Umgestülpte Flächen.

Von

J. W. v. Deschwanden.

---

1. Wenn man sich eine krumme Fläche vollkommen biegsam, aber weder ausdehnbar noch zusammendrückbar vorstellt, so dass ihre Längendimensionen weder vergrössert noch verkleinert werden können, so lassen sich derselben in gewissen Fällen durch blosse Biegungen verschiedenartige Gestalten ertheilen, welche aber, vermöge jener Unveränderlichkeit der Längendimensionen, in einem bestimmten Zusammenhange unter einander und mit der ursprünglichen Gestalt der Fläche stehen. Denkt man sich auf der Fläche beliebige, sich scheidende und berührende Linien gezogen, so behalten dieselben in allen jenen Gestalten, welche die Fläche annehmen mag, nicht zwar ihre Gestalt, wohl aber ihre Länge sowohl im Ganzen als in ihren einzelnen Theilen unverändert bei, ihre Schnitt- und Berührungspunkte verschieben sich auf ihnen nicht, und die Winkel, unter welchen sie sich schneiden, bleiben unverändert.

Es lässt sich nun die Aufgabe stellen, alle Gestalten zu bestimmen, welche die verschiedenartigen krummen Flächen durch solche Biegungen erhalten können.

Für gewisse einzelne Flächenarten ist es nicht schwer, diese Aufgabe ganz oder wenigstens zum grossen Theile zu lösen. So ergiebt sich z. B. aus der Natur der abwickelbaren Flächen sofort, dass eine jede derselben durch Biegung nur in eine andere abwickelbare Fläche, und zwar in jede beliebige derartige Fläche übergehen kann, so dass man sagen kann: jede abwickelbare Fläche lässt sich durch Biegung in jede andere abwickelbare Fläche, nicht aber in eine Fläche anderer Art verwandeln. Eine auf alle Flächen sich erstreckende Lösung dieser Aufgabe zu geben, soll hier nicht versucht werden; vielmehr ist es nur eine besondere Art der Verwandlung der Flächen durch Biegung, auf welche ich in diesem Aufsatze aufmerksam machen möchte, nämlich auf die Umstülpung der Flächen. Diese Verwandlungsart krummer Flächen zeichnet sich dadurch aus, dass sie sich ohne Unterschied auf alle Arten von Flächen anwenden lässt, und theils dieser allgemeinen Anwendbarkeit wegen, theils wegen der eigenthümlichen Ergebnisse, die sie bei manchen Flächen in einzelnen Fällen erzeugt, mannigfaltiges Interesse darbietet.

2. Um den Begriff der Umstülpung einer Fläche genau festzustellen, mögen folgende Betrachtungen angestellt werden. Es sei $abcb_n a$, Fig. 1, eine ganz beliebige krumme Fläche. Man schneide dieselbe durch eine ebenfalls ganz beliebige Ebene E; die Schnittlinie sei $bb_1 \ldots b_n \ldots$ Nun denke man sich, diese Ebene sei eine Spiegelfläche, und stelle sich das Spiegelbild des auf der einen Seite des Spiegels befindlichen Theiles der krummen Fläche, z. B. des Theiles bcb_n, vor. In der Figur ist dasselbe durch

bCb_n dargestellt. Dieses Spiegelbild soll nun die Umstülpung des Flächentheiles bcb_n, die Schnittkurve $bb_1 .. b_n ...$ die Umstülpungskurve, und die Fläche $abCb_n a_n$, als ein zusammengehöriges Ganzes betrachtet, eine umgestülpte Fläche genannt werden.

Es ist nicht schwer, sich zu überzeugen, dass die umgestülpte Fläche $abCb_n a_n$ durch blosse Biegungen; ohne Veränderung der auf der Fläche gemessenen Längendimensionen, aus der ursprünglichen Fläche $abcb_n a_n$ entstehen kann, und dass mithin das Umstülpen, in dem hier beschriebenen Sinne, zu den im Eingange bezeichneten Verwandlungen einer Fläche gehört. Da bCb das Spiegelbild von bcb_n ist, so giebt es für jeden Punkt m der letztern Fläche einen entsprechenden Punkt M auf der erstern, welcher so liegt, dass die gerade Verbindungslinie mM senkrecht zur Ebene E steht und von derselben halbirt wird. Denkt man sich die eine Fläche in unendlich kleine ebene Dreiecke bb_1m, $b_1mn ...$ eingetheilt, so lässt sich mithin auch die andere Fläche in Dreiecke bb_1M, $b_1MN, ...$ eintheilen, von denen ein jedes einem Dreiecke der ersten Fläche in ähnlicher Weise gegenüberliegt, wie der Punkt M dem Punkte m und mit demselben kongruent ist. Ist bb_1m eines derjenigen Dreiecke der ursprünglichen Fläche, welche mit einer Seite, bb_1, auf die Umstülpungskurve fallen, so lässt sich mithin dasselbe durch eine Drehung um bb_1 genau auf das ihm entsprechende Dreieck bb_1M der umgestülpten Fläche aufklappen, ohne dass dabei irgend eine seiner Längendimensionen sich ändert. Ist b_1mn ein zweites Dreieck der ursprünglichen Fläche, welches die Seite b_1m mit dem ersten Dreiecke gemein hat, so kann dasselbe durch Umklappung um diese Seite ebenfalls genau auf das ihm entsprechende Dreieck $b_1 MN$ der umgestülpten Fläche gelegt werden. Auf ähnliche Weise könnte ein Dreieck mno der ursprünglichen Fläche auf das entsprechende Dreieck MNO der umgestülpten ohne Veränderung der Längendimensionen gelegt werden, u. s. f. Man kann somit alle einzelnen Elemente der einen Fläche ohne Veränderung ihrer Längendimensionen und der Art, wie sie miteinander zusammenhängen, von einer der beiden Flächen auf die andere übertragen, indem man dieselben gewisse Drehungen um ihre geraden Begrenzungslinien ausführen lässt, woraus folgt, dass auch die ganze erste Fläche vollständig durch passend ausgeführte Biegungen in die andere übergeführt werden kann.

3) Es könnte vielleicht nur noch ein Bedenken gegen die Richtigkeit dieser Anschauungsart obwalten. Es scheint nämlich unvermeidlich, dass ausser jenen Drehungen der ebenen Elemente um ihre geraden Begränzungslinien, bei ber Ueberführung der einen Fläche in die andere auch momentane Trennungen mancher Elemente vorkommen müssen. In der That kann man sich die Drehung der Elemente $bb_1 m$ und $b_1 mn$ um die Linien bb_1 und $b_1 m$ kaum anders denken, als dass sie sich zugleich bei bm und $b_1 n$ von den andern, an diese Linien stossenden Theilen der Fläche bcb_n ablösen, und erst im Augenblicke des Zusammenfallens mit $bb_1 M$ und $b_1 MN$ mit denselben, die gleichzeitig eine ähnliche Umklappung ausgeführt haben müssten, wieder zusammentreffen.

Hierauf ist zu bemerken, dass dieser Umstand, vom rein geometrischen Standpunkte betrachtet, ohne

Gewicht ist, weil er am Ergebnisse der ganzen Operation nichts ändert, sondern sich nur auf den mechanischen Vorgang bezieht, durch welchen man sich die eine Fläche in die andere übergeführt denken kann, indem man diese Flächen als materielle, oder unendlich dünne körperliche Gegenstände auffasst. Ausserdem aber lässt sich die Umstülpung auch so vornehmen, dass jene Trennungen sogar vollständig wegfallen, oder auf ein beliebiges, unendlich kleines Minimum reduzirt werden. Man braucht die Umstülpung zu diesem Zwecke nur in derselben Weise geometrisch zu vollziehen, wie sie bei materiellen Flächen mechanisch ausgeführt werden kann. Man denke sich nämlich, die gegebene Fläche bcb_n, Fig. 2, werde nicht nur durch die Ebene E, wie Fig. 1, sondern auch noch durch eine zweite Ebene E' gechnitten, welche sich unendlich nahe bei der ersten befinde und mit derselben entweder parallel sei oder nur einen unendlich kleinen Winkel bilde. Im letztern Falle soll die Schnittlinie beider Ebenen jedenfalls die Umstülpungskurve bb_1b_n nicht treffen. Ist $b'b'_1b'_n$ der Schnitt der Ebene E' mit der Fläche bcb_n, so befindet sich zwichen diesem Schnitte und der Linie bb_1b_n eine unendlich schmale Zone der Fläche bcb_n. Auf der Fläche bCb_n kann man sich die derselben entsprehende Zone denken, welche von der Linie $B'B_1'B_n'$ begränzt sein wird. Diese beiden Zonen zerlege man durch die Linien bb', $b_1b'_1$ . . ., bB', $b'B_1'$ . . . in Elemente von unendlich kleiner Länge bb_1, b_1b_2 . . ., und denke sich die erstern gleichzeitig um die Linienstücke bb_1, b_1b_2 . . . auf die letztern umgeklappt. Nach dieser Umklappung wird die ganze erste Zone, ohne eine bleibende Aenderung ihrer Längendimensionen erlitten zu haben, mit der zweiten zusammenfallen, und der Theil $b' c b_n$ der gegebenen Fläche wird, ebenfalls ohne bleibende derartige Veränderungen, in die Stellung $B' c' B'_n$ übergegangen sein. Wendet man das gleiche Verfahren, welches jetzt mit Bezug auf $b c b_n$ beschrieben wurde, auf $B' c' B'_n$ an, so lässt sich abermals eine Zone dieser Fläche in ähnlicher Weise auf $B' C B'_n$ umklappen, und wiederholt man dasselbe Verfahren unendlich oft, so durchläuft die Fläche die in Fig. 3 angegebene Gestalt und verändert sich so lange, bis die ganze erste oder gegebene mit der ganzen zweiten aber umgestülpten Fläche zusammenfällt.

Betrachtet man nun die Veränderungen, welche die einzelnen Zonen und ihre Elemente während der Umklappungen erleiden, so bemerkt man sofort, dass, je nach dem Sinne, in welchem man die Drehung derselben vornimmt, entweder eine Trennung, oder eine Ueberschiebung der Linien $b' b'_1$ $b'_1 b_2$ . . . ., oder, wenn man sich die Flächenelemente momentan ausdehnbar und zusammenrückbar denkt, eine Ausdehnung oder eine Zusammendrängung derselben eintreten muss. Diese Ausdehnung oder Zusammendrängung nimmt während der ersten Hälfte der Drehungen, durch welche die Umklappung vollzogen wird, zu, oder nimmt einen Maximalwerth an, welcher mit den Linienelementen $b b'$, $b_1 b'_1$ . . . proportional ist; derselbe vermindert sich in umgekehrter Weise während der zweiten Hälfte dieser Drehungen, um im Augenblicke der Vollendung der Umklappung wieder vollständig zu verschwinden. Da aber die Linienelemente $b b'$ $b_1 b'_1$ . . . . beliebig klein gemacht werden können, so kann auch diese momentane Ausdehnuug oder Zusammendrängung bis auf einen beliebigen Grad unendlicher Kleinheit, also bis zum gänzlichen Verschwinden gebracht werden. Man kann mithin behaupten, dass die ganze Umstülpung der Fläche $b\,c\,b_n$ auch mechanisch so ausgeführt werden kann, dass selbst während der Operation keine Veränderungen in den Längendimensionen der Fläche vorkommen.

Anstatt die Umstülpung bei $b\,b_1\,b_n$ beginnen zu lassen, kann sie auch an irgend einer Stelle von $b\,c\,b_n$, an welcher die Fläche durch eine Ebene in einer unendlich kleinen geschlossenen Kurve geschnitten werden kann, z. B. bei $b'\,b'_1\,b'_n$ Fig. 4, beginnen. In diesem Falle wird während der ganzen Operation des Umstülpens jederzeit nur eine einzige Umstülpungskurve bestehen, während bei der oben beschriebenen Umstülpungsart, deren stets zwei gleichzeitig vorhanden sind.

4) Gestützt auf diese Erklärungen können nunmehr einige allgemein gültige Gesetze angegeben werden, welchen die umgestülpten Flächen unterworfen sind.

Zuerst ist zu beachten, dass die Umstülpungskurve bisher stets als eine ebene Kurve vorausgesetzt worden ist. Es kann nun hinzugefügt werden, dass eine andere Annahme nicht zulässig ist. Zufolge Nro. 2 gründet sich die Möglichkeit der Umstülpung ohne bleibende Veränderungen der Längendimensionen der Flächen auf den Umstand, dass der umgestümlpte Theil $b\,C\,b_n$ der Fläche, Fig. 1, vollkommen symmetrisch zu dem entsprechenden gegebenen Theile $b\,c\,b_n$ derselben, oder dass das eine Flächenstück das genaue Spiegelbild des andern ist, während beide Flächenstücke die Umstülpungskurve gemeinsam besitzen.

Diess ist nur dann möglich, wenn für die Flächen $b\,c\,b_n$ und $b\,C\,b_n$ eine Ebene der Symmetrie denkbar ist, und wenn die Umstülpungskurve selbst in dieser Ebene liegt. Sobald diese Kurve aber nicht mehr eine ebene Kurve wäre, könnte $b\,C\,b_n$ nicht mehr das Spiegelbild von $b\,c\,b_n$ sein.

Ausserdem aber ist in den vorstehenden Betrachtungen nichts enthalten, was etwa nur bei einer speziellen Art ebener Umstülpungskurven richtig wäre; es ist im Gegentheile auf diese Gestalt durchaus keine Rücksicht genommen worden, und alles Gesagte gilt daher für alle möglichen ebenen Umstülpungskurven. Man kann daher nun behaupten: die Uumstülpungskurven sind stets ebene Kurven, können aber jede beliebige Gestalt besitzen, deren diese Art von Kurven fähig ist.

Ein zweites allgemeines Gesetz betrifft den Winkel, unter welchem sich der ursprüngliche, unverändert gebliebene Theil und die umgestülpte Hälfte einer Fläche in der Umstülpungskurve schneiden. Wie aus allen bisher angestellten Betrachtungen hervorgeht, findet nämlich nicht etwa ein allmäliger Uebergang von dem einen Theile der Fläche auf den andern statt, sondern ein plötzlicher; und wenn bei Umstülpungen, welche bei materiellen Stoffen vorkommen, keine scharf begränzte Umstülpungskurve bemerkbar ist, sondern an deren Stelle eine Gegend mehr oder minder scharfer Abrundung tritt, so rührt dieses nur davon her, dass solche Stoffe die anfänglich bei umgestülpten Flächen vorausgesetzten Eigenschaften nicht genau, sondern nur annäherungsweise besitzen. Namentlich sind materielle Stoffe niemals unendlich dünn, meistens auch nicht vollkommen biegsam und nicht ganz unveränderlich in ihren Längendimensionen. Geht man nun auf mathematische oder ideelle Flächen zurück, so bietet sich zunächst die Frage dar, unter welchem Winkel sich in der Umstülpungskurve der unveränderte und der umgestülpte Theil der Fläche schneiden. Man denke zu diesem Zwecke durch irgend einen Punkt b der Umstülpungskurve eine Berührungsebene zu der unveränderten Fläche $a\,b$ Fig. 2 und eine andere Berührungsebene zu der umgestülpten Fläche bCb_n gelegt, so dass b für beide Ebenen der Berührungspunkt sei. Die erste dieser beiden Ebenen fällt aber mit der Berührungsebene zusammen, welche man durch b, als Berührungspunkt, an die Fläche $b\,c\,b_n$ gelegt denken kann, und von welcher die an $b\,C$ gelegte Berührungsebene das Spiegelbild mit Bezug auf die Ebene der Kurve $b\,c_1\,b_n$ ist. Es folgt daraus, dass die erste und die zweite der oben genannten Berührungsebenen die Ebene der Umstülpungskurve in der gleichen, durch b gehenden Tangente derselben schneiden, und zur Ebene der Kurve unter gleichen Winkeln, aber in entgegengesetztem Sinne geneigt sind. Desgleichen ergibt sich nun, dass die unveränderte und die umgestülpte Hälfte einer Fläche sich in der Umstülpungskurve unter Winkeln schneiden, welche an jeder Stelle doppelt so gross sind, als die Differenz zwischen 90° und dem Winkel, welchen das äusserste Element der unveränderten Fläche mit der Ebene der Umstülpungskurve bildet. Die Umstülpungskurve bildet also im Allgemeinen keineswegs eine Schneide oder Schärfe, sondern liesse sich vielmehr als eine gekrümmte Kante bezeichnen.

Ausser der Umstülpungskurve können die beiden Hälften der Fläche jede Lage zu einander haben, deren zwei ganz verschiedene Flächen fähig sind: sie können sich also entweder gar nicht mehr treffen, wie in Fig. 1, oder schneiden, wie in Fig. 5_b oder berühren.

5) Von einzelnen eigenthümlichen Fällen, welche bei den verschiedenen Arten umgestülpter Flächen vorkommen können, mögen die folgenden erwähnt werden.

Wenn die Ebene der Umstülpungskurve in irgend einem Punkte normal zur einen, z. B. zur ursprünglichen Hälfte der Fläche steht, so steht sie, zufolge dem unter Nro. 4 Gesagten, an derselben Stelle auch normal zur andern umgestülpten Hälfte, und die beiden Hälften der Fläche schneiden sich hier nicht mehr, sondern sie berühren sich. Wenn jene Ebene in allen Punkten der Umstülpungskurve normal zu der einen Hälfte der Fläche steht, so findet auch in allen Punkten dieser Kurve eine Berührung beider Hälften der Fläche statt, und dieselben bilden daher in dieser Kurve nicht mehr eine krumme Kante, sondern eine scharfe Schneide, wie in Fig. 5 bei $b\,b_1\,b_{\rm II}$.

Wenn die Ebene der Umstülpungskurve die eine Hälfte der umgestülpten Fläche in einem Punkte berührt, so findet in diesem Punkte keine Umstülpung statt, wie in Fig. 6 bei *a*; denn eine Umstülpung kann nur da eintreten, wo ein Theil der ursprünglichen, nicht umgestülpt gedachten Fläche auf der einen, ein anderer Theil derselben auf der andern Seite der Ebene der Umstülpungskurve liegt. An den Stellen aber, wo diese Ebene die Fläche berührt, befindet sich nicht gleichzeitig ein Theil der letztern auf der einen und ein anderer auf der andern Seite der Ebene. Hier kann also die Umstülpung wohl etwa beginnen oder aufhören, wirklich vorhanden sein aber kann sie nicht.

Verfolgt man die Umstülpungskurve von einem solchen Berührungspunkte an bis zu andern Punkten, in welchen die Ebene der Kurve die krumme Fläche schneidet, so findet man mit Bezug auf den Winkel, unter welchem sich die beiden Hälften der Fläche in der Kurve schneiden, folgende Verhältnisse.

Der Winkel zwischen jener Ebene und der krummen Fläche ist im Berührungspunkt gleich Null, wird, wenn man von da zu den benachbarten Punkten übergeht, allmälig grösser und erreicht in einer endlichen Entfernung vom Berührungspunkte eine endliche Grösse. So bilden auch die beiden Hälften der Fläche, welche im Berührungspunkte von einander gar nicht getrennt sind, zunächst bei demselben nur eine ganz flache Kante, welche erst in endlicher Entfernung von diesem Punkte in eine Kante mit endlichem Winkel übergeht.

6) Ferner können hier einige Betrachtungen über die mehrfachen Umstülpungen angereiht werden. Bisher wurde nämlich stets nur eine einzige Umstülpungskurve angenommen. Es hindert aber nichts, eine krumme Fläche mit einer beliebigen Zahl von Ebenen, welche eine beliebige Lage haben mögen, zu schneiden, und die sämmtlichen Schnittlinien als Umstülpungskurven anzusehen. Wenn diese Kurven einander nicht treffen, so ist jede der entstehenden Umstülpungen unabhängig von den andern zu behandeln, und es bieten sich daher in diesem Falle blosse Wiederholungen der schon betrachteten Fälle dar. Wenn dagegen je zwei Umstülpungskurven sich schneiden, so ist Folgendes zu berücksichtigen.

In Fig. 7_a sei bcb_np ein parallel zur Zeichnungsfläche durch die zu betrachtende krumme Fläche geführter Schnitt, welcher nicht als Umstülpungskurve benutzt, sondern nur zum Behufe einer deutlichern Besprechung der Darstellung der unzerschnittenen Fläche vorgezogen werden soll. Die erste Umstülpungskurve sei nun bb_n und sie erscheine in dieser Darstellung als Gerade, indem die zugehörige Ebene senkrecht zur Zeichnungsfläche angenommen werde. Die zugehörige Umstülpung des Flächentheiles bcb_n ist daher alsdann bCb_n. Die zweite Umstülpungskurve sei $b'b'_n$; sie treffe die Kurve bb_n in o. Um die Umstülpungen zu bestimmen, welche dieser Kurve entsprechen, muss man sich das Spiegelbild aller jener Theile der Fläche bCb_np denken, welche suf der einen Seite der Ebene der Kurve $b'b'_n$ liegen, und zwar in der Weise, dass man das Stück bcb_n nicht mehr in dieser seiner ersten Stellung, sondern in der Lage bCb_n, welche es vermöge der ersten Umstülpung erhalten hat, berücksichtigt. Man hat daher zuerst das Spiegelbild des von bpb_n abgeschnittenen Flächenstückes $ob_nb'_n$ zu bilden. Dasselbe werde durch die Figur oB_nb_n dargestellt, indem $oB_n=ob_n$ und $b'_nB_n=b'_nb_n$ sei, und in welcher oB_n die Projektion einer Kurve, b'_nB_n den zur Wandfläche parallelen Schnitt mit der umgestülpten Fläche ist. Alsdann hat man das Spiegelbild des Stückes omb der umgestülpten Fläche bCb_n zu bilden. Dasselbe sei omB_n, worin om und oB_n wiederum die Projektionen zweier Kurven sind, mB_n dagegen den zur Wandfläche parallelen Schnitt mit der umgestülpten Fläche oB_nm darstellt. Die vollständige Umrisszeichnung der doppelt umgestülpten und parallel zur Wandfläche durchschnittenen Fläche ist daher die durch die Umfangslinien $bpb'_{n}ob$ eingeschlossene Figur; jener zur Wandfläche parallele Schnitt ist die vielfältig gebrochene, in der Figur stärker gezeichnete Linie $bpb'_{n}B_{n}mCb$. Eine parallelperspektivische Darstellung der ganzen Fläche in dem hier beschriebenen Zustande liefert Fig. 7_{b}.

Man sieht ein, dass man nach und nach sehr komplizirte Gestalten erhielte, wenn man die doppelt umgestülpte Fläche um eine dritte, die beiden ersten Umstülpungskurven schneidende Kurve umstülpte, die so erhaltene dreifach umgestülpte Fläche um eine vierte Kurve, welche die drei vorhergehenden schneiden müsste u. s. f.

7) Ebensogut, wie man eine krumme Fläche einmal oder einigemale umstülpen kann, lassen sich auch unendlich viele Umstülpungen an derselben denken. Werden die Ebenen dieser Umstülpungskurven ihrer Lage nach einem bestimmten Gesetze unterworfen und denkt man sich, dass sie unendlich nahe auf einander folgen, so erhält man, je nach der Natur jenes Gesetzes, verschiedenartige, sehr wesentliche und oft fremdartig erscheinende Umgestaltungen der behandelten krummen Fläche. Einige Bemerkungen hierüber, die jedoch nur als etwas Abgerissenes, nicht als etwas irgendwie Vollständiges zu betrachten sind, mögen hier folgen.

Es soll zuerst der einfache Fall näher untersucht werden, in welchem die Ebenen aller Umstülpungskurven mit einander parallel sind. Zu diesem Zwecke stelle $abcb_{n}a_{n}$, Fig. 8, wieder die ursprüngliche gegebene krumme Fläche dar, deren Gestalt keiner Beschränkung unterworfen sei. Diese Fläche denke man sich mehrmals umgestülpt, und zwar zuerst um die Umstülpungskurve bb_n, sodann um die Kurve $b'b'_n$, hierauf um $b^2b^2_n$, um $b^3b^3_n$ u. s. f. Die Ebenen dieser Kurven seien mit einander parallel und die Entfernungen von je zwei benachbarten Kurvenebenen vorerst endlich. Bei diesem Vorgange muss Folgendes bemerkt werden. Ist $b'b'_n$ die erste Umstülpungskurve, und bezeichnet man die Richtung ab' als die „aufwärts gehende“, so geht die krumme Fläche nach der Umstülpung in der Richtung von $b'b^2$ weiter, also abwärts, so dass die zweite Umstülpungskurve $b^2b^2_n$ unter der ersten liegt. Ebenso liegt die dritte oder $b^3b^3_n$ über der zweiten, die vierte unter der dritten u. s. f. Diess würde nur bei gewissen besondern Biegungsverhältnissen der krummen Fläche, welche zunächst nicht in Betracht gezogen zu werden brauchen, nicht mehr eintreffen. Man kann daher behaupten, im Allgemeinen befinden sich alle geraden Umstülpungskurven unter der zunächst vorhergehenden und zunächst folgenden ungeraden, und alle ungeraden über den beiden ihnen benachbarten geraden Umstülpungskurven: die ganze Fläche gewinnt dadurch die in Fig. 8 dargestellte gerippte oder wellenförmige Gestalt, bei welcher alle geraden Umstülpungskurven die tiefste Thallinie, alle ungeraden die höchste Berglinie einer Welle bezeichnen.

Alle diese Kurven kann man sich, ohne Veränderung ihrer Gestalt, auf die ursprüngliche Fläche bcb_n zurückversetzt denken, und zwar durch eine einfache, senkrecht zu ihrer eigenen Ebene gerichtete fortschreitende Bewegung. Dabei gelangen b^2 nach (b^2), b^3 nach (b^3) u. s. f. und die Geraden $b^2(b^2)$, $b^3(b^3)$ stehen senkrecht zu den Ebenen der Umstülpungskurven.

Bezeichnet man ferner den senkrechten Astabnd der Ebenen von $b' b'_n$ und $b^2 b^2_n$ mit h', denjenigen der Ebenen $b^2 b^2_n$ und $b^3 b^{3n}$ mit h_2 u. s. f., so hat man für die senkrechten Abstände je zweier benachbarten ungeraden Kurvenebenen die Ausdrücke:

$$h_2 - h_{,}\,,\ h_4 - h_3\,,\ h_6 - h_5 \ldots\ldots$$

worin die beiden Glieder des gleichen Ausdruckes im Allgemeinen stets das gleiche Zeichen haben. Die senkrechten Abstände der Kurvenebenen $b' b'_n$ und $(b^3)(b^3_n)$, $(b^3)(b^3_n)$ und $(b^5)(b^5)$ . . . sind:

$$h_2 + h_4,\ h_4 + h_3,\ h_6 + h_5 \ldots\ldots$$

Da die erstern Ausdrüeke stets einen kleinern Werth haben, als die letztern, niemals grösser, höchstens gleich denselben werden können, wenn nämlich die Abstände h_1, h_3, h_5 . . . gleich Null sind, so folgt daraus, dass die Ebenen von je zwei und zwei benachbarten ungeraden Umstülpungskurven einander durch die Umstülpung beliebig genähert werden können, indem man den zwischenliegenden geraden Kurven verschiedene Stellungen giebt; dass aber keine Umstülpungsart möglich ist, durch welche die Entfernungen jener Ebenen grösser gemacht werden könnten, als sie auf der ursprünglichen nicht umgestülpten Fläche sind. So lassen sich z. B. die ungeraden Kurvenebenen leicht in eine einzige zusammenführen, d. h. ihre Entfernungen von einander nach der Umstülpung auf Null reduziren; man braucht zu diesem Zwecke nur:

$$h_{,} = h_2\,,\ h_3 = h_4\,,\ h_5 = h_6 \ldots\ldots$$

zu machen. Die Berglinien sämmtlicher Wellen liegen alsdann in einer Ebene; die Thallinien würden ebenfalls in einer Ebene liegen, wenn auch noch:

$$h_{,} = h_3 = h_5 \ldots\ldots$$

gemacht worden wäre. Die Gestalt der in diesem Falle erhaltenen Fläche zeigt im Durchschnitt Fig. 9.

8) Alles bisher über diese mehrfachen Umstülpungen Gesagte gilt nun auch dann noch, wenn je zwei benachbarte Umstülpungskurven nicht mehr in endlicher, sondern nur noch in unendlich kleiner Entfernung von einander liegen; wenn man sich nicht bloss eine endliche, sondern eine unendliche grosse Zahl derartiger Umstülpungen ausgeführt denkt. Als Ergebniss derselben aber erhält man jetzt nicht bloss Flächen, welche, wie die bisher betrachteten, wellenförmig gestaltet sind, sondern solche, bei welchen diese Wellen wieder verschwinden, und dagegen aber andere, neue Formen auftreten.

Sind nämlich die Ebenen je zweier benachbarten Umstülpungskurven unendlich wenig von einander entfernt, so sind die Grössen $h_{\prime}$, h_2, $h_3 \ldots$, und mithin auch die in Nro. 7 aufgeführten Differenzen $h_2-h_{\prime}$, $h_n-h_s \ldots$ ebenfalls unendlich klein, d. h. es sind auch die Ebenen je zweier benachbarten ungeraden Kurven unendlich nahe beisammen. Alsdann aber sind, wie leicht einzusehen ist, im Allgemeinen auch die normalen Abstände der benachbarten ungeraden Kurven selbst unendlich klein. Da aber eine unendlich grosse Zahl von Kurven, von denen je zwei benachbarte überall einen unendlich kleinen normalen Abstand haben, als eine zusammenhängende Fläche betrachtet werden können, so bilden auch die ungeraden Umstülpungskurven $b' b'_n$, $b^3 b^3_n$, $b^5 b^5_n \ldots$ Fig. 8 eine einzige ungetrennte Fläche.

Es ergiebt sich sofort, dass man ganz ähnliche Behauptungen auch von den geraden Kurven $b_2 b_{2n}$, $b_4 b_{4n} \ldots$ aufstellen kann, und dass daher auch diese eine ungetrennte Fläche mit einander bilden, welche überdies überall in unendlich kleinem normalem Abstande von der erstern liegt. Man kann desshalb auch die beiden Flächen als eine einzige, gleichsam als eine Fläche von doppelter, unendlich kleiner Dicke betrachten, welche durch die beschriebenen Umstülpungen aus der ursprünglichen Fläche hervorgegangen ist.

Es ist nicht schwer, einige wesentliche Eigenschaften dieser neuen Fläche anzugeben. Da indessen die ursprüngliche Fläche ihrer Gestalt nach ganz unbestimmt gelassen wurde, so werden auch die Eigenschaften der neuen Fläche, soweit sie aus dem bisher Bekannten abgeleitet werden können, vorzugsweise in gewissen Beziehungen derselben zur ursprünglichen Fläche bestehen, weniger aber von absoluter Natur sein. Charakteristisch sind folgende, in diesem Sinne aufgefasste Eigenschaften:

a) Alle ebenen Schnittkurven der gegebenen Fläche, welche man parallel zu den gedachten Umstülpungskurven führen kann, bleiben auf der neuen Fläche ihrer Gestalt nach unverändert, und die geraden Verbindungslinien der einander entsprechenden Punkte zweier gleichen Schnittkurven der beiden Flächen sind unter sich gleich lang und senkrecht auf der Ebene der Kurven.

b) Die Ebenen zweier derartigen Schnittkurven der neuen Fläche können in beliebigem Grade näher beieinander liegen, als die Ebenen der gleichen Kurven auf der ursprünglichen Fläche; niemals aber können sie dort weiter von einander entfernt sein als hier. Die ganze neue Fläche wird also auf das Auge den Eindruck machen, als sei sie aus der ursprünglichen durch Zusammenquetschung in einer Richtung, aber ohne eine Ausdehnung oder eine andere Veränderung in irgend einer andern Richtung, entstanden. Die orthogonale Projektion der neuen Fläche auf einer zu den Schnittkurven parallelen Ebene wird daher mit der orthogonalen Projektion der ursprünglichen Fläche auf der gleichen Ebene identisch sein; dagegen erscheinen auf einer dazu senkrechten Projektionsebene die Schnittkurven der neuen Fläche als parallele Gerade, welche näher beisammen, die der ursprünglichen Fläche als gleich lange parallele Gerade, welche weiter von einander entfernt liegen.

c) Der Flächeninhalt der neuen Fläche ist stets kleiner, als derjenige der ursprünglichen. Die kleinste Grösse, welche er erhalten kann, ist gleich der Oberfläche der Projektion der gegebenen Fläche auf einer mit den Umstülpungskurven parallelen Ebene; dieser Fall tritt dann ein, wenn die gegebene Fläche durch die Umstülpungen selbst zu einer ebenen Figur zusammengequetscht wird.

d) Vergleicht man die Berührungsebenen, welche man an zwei einander entsprechende Punkte der ursprünglichen und der neuen Fläche legen kann, und betrachtet man dabei eine Ebene, welche zu den Umstülpungskurven parallel ist, als Projektionsebene, so haben die beiden Berührungsebenen auf dieser Projektionsebene parallele Spuren; die Berührungsebene der neuen Fläche aber bildet mit der Projektionsebene einen kleinern Neigungswinkel als die Berührungsebene der ursprünglichen Fläche.

e) Die grösste und kleinste Krümmung in irgend einem Punkte der neuen Fläche kann grösser und kleiner sein, als in dem entsprechenden Punkte der ursprünglichen Fläche. Es finden indessen zwischen diesen Krümmungen und den unter d) genannten Neigungswinkeln der Berührungsebenen der betrachteten Punkte gewisse Beziehungen statt, welche hier zunächst nicht näher untersucht werden sollen.

9) Eine sehr grosse Manigfaltigkeit von Formen der durch unendlich viele Umstülpungen erzeugten Flächen erhält man, wenn man die Ebenen der Umstülpungskurven nicht, wie in Nro. 8, parallel annimmt, sondern voraussetzt, die Lage derselben soll sich nach irgend einem Gesetze verändern. Die Betrachtung derartiger Umstülpungen wird in vielen Fällen vereinfacht, wenn man wenigstens je eine ungerade zu der nächstfolgenden oder nächstvorhergehenden geraden Umstülpungsebene parallel annimmt. Eine einlässlichere Untersuchung dieser Operationen und ihrer Ergebnisse aber muss für diesesmal schon des Raumes wegen, den sie beanspruchen würde, unterbleiben.

10) Um eine Andeutung über die Anwendungen der sämmtlichen bisher gewonnenen Ergebnisse auf materielle Gegenstände zu machen, mag bemerkt werden, dass eine Reihe von oft sehr zusammengesetzten Formen, welche aus Blech getriebene Gefässe, Papier- und Tuchflächen unter der Einwirkung äusserer zufälliger Pressungen annehmen, zu den einfach oder mehrfach umgestülpten Flächen gehören. Dahin müssten z. B. viele Eindrücke, welche an Blechgefässen durch Stösse hervorgebracht worden, sehr viele Falten an gewebten oder papierartigen Stoffen gerechnet werden. Seltener dürften sich Anwendungen der, wenn nicht unendlich oft, doch sehr vielmal nach bestimmten Gesetzen wiederholten Umstülpungen finden.

Vielleicht bietet die organische Natur in den oft so schön zusammengefalteten, in den Knospen eingeschlossenen jungen Pflanzenblättern etwas ähnliches dar.

Es versteht sich indessen von selbst, dass bei allen diesen materiellen Flächen die oben besprochenen Gestalten nur mit derjenigen Annäherung realisirt werden können, die der Grad, in welchem sie die bisher vorausgesetzten und in Nro. 1 ausgesprochenen ideellen Eigenschaften besitzen, zulässig macht.

11) Schliesslich muss bemerkt werden, dass alle vorstehenden Betrachtungen als Einleitung zur Anwendung derselben auf die einzelnen Arten von Flächen angesehen werden können. Sowohl die Umstülpungen, welche bei Rotationsflächen, als auch diejenigen, welche bei Regelflächen vorkommen können, bieten manche eigenthümliche Verhältnisse dar, sollen aber vor der Hand in diesem Aufsatze nicht berücksichtigt werden.

Tagebuch über Erdbeben und andere Naturerscheinungen im Visperthal im Jahr 1863.

Von Pfarrer M. Tscheinen in Grächen.

Januar 3. [Windr.: NO–SW. O—W.] — Witterung: trüb, frisch, nach Mittag hat es zu schneien angefangen. Der Tributeinzieger in Grächen.

7. [Windr.: SW—NO.] — Witterung: trüb, Schneesturm. Gestern Abend hörte man das Tosen in der Luft vom Gugsen und heute wiederum; es fing an zu stürmen; während $4\frac{1}{2}$ Stunden fast 1 Schuh Schnee gefallen. Während hier es am

Umgestülpte Flächen.