleine Entfernung vom Punkte d fortgesetzt, nicht aber durch diesen Punkt selbst gezogen werden dürfen, weil alle in dieser Figur unendlich nahe bei d liegenden Punkte in der Wirklichkeit in endlicher oder ebenfalls unendlich kleiner Entfernung von demselben gedacht werden müssen, und alsdann andern Gesetzen unterworfen sind. Jene geraden Pollinien erleiden also in Fig. 4 bei d eine unendlich kleine, in der Wirklichkeit eine auf jede endliche Entfernung von d sich erstreckende Veränderung ihrer Gestalt, möglicher Weise sogar eine vollständige Unterbrechung.

22. Ueber die zugehörige Lage der Punkte A, B, C, D im Raume genügen die folgenden wenigen Bemerkungen.

Ist in Fig. 4 ein Pol P mit den zugehörigen Fluchtpunkten (A) (B), (C) gefunden, so zieht man, um die Punkte A, B und C in Fig. 1 zu bestimmen, ganz analog mit der in Nr. 5 beschriebenen Construktion, durch a, b, c in der letztern Fig. gerade Projizirende parallel zu Pd in Fig. 4, und durch d in Fig. 1 parallele Gerade zu $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ in Fig. 4, bis zu ihrem Durchschnitte mit jenen Projizirenden. Diese Durchschnittspunkte sind sodann die Punkte A, B, C.

Die projizirenden Linien für alle Pole, welche in zwei analogen, zu beiden Seiten von *d* befindlichen Pollinien liegen, sind zu einander und zu den Pollinien selbst parallel. Daher sind die Punkte *A*, *B*, *C*, *D* für alle Pole, welche zwei geraden, analogen Pollinien angehören, identisch, oder: es giebt für jede gerade Pollinie auf der einen, und ihre analoge Pollinie auf der andern Seite von *d* nur eine einzige Lage der Punkte *A*, *B*, *C*, *D*. Da aber nur zwei unendlich ferne Paare von geraden Pollinien auf der einen und zwei analoge Paare auf der andern Seite von *d* bestehen, so giebt es für sämmtliche Pole, welche in unendlicher Ferne von den gegebenen Punkten *a*, *b*, *c*, *d* denkbar sind, nur zwei Paare von verschiedenen Stellungen der Punkte *A*, *B*, *C*, *D* im Raume.

23. Die gegenseitige Lage der beiden Paare gerader Pollinien und der zugehörigen Stellungen der Punkte *A*, *B*, *C*, *D* ist ebenfalls einem sehr einfachen Gesetze unterworfen, welches hier, zum Schlusse dieser Betrachtungen über unendlich ferne Pole, freilich nur auf indirekte Weise, nachgewiesen werden soll.

Angenommen, *A*, *B*, *C*, *D*, Fig. 5, stellen die vier einem unendlich fernen Pole *P* entsprechenden räumlichen Punkte, *AP*, *BP*, *CP* die zugehörigen, zu einander parallelen projizirenden Linien dar, und *tu* sei ein Schnitt durch die Projektionsebene. Zieht man sodann zu *tu* die Senkrechten *AA'*, *BB'*, *CC'*, und macht man dieselben so lange, dass sie von *tu* halbirt werden, so bilden die Punkte *A'*, *B'*, *C'*, *D* mit *A*, *B*, *C*, *D* ein vollständiges Paar der vier Punkte.

Durch *mu* werde ferner eine Ebene angedeutet, welche durch *D* gehe, auf den projizirenden *AP*, *BP*, *CP* senkrecht stehe und dieselben in *p*, *q*, *r* schneide.

Trägt man sodann die Dimensionen pA, qB, rC von den Punkten p, q, r auch in entgegengesetzter Richtung auf die Projizirenden nach A_1, B_1, C_1, so dass $pA_1 = pA$, $qB_1 = qB$, und $rC_1 = rC$ ist, so befinden sich die Punkte A_1, B_1, C_1, D offenbar in gleicher gegenseitiger Lage, wie die Punkte A, B, C, D, haben die gleichen, jetzt in schiefe Parallelprojektionen verwandelten Polarprojektionen a, b, c, d, und entsprechen mithin der gestellten Aufgabe ebenfalls. Zieht man von A_1, B_1, C_1 aus auf tu die Perpendikel $A_1 A_1'$, $B_1 B_1'$, $C_1 C_1'$ und macht man sie so gross, dass sie von tu halbirt werden, so liegen die Punkte A_1', B_1', C_1' mit den Punkten A_1, B_1, C_1 symmetrisch zur Projektionsebene, und bilden daher mit denselben ein zweites, der Aufgabe entsprechendes Paar von Punktstellungen. Man hat mithin jetzt in Fig. 5 zwei Paare von Stellungen der räumlichen Punkte, welche der Aufgabe entsprechen, nämlich die Punkte A, B, C, D und A', B', C', D als erstes, und die Punkte A_1, B_1, C_1, D und A_1', B_1', C_1', D als zweites Paar.

Das erste dieser beiden Paare gehört den beiden ersten, im Sinne von Nro. 22 mit einander analogen Pollinienpaaren an. Das zweite Paar von Punktstellungen muss daher den beiden andern, mit einander ebenfalls analogen Pollinienpaaren angehören.

Da aber die projizirenden Linien der Punkte A, B, C, D mit denen der Punkte A_1, B_1, C_1, D zusammenfallen, die Pollinien aber, welche diesen beiden Stellungen der vier Punkte angehören, mit den Projizirenden parallel sind, so folgt daraus, dass von den vier in unendlicher Ferne bestehenden, geradlinigen Pollinienpaaren je zwei, welche zu einander analog sind und sich auf verschiedenen Seiten von *d* befinden, mit den zwei andern, welche ebenfalls zu einander analog sind, parallel gehen und von denselben höchstens um eine endliche Grösse entfernt sind. Man kann auch sagen, die sämmtlichen acht, unendlich fernen geraden Pollinien liegen auf vier Geraden, von denen je zwei und zwei symmetrisch zur Projektionsebene liegen, während zugleich je zwei und zwei andere zu einander parallel und höchstens um eine endliche Grösse von einander entfernt sind.

24. Bedenkt man, dass statt des Punktes *d* in allen, soeben angestellten Betrachtungen auch jeder der drei andern Punkte *a*, *b*, *c* gesetzt werden könnte, ohne dass hiedurch das Ergebniss die geringste wesentliche Veränderung erlitte, so kann man dasselbe auf folgende Weise zusammenfassen:

> In unendlicher Ferne von den gegebenen Punkten *a*, *b*, *c*, *d* giebt es stets vier Paare von Pollinien mit geradliniger, nach jenen Punkten gerichteter Gestalt. Diese vier Paare von Pollinien liegen auf den acht in's Unendliche gehenden Verlängerungen von vier geraden Linien, von denen je zwei und zwei symmetrisch zur Projektionsebene liegen, während zugleich je zwei und zwei andere zu einander parallel und höchstens um eine endliche Grösse von einander entfernt sind.
>
> Diesen Pollinien entsprechen zwei Paar Stellungen der Punkte *A*, *B*, *C*, *D*, und zwar in der Art, dass den auf verschiedenen Geraden liegenden oder mit einander nicht analogen Pollinienpaaren auch verschiedene Paare von Punktstellungen entsprechen, während

je zwei auf den beiden gleichen Geraden liegende oder mit einander analoge Pollinienpaare mit einander das gleiche Punktepaar gemein haben.

Die zwei Paare von Stellungen der Punkte *A*, *B*, *C*, *D* liegen nicht nur symmetrisch zur Projektionsebene, sondern je eine Gruppe des einen Paares liegt mit der einen Gruppe des andern Paares ausserdem auch symmetrisch zu einer Ebene, welche senkrecht zu einer der beiden Richtungen der Pollinien steht und durch den Punkt *d* geht.

Da die vier Geraden, auf denen die vier geraden Pollinienpaare liegen, in Fig. 4 in zwei, zur Projektionsebene symmetrische Gerade zusammenfallen, so genügt zur Verzeichnung der geraden Pollinien in dieser Figur die Bestimmung eines Punktes derselben. Dieselbe wird ganz in analoger Weise mit der in Nr. 6 und 7 beschriebenen Bestimmungsart eines beliebigen Poles ausgeführt. Zieht man durch den so gefundenen Pol und den Punkt *d* die erste, und in symmetrischer Lage zur Projektionsebene eine zweite Gerade, so fallen sämmtliche gerade Pollinien in Fig. 4 auf diese beiden Geraden. Trägt man dieselben auf Fig. 1 über, so geben sie dort die Richtungen an, zu welchen die unendlich weit entfernten, geraden Pollinien parallel sind.

25. Hier soll nur in Kürze eines Umstandes erwähnt werden, welcher in einer auf grössere Vollständigkeit Anspruch machenden Behandlung des vorliegenden Gegenstandes einer eingehendern Betrachtung werth wäre.

Während nämlich, wie nachgewiesen wurde, einem unendlich weit von d entfernten Fluchtpunkte (A) im Allgemeinen vier Pole entsprechen, welche ebenfalls unendlich ferne von d liegen, und von welchen jeder ausser dem Fluchtpunkte (A) noch zwei andere, ebenfalls unendlich ferne Fluchtpunkte (B) und (C) besitzt, lässt sich nachweisen, dass zu demselben Fluchtpunkte (A) auch noch andere, aber in endlicher Entfernung von d liegende Pole, mit je zwei, ebenfalls in endlicher Entfernung von d befindlichen Fluchtpunkten (B) und (C) gehören. Diese Pole fallen indessen auf die Pollinien, welche die Punkte a, b, c, d mit den unendlich fernen geradlinigen Pollinien verbinden. Da es daher nicht nöthig ist anzunehmen, dass durch diese Pole andere Pollinien gehen, als die bisher betrachteten und in den folgenden Nummern zu besprechenden, so soll hier die Vollständigkeit der Kürze dieses, ohnediess nur als ein Bruchstück zu betrachtenden, Aufsatzes geopfert werden.

26. Nachdem bisher die Pollinien einerseits für unendlich kleine, andrerseits für unendlich grosse Entfernungen von den gegebenen Projektionen a, b, c, d untersucht worden sind, müssen deren Eigenschaften für endliche Entfernungen von diesen Punkten näher besprochen werden.

Zunächst muss dasjenige, was in Nr. 9 über das Vorhandensein zusammenhängender Reihen von Polen und über die Länge der Pollinien gesagt worden ist, auf die bisher erhaltenen Ergebnisse angewandt werden.

Demnach muss man annehmen, dass die zwei Pollinienpaare, welche jeden der gegebenen Punkte a, b, c, d treffen, nicht unmittelbar bei diesen Punkten sofort wieder abbrechen, sondern dass sie sich vielmehr bis in eine endliche oder selbst unenlich grosse Entfernung von denselben fortsetzen. Ebensowenig darf man voraussetzen, dass die vier unendlich fernen Paare von Pollinien plötzlich aufhören zu bestehen, wenn sie sich bis auf eine endliche Entfernung den gegebenen Punkten a, b, c, d genähert haben werden; vielmehr muss man annehmen, dass auch diese Linien bis in endliche Entfernungen zu jenen Punkten herantreten.

Man gelangt also zu dem Schlusse, dass auch noch in gewissen endlichen Entfernungen von den Punkten a, b, c, d einerseits alle 16 Zweige der durch diese Punkte gehenden Pollinien, andrerseits alle 8 Zweige der aus unendlicher Ferne herkommenden Pollinien vorhanden sind.

Man kann aber nicht annehmen, dass diese Linien an irgend einer Stelle des Raumes plötzlich abbrechen. Die einzelnen Punkte derselben entsprechen nämlich den sämmtlichen Stellungen, welche der Punkt (A) auf der Linie da und ihren Verlängerungen bis in's Unendliche erhalten kann; da er aber in alle diese Stellungen gelangt, wenn er sich auf der Linie da continuirlich aus einer unendlich grossen Entfernung auf der einen Seite nach einer unendlich grossen Entfernung auf der andern Seite bewegt, so muss auch jede einzelne Pollinie als der Weg eines Punktes betrachtet werden, dessen Bewegung der eben beschriebenen Bewegung des Punktes (A) entspricht. Da man nun die beiden unendlich fernen Endpunkte der Linie ad, über welche sich (A) bewegt, wieder als zusammenfallend betrachten kann, so müssen auch die Pollinien geschlossene Kurven sein. Der Anschluss ihrer beiden Enden an einander kann aber entweder in endlicher Entfernung von den Punkten a, b, c, d stattfinden, oder in unendlicher Entfernung, indem sie mit den beiden unendlich entfernten Enden der gleichen Geraden zusammenfallen; oder es können sich einzelne Theile einer Pollinie auf die eine, andere auf die andere Weise schliessen.

Die Pollinien sind daher entweder im engern Sinne geschlossene, oder nach zwei Seiten in's Unendliche sich erstreckende, oder aus Kurven dieser beiden Arten gemischte Linien.

27. Hier möchte der Gedanke nahe liegen, dass sich je zwei und zwei symmetrisch zur Projektionsebene liegende, zusammen ein Paar bildende Pollinien zu einer geschlossenen Kurve vereinigen könnten. Allein diese Vermuthung wäre unrichtig. Sollten sich nämlich zwei, mit einander ein Paar bildende Pollinien vereinigen, so könnte der Vereinigungspunkt, wegen der symmetrischen Lage der beiden Linien zur Projektionsebene, nur auf dieser Ebene selbst liegen. Ausserdem müssten die beiden Pollinien in diesem Punkte normal zur Projektionsebene stehen, weil sie bei keiner andern Richtung tangential zu einander und zugleich symmetrisch zur Projektionsebene liegen könnten. Die Pollinien aber treffen nach Nr. 16 die Projektionsebene nur in den Punkten a, b, c, d, und die Richtung ihrer Tangenten in diesen Punkten ist zufolge Nr. 13 im Allgemeinen nicht normal zur Projektionsebene, sondern hängt ganz von den gegebenen Grössen a, b, c, d und der gegebenen gegenseitigen Lage der Punkte A, B, C, D ab. Es folgt daraus, dass je zwei symmetrisch zur Projektionsebene liegende und miteinander ein Paar

bildende Pollinien niemals in einander übergehen können, sondern sich entweder gar nicht treffen oder in einem oder mehreren von den Punkten a, b, c, d schneiden.

28. Behält man das in Nr. 25 und 26 Gesagte im Auge, so lässt sich nun auch über die Zahl und den Verlauf der Pollinien Genaueres bestimmen. Man nehme an, der Punkt (A) befinde sich zuerst unendlich ferne von a, b, c, d, gleichgültig auf welcher Seite dieser Punkte. Dieser Lage des Punktes (A) entsprechen im Allgemeinen vier unendlich ferne von jenen Punkten liegende Pole, von denen je zwei und zwei auf verschiedenen Seiten der Projektionsebene und symmetrisch zu derselben liegen. Man bewege sodann den Punkt (A) gegen d hin und denke sich für alle Lagen, die er während dieser Bewegung einnimmt, die vier zugehörigen Pole bestimmt, so bilden dieselben vier Pollinien, welche geradlinig und nach den Punkten a, b, c, d gerichtet sind, und von denen je zwei und zwei auf verschiedenen Seiten der Projektionsebene und symmetrisch zu derselben liegen, oder ein Paar mit einander bilden, während je zwei, nicht zum gleichen Paare gehörige nur um eine endliche Grösse von einander entfernt und mit einander parallel sind. Diese vier Pollinien setzen sich ohne Veränderung ihrer Gestalt oder Richtung fort, bis der Punkt (A) und mit ihm auch die Pollinien in einer endlichen Entfernung von den Punkten a, b, c, d angekommen sind. Während der Punkt (A) sich jetzt den Punkten a und d mehr und mehr bis auf alle beliebig kleinen endlichen Entfernungen nähert, durch diese Punkte selbst hindurch geht und sich auf der andern Seite wieder von ihnen entfernt, sind die vier

Pollinien nur dem einen Gesetze unterworfen, dass sie mit Bezug auf ihre Lage zur Projektionsebene stets zwei Paare bilden und durch alle vier gegebenen Punkte a, b, c, d hindurch gehen müssen. Die Art und Weise aber, wie diess geschieht, hängt ganz von der gegebenen gegenseitigen Lage der Punkte a, b, c, d und A, B, C, D ab. Nimmt man an, die Pollinien haben den einfachsten Verlauf, der möglich ist, so gehen sie der Reihe nach gemeinschaftlich durch die vier Punkte a, b, c, d, ohne zwischen denselben irgend eine Unterbrechung zu erleiden. Haben sie den Weg durch diese Punkte zurückgelegt, und entfernt sich auch der Punkt (A) wieder von a und d bis in's Unendliche auf der entgegengesetzten Seite seiner ursprünglichen Lage, so gehen die vier Pollinien nach und nach ebenfalls wieder in vier unendlich weit entfernte Gerade über, von denen man annehmen kann, dass sie in die Verlängerung der vier zuerst beschriebenen geraden Pollinien fallen.

Ausser diesem einfachen Verlaufe sind aber auch mannigfache zusammengesetztere Gestalten denkbar, welche die Pollinien in endlichen und unendlich kleinen Entfernungen von den gegebenen Punkten a, b, c, d annehmen können. Anstatt dass sie, von der einen Seite aus dem Unendlichen kommend, ununterbrochen durch alle vier Punkte hindurch nach der andern Seite wieder in's Unendliche gehen, können sie z. B. nur durch einen, zwei oder drei von diesen Punkten in zusammenhängendem Verlaufe hindurchgehen, während ein oder mehrere andere, mit den Hauptästen nicht zusammenhängende, und geschlossene Kurven bildende Zweige durch die andern Punkte gehen. Es lässt sich auch denken, dass keiner von den aus dem

Unendlichen kommenden Aesten der Pollinien unmittelbar durch einen der Punkte *a*, *b*, *c*, *d* gehe, sondern dass je zwei und zwei, auf der gleichen Seite der Projektionsebene befindliche Pollinien in einer endlichen Entfernung von jenen Punkten in einander übergehen, während die durch die vier Punkte gehenden Pollinien für sich abgesonderte, geschlossene Kurven bilden und besondere Zweige sind. In einzelnen Fällen können auch die Pollinien vereinzelt stehende, eigenthümliche Gestalten und Stellungen annehmen, z. B. es können einzelne Zweige derselben durchweg, auch in endlichen Entfernungen von den gegebenen Punkten *a*, *b*, *c*, *d*, geradlinig bleiben, oder es können alle vier, auf der einen Seite der Projektionsebene, in unendlicher Ferne liegende gerade Zweige der Pollinien zusammenfallen, u. d. gl. Stets aber können alle diese Linien als einzelne Theile oder Zweige der vier Pollinien betrachtet werden, welche von der einen Seite geradlinig aus unendlicher Ferne kommen und nach der andern Seite ebenso in unendliche Ferne hingehen, und nur in der Nähe ihres Durchganges durch die Punkte *a*, *b*, *c*, *d*, gleichsam gestört durch den Einfluss dieser Punkte, jene Gestalt in der Ausdehnung einer endlichen Strecke verändern.

29. Man kann daher jetzt über die Pollinien, welche zwischen den Punkten *a*, *b*, *c*, *d* und den unendlich entfernten geraden Pollinien liegen, Folgendes sagen:

> Die durch die Punkte *a*, *b*, *c*, *d* gehenden und die unendlich ferne von diesen Punkten bestehenden Pollinien verbinden sich unter einander in der Art, dass vier von einander gesonderte Züge von Pollinien entstehen,

von denen je zwei und zwei eine symmetrische Lage zur Projektionsebene haben. Jeder dieser grossen Pollinienzüge kommt aus unendlicher Ferne, wo er eine geradlinige, nach den Punkten *a*, *b*, *c*, *d* gerichtete Gestalt hat, schneidet die Projektionsebene in allen vier eben genannten Punkten, sonst aber an keiner andern Stelle, und geht alsdann wieder in eine unendliche Entfernung fort, wo er zum zweiten Male eine geradlinige und nach den Punkten *a*, *b*, *c*, *d* gerichtete Gestalt annimmt. Eine jede dieser grossen Pollinien kann ferner entweder aus einem einzigen, zusammenhängenden Zweige der eben beschriebenen Art, oder aus mehrern, nicht zusammenhängenden Zweigen bestehen, von denen einer die soeben beschriebene Gestalt besitzt, während alle andern aus geschlossenen Kurven bestehen.

Einem jeden Punkte dieser Pollinien entspricht eine Lage der Punkte *A*, *B*, *C*, *D*.

Die einzelnen Punkte der Pollinien und die zugehörige Lage der Punkte *A*, *B*, *C*, *D* werden mittelst der in Nr. 6 und 7 beschriebenen Construktionen bestimmt.

30. Nachdem bisher die Lagen des Poles in unendlich kleinen, unendlich grossen und endlichen Entfernungen von den gegebenen Punkten *a*, *b*, *c*, *d*, sowie die zugehörigen Lagen der Punkte *A*, *B*, *C*, *D* untersucht worden sind, kann man die erhaltenen Ergebnisse zusammenfassen und über die im Eingange gestellte Aufgabe die folgenden Behauptungen aufstellen:

Vier beliebige, auf einer Ebene liegende Punkte *a*, *b*, *c*, *d* können stets als eine Polarprojektion von vier im Raume befindlichen Punkten *A*, *B*, *C*, *D*, deren gegenseitige Entfernungen in einem beliebigen, gegebenen Verhältnisse zu einander stehen, angesehen werden, und zwar für unendlich viele in endlicher, unendlich kleiner und unendlich grosser Entfernung von den Punkten *a*, *b*, *c*, *d* liegende Pole. Die sämmtlichen der Aufgabe genügenden Pole bilden vier gesonderte Pollinien, von denen je zwei und zwei eine symmetrische Lage zur Projektionsebene haben. Jede dieser Pollinien kann aus einem einzigen, ununterbrochenen Zweige, oder aus mehrern nicht zusammenhängenden Zweigen bestehen. Einer dieser Zweige ist stets eine offene Linie, deren beide Enden in's Unendliche gehen und dort die Gestalt von geraden, nach den Punkten *a*, *b*, *c*, *d* gerichteten Linien annehmen. Diese acht geradlinigen Enden der vier Pollinien fallen auf die acht in's Unendliche gehenden Verlängerungen von vier Geraden, von denen je zwei und zwei symmetrisch zur Projektionsebene liegen oder ein Linienpaar bilden, während je zwei nicht dem gleichen Paare zugehörende Gerade zu einander parallel und in endlicher Entfernung von einander liegen. Die andern, etwa noch vorhandenen Zweige der Pollinien reichen nicht in's Unendliche und sind geschlossene Kurven. Jede der vier Pollinien, oder auch nur ein Zweig von jeder derselben geht ferner einmal durch jeden der vier Punkte a, b, c, d und schneidet daselbst die Projektionsebene, trifft dieselbe aber sonst an keiner andern Stelle.

Die einzelnen Punkte der Pollinien, ihre Tangenten in den Punkten a, b, c, d, und die Richtung der vier Geraden, mit denen sie in unendlicher Ferne zusammenfallen, werden mittelst der in den Nr. 6 bis 8, 11, 12 und 24 beschriebenen Construktionen bestimmt.

Einem jeden Punkte der Pollinien entspricht eine Lage der Punkte A, B, C, D, unter der Voraussetzung, dass der Punkt D mit d zusammenfalle; je zwei Lagen dieser vier Punkte, welche zwei symmetrisch zur Projektionsebene liegenden Polen entsprechen, sind ebenfalls symmetrisch zu dieser Ebene. Für alle denkbaren, in unendlicher Ferne von den Punkten a, b, c, d liegenden Pole giebt es nur vier verschiedene Lagen der Punkte A, B, C, D; je zwei und zwei derselben sind symmetrisch zur Projektionsebene, je zwei und zwei Lagen dagegen, welche diese symmetrische Stellung nicht besitzen aber doch auf verschiedenen Seiten der Projektionsebene befindlich sind, liegen symmetrisch zu einer durch den Punkt d gehenden Ebene, welche senkrecht zu einer der Geraden steht, auf welche die in's Unendliche reichenden Zweige der Pollinien fallen. Für jeden Pol, der auf einem der vier Punkte a, b, c, d liegt, giebt es vier verschiedene Lagen der Punkte A, B,

C, D, von denen je zwei und zwei symmetrisch zur Projektionsebene sind. Von diesen vier Punkten befindet sich in allen vier Stellungen derjenige, auf dessen Projektion der Pol liegt, ausserhalb der Projektionsebene; die drei andern liegen dagegen auf der Projektionsebene in den Geraden, welche man durch den Pol und ihre Projektionen ziehen kann.

Für jeden Pol kann die Lage der Punkte A, B, C, D durch die in Nr. 5, 11 und 22 beschriebenen Construktionen bestimmt werden.

30. Es war anfänglich meine Absicht, diesen allgemeinen Betrachtungen die Beschreibung der Pollinien für einige spezielle Fälle hinzuzufügen. Da aber der Aufsatz jetzt schon den für diese Zeitschrift passenden Raum beinahe überschritten hat, so breche ich hier ab und deute, indem ich an das im Eingange des Aufsatzes Erwähnte erinnere, nur noch auf die Identität der hier behandelten Projektionen von vier Punkten mit den Projektionen von drei, der Richtung und Grösse nach beliebigen Axen hin. Denkt man sich von D aus die Geraden DA, DB, DC gezogen, so können dieselben als ein beliebiges Axensystem betrachtet werden, und es ist nun leicht, alles oben Gesagte auf dasselbe anzuwenden.

Fig. 1.

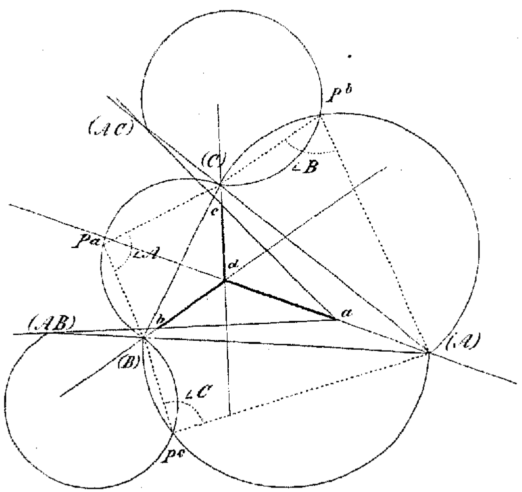

Fig. 2 a.

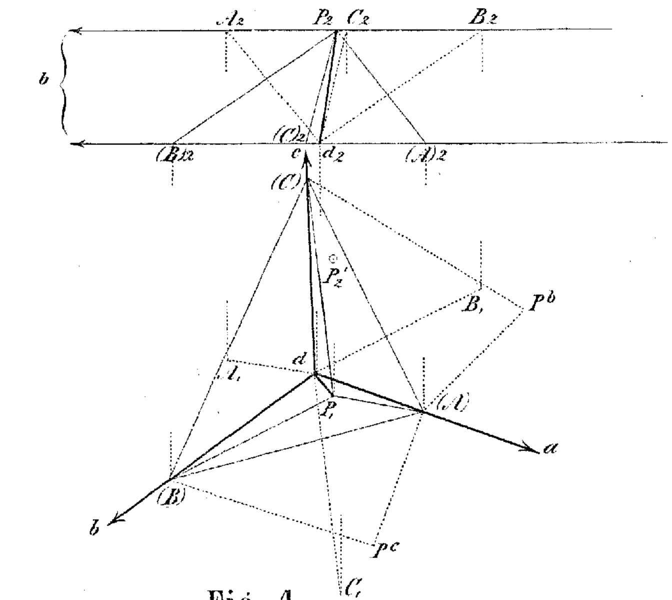

Fig. 2 b.

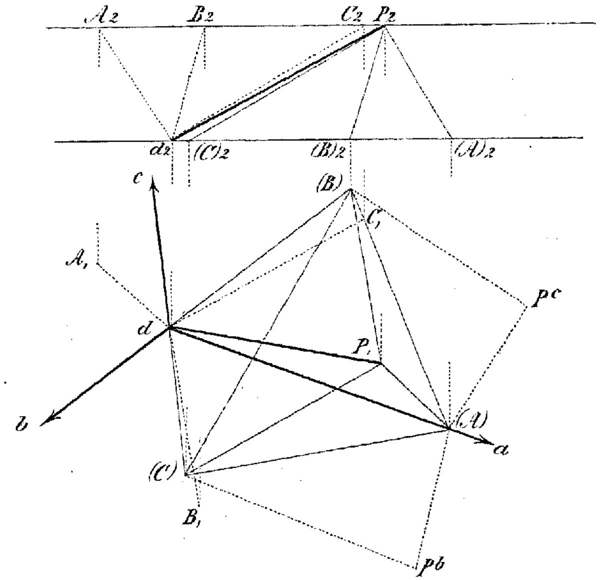

Fig. 3.

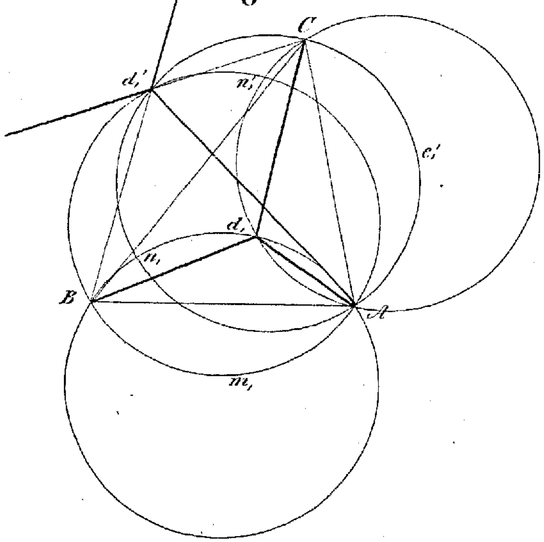

Fig. 4.

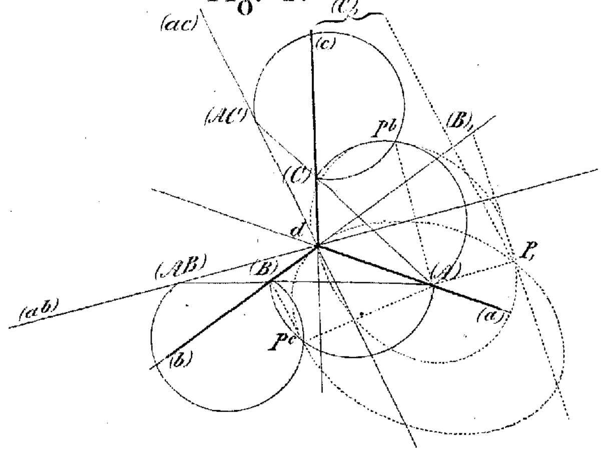

Fig. 5.