Ueber die Methode der kleinsten Quadrate.

Von

Dr. A. Kurz.

In dem diesbezüglichen Capitel des Brünnow'schen Lehrbuches der sphärischen Astronomie, 2. Aufl., Berlin 1862, vermisste ich, wie beispielsweise die Anwendung der Determinanten beim Eliminationsgeschäfte, so im Allgemeinen die Durchsichtigkeit und Kürze neben der zu erreichenden Vollständigkeit, welche auch der Darlegung der allgemeinsten Aufgaben jener Methode gegeben werden sollen. Auf diese Aufgaben nun eintretend setze ich die Grundbegriffe der Methode voraus, welche bei der Behandlung der Aufgabe mit Einer Unbekannten sich ergeben, und worüber obiges Lehrbuch oder dessen hiehergehörige Quelle, die Aufsätze Encke's in den Berliner Ephemeriden 1834, 35, 36, nachgeschlagen werden mögen.

I. Eine Funktion von mehreren Unbekannten ist gegeben; zu berechnen sind die wahrscheinlichsten Werthe derselben aus den Resultaten wiederholter Beobachtungen; dazu noch die Angabe über die Genauigkeit der Resultate der Rechnung resp. der Beobachtung.

$$V = F(XYZ)$$

(diese Fixierung der Zahl der Unbekannten beeinträchtigt nicht die Allgemeinheit)

$M', M'' \ldots\ldots M^{(m)}$ seien die Resultate der m Beobachtungen anstatt

$V', V'' \ldots\ldots V^{(m)}$, so dass die Beobachtungsfehler

$v', v'' \ldots\ldots v^{(m)}$ existiren, $v' = V' - M', \ldots\ldots$

(die Anzahl der Beobachtungen grösser als diejenige der Unbekannten).

Man habe sich, etweder aus der Behandlung von drei oder mehreren M oder aus anderen Untersuchungen, solche genäherte Werthe $X_0\, Y_0\, Z_0$ verschafft, dass $X = X_0 + x$, $Y = Y_0 + y$, $Z = Z_0 + z$, und aus Taylor's Satz die lineare Funktion abgeleitet werden darf der noch unbekannten Correktionen $x\, y\, z$:

$$V = V_0 + ax + by + cz \tag{1}$$

worin $V_0 = F(X_0\, Y_0\, Z_0)$ und $a = \frac{d\,V_0}{d\,X_0}$, $b = \frac{d\,V_0}{d\,Y_0}$, $c = \frac{d\,V_0}{d\,Z_0}$.

Nach der Befriedigung dieser Gleichungen für die erste Beobachtung und die folgenden wird

$$V' = V'_0 + a'x + b'y + c'z$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder, wenn man die v einführt und der Kürze wegen $M' - V'_0 = n'$ setzt,

$$\left\{\begin{array}{l} v' = a'x + b'y + c'z - n' \\ v'' = a''x + b''y + c''z - n'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v^{(m)} = a^{(m)}x + b^{(m)}y + c^{(m)}z - n^{(m)} \end{array}\right. \qquad (m > 3) \tag{2}$$

Die wahrscheinlichsten Werthe $x_0\, y_0\, z_0$ der Correktionen werden nun gefunden, indem man die Summe der Quadrate der Beobachtungsfehler v, resp. der v_0, wie wir sie von da ab heissen wollen, zu einem Minimum macht; daher die Minimumsgleichungen

(3) $[a v_0] = 0, \quad [b v_0] = 0, \quad [c v_0 = 0] = 0$ *)

[ ] diene als Summenzeichen auch fortan, und werden innerhalb desselben die darauf bezüglichen Indices weggelassen.

Oder aus (3) und (2), mit Anwendung der soeben motivierten Suffixe (Null) in den ersteren Gleichungen:

$$(4) \quad \begin{cases} [a\,a]\,x_0 + [a\,b]\,y_0 + [a\,c]\,z_0 = [a\,n] \\ [b\,a]\,x_0 + [b\,b]\,y_0 + [b\,c]\,z_0 = [b\,n] \\ [c\,a]\,x_0 + [c\,b]\,y_0 + [c\,c]\,z_0 = [c\,n] \end{cases}$$

Daraus, wenn $\varrho_{11}, \ldots\ldots$ die Quotienten der Eliminationsdeterminante in ihre Unterdeterminanten genannt werden,

$$(5) \quad \begin{cases} x_0 = [an]\,\varrho_{11} + [bn]\,\varrho_{12} + [cn]\,\varrho_{13} \\ y_0 = [an]\,\varrho_{21} + [bn]\,\varrho_{22} + [cn]\,\varrho_{23} \\ z_0 = [an]\,\varrho_{31} + [bn]\,\varrho_{32} + [cn]\,\varrho_{33} \end{cases} \qquad (\varrho_{ik} = \varrho_{ki})$$

Diese Werthe in (1) eingesetzt erhält man

$$(6) \quad V_{00} = V_0 + a x_0 + b y_0 + c z_0$$

als den wahrscheinlichsten Werth von V, und somit der erste Theil der Aufgabe gelöst. **) —

Zur Genauigkeitsangabe bedarf man der restierenden Fehlerquadratsumme $[v_0\, v_0]$; multipliciert man zu dem Ende jede der Gleichungen (2) mit ihrem v_0 und addiert die so entstandenen m Gleichungen mit Rücksicht auf (3) so wird

---

*) Dieser Satz von der Summe der v_0 gilt jedoch nur, wenn alle Beobachtungen als von gleicher „Präcision" angenommen werden. Sind dagegen die Präcisionen verschieden und $h' h'' \ldots . h^{(m)}$ genannt, so muss man die Summe der Quadrate der hv zum Minimum machen. Diese Verallgemeinerung ändert demnach nichts im weiteren Calkul, sobald man die h den $v\ a\ b\ c\ n$ einmultipliciert denkt.

**) Für die Rechnung ist mit diesem V_{00} von (6) gleichbedeutend: $F(X_0 + x_0,\ Y_0 + y_0,\ Z + z_0)$.

$$[v_0 v_0] = -[n v_0] = -[n(ax_0 + by_0 + cz_0 - n)]$$

(7) $$[v_0 v_0] = [nn] - [an]x_0 - [bn]y_0 - [cn]z_0$$

(wofür einzig der numerische Werth $[nn]$ besonders zu berechnen ist).

Die Definition des mittlern Fehlers ε Einer Beobachtung liegt in der Gleichung

$$m\varepsilon^2 = [vv] \qquad \text{(die wahre Fehlerquadratsumme)},$$

und sind $\xi\,\eta\,\zeta$ die Abweichungen der wahren Correktionen xyz von den wahrscheinlichsten $x_0\,y_0\,z_0$, d. h.

$$x = x_0 + \xi,\ y = y_0 + \eta,\ z = z_0 + \zeta$$

so erhält man aus (2)

(8) $$\begin{cases} v' = v'_0 + a'\xi + b'\eta + c'\zeta \\ v'' = v''_0 + a''\xi + b''\eta + c''\zeta \\ \dots\dots\dots\dots \\ v^{(m)} = v_0^{(m)} + a^{(m)}\xi + b^{(m)}\eta + c^{(m)}\zeta \end{cases}$$

und, durch Multiplikation jeder dieser Gleichungen mit ihrem v und Addition,

$$[vv] = [v_0 v] + [av]\xi + [bv]\eta + [cv]\zeta$$

Darin ist

$$[v_0 v] = [v_0(v_0 + a\xi + b\eta + c\zeta)] = [v_0 v_0] + [av_0]\xi + [bv_0]\eta + [cv_0]\zeta$$
$$= [v_0 v_0] \qquad \text{(siehe (8) und (3))}$$

Folglich

$$[vv] = m\varepsilon^2 = [v_0 v_0] + [av]\xi + [bv]\eta + [cv]\zeta.$$

Kennte man hierin, wie das $[v_0 v_0]$ vermöge (7), so auch das Uebrige, so liesse sich ε berechnen. Nun weiss man wohl, dass $[av] = \varepsilon\sqrt{[aa]}$, $[bv] = \varepsilon\sqrt{[bb]}$, $[cv] = \varepsilon\sqrt{[cc]}$ (s. die Entwicklung dieses unserer Aufgabe vorausgehenden Satzes der Theorie in Brünnow S. 52, 53, 54). Und zur annähernden Bestimmung der von einander unabhängigen $\xi\,\eta\,\zeta$, zuerst des ξ, nehme man in (8)

$\eta = \zeta = 0$ an — diesen immerhin als möglich zu denkenden und für die Genauigkeit von x_0 gerade ungünstigsten Fall müssen wir hiebei in der That annehmen —, multipliciere die so modificierten (8) mit den respektiven a und addiere; dann erhält man, mit diesem Calkul die Schreibung $\xi'\, \eta'\, \zeta'$ verbindend:

$$[av] = [av_0] + [aa]\,\xi'$$

und aus Letztgenanntem und (3)

$$\varepsilon \sqrt{[aa]} = [aa]\,\xi'$$

also

$$\xi' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[aa]}} \text{ und analog } \eta' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[bb]}},\ \zeta' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[cc]}} \tag{9}$$

und mit Benutzung dieser beiderlei Gleichsetzungen

$$m\,\varepsilon^2 = [v_0 v_0] + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon^2$$

woraus

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[v_0 v_0]}{m-3}} \qquad (m-\mu \text{ bei } \mu \text{ Unbekannten}) \tag{10}$$

Gemäss der Entstehung in (9) spielen die $\xi'\, \eta'\, \zeta'$ daselbst die Rollen der mittleren Fehler der Correktionen $x\, y\, z$, als deren wahrscheinlichste Werthe sich $x_0\, y_0\, z_0$ ergeben haben. Diese mittleren Fehler sind daher jetzt, gemäss (10), zugleich mit dem mittleren Fehler Einer Beobachtung bestimmt.

Endlich ist der mittlere Fehler von V_{00} (6) erhältlich aus (1), wofür

$$V = V_0 + a(x_0 + \xi) + b(y_0 + \eta) + c(z_0 + \zeta) = V_{00} + a\xi + b\eta + c\zeta$$

geschrieben wird; nach dem schon einmal angezogenen Satze ist dieser mittlere Fehler

$$\sqrt{a^2\xi'^2 + b^2\eta'^2 + c^2\zeta'^2},$$

oder gemäss (9)

$$\varepsilon \sqrt{\frac{a^2}{[aa]} + \frac{b^2}{[bb]} + \frac{c^2}{[cc]}} \tag{11}$$

Anmerkung 1. Die wahrscheinlichen Fehler, die Gewichte etc. etc. stehen zu den respektiven mittleren Fehlern in denselben Beziehungen wie bei den Aufgaben mit Einer Unbekannten.

Anmerkung 2. Die als Probemittel sich empfehlende Spezialisierung des Durchgeführten für den Fall Einer Unbekannten ist leicht.

Kürzer fassen wir nunmehr die Behandlung noch einer anderen Art von Aufgaben:

II. Die beobachteten resp. die korrigierten Werthe der Unbekannten sollen gegebenen Bedingungsgleichungen strenge genügen.

(Beispiel: die Winkel eines Dreieckes oder Dreiecksystemes.)

Seien $w_1\, w_2 \ldots\ldots w_q$ die wahren Werthe der q Unbekannten,
$v_1\, v_2 \ldots\ldots v_q$ die beobachteten,
$h_1\, h_2 \ldots\ldots h_q$ die betreffenden Präcisionen,
$x_1\, x_2 \ldots\ldots x_q$ die wahren Fehler, so dass

$$(1)\qquad w_1 = v_1 + x_1,\ w_2 = v_2 + x_2,\ \cdots\cdots\cdots,\ w_q = v_q + x_q$$

Die strenge zu erfüllenden Bedingungsgleichungen, der Anzahl nach s, wobei

$$(2)\qquad q = s + t,$$

seien

$$(3)\qquad \begin{cases} f_1(w_1 \cdots\cdots w_q) = 0 \\ f_2(w_1 \cdots\cdots w_q) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_s(w_1 \cdots\cdots w_q) = 0 \end{cases}$$

Statt dieser liefere die Beobachtung

$$(4)\quad \begin{cases} f_1(v_1 \cdot \cdots \cdot v_q) = n_1 \\ f_2(v_1 \cdot \cdots \cdot v_q) = n_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_s(v_1 \cdot \cdots \cdot v_q) = n_s \end{cases}$$

Bei der Verwandlung in die lineare Form werde ferner gesetzt

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{df_1}{dv_1} = a_{1,1}, \; \frac{df_1}{dv_2} = a_{1,2}, \cdots\cdots, \frac{df_1}{dv_q} = a_{1,q} \\ \frac{df_2}{dv_1} = a_{2,1}, \; \frac{df_2}{dv_2} = a_{2,2}, \cdots\cdots, \frac{df_2}{dv_q} = a_{2,q} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{df_s}{dv_1} = a_{s,1}, \; \frac{df_s}{dv_2} = a_{s,2}, \cdots\cdots, \frac{df_s}{dv_q} = a_{s,q} \end{cases}$$

und man erhält

$$(6)\quad \begin{cases} n_1 + [a_{1,q} \cdot x_q]_q = 0 \\ n_2 + [a_{2,q} \cdot x_q]_q = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ n_s + [a_{s,q} \cdot x_q]_q = 0 \end{cases}$$

(die Summe $[\,]_q$ bezieht sich auf $q = 1, 2, \cdots\cdots, q$)

Zur Auffindung der wahrscheinlichsten Correktionen x — von jetzt an können diese so bezeichnet werden, da die wahren nicht mehr vorkommen werden — muss $[h_q{}^2 x_q{}^2]_q$ zum Minimum werden, d. h. also

$$(7)\quad [h_q{}^2 x_q \cdot dx_q]_q = 0.$$

Zur Verbindung von (7) mit (6) erhält man aus diesen letzteren durch Differentiation

$$(8)\quad \begin{cases} [a_{1,q} \cdot dx_q]_q = 0 \\ [a_{2,q} \cdot dx_q]_q = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ [a_{s,q} \cdot dx_q]_q = 0. \end{cases}$$

Mittelst (8) werden in (7) s Differentiale eliminiert, und es bleiben also noch t von einander unabhängige (siehe (2)). Die Nullsetzung jedes Coeffizienten der letzteren liefert t Gleichungen, denen wir die Nummer (9) beilegen wollen.

Aus (9) und (6) lassen sich alsdann die x berechnen. Und mit diesen ergiebt sich der mittlere Fehler Einer Beobachtung für die Präcision 1:

(10) $$\varepsilon = \sqrt{\frac{[h_q^2 x_q^2]_q}{s}}$$ siehe noch III (17) und (18)

(siehe I (10); die Anzahl der mittleren Fehler ist q, die Anzahl der unabhängigen Unbekannten t, also der Nenner $q - t = s$.)

Zur Controlle könnte dienen die Berechnung der mittleren Fehler der f, deren wahre, die n, bekannt sind. Nennt man diese mittleren Fehler beziehungsweise $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots \ldots \varepsilon_s$, so ergiebt sich

(11) $$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1 = \varepsilon \sqrt{[a_{1,q}{}^2 : h_q{}^2]_q} \\ \varepsilon_2 = \varepsilon \sqrt{[a_{2,q}{}^2 : h_q{}^2]_q} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varepsilon_s = \varepsilon \sqrt{[a_{s,q}{}^2 : h_q{}^2]_q} \end{array}\right.$$

Bei grösserem s z. B. dürfte man unter Anderem erwarten, wenn man die respektiven wahrscheinlichen Fehler r ($= 0{,}674489\, \varepsilon$) bildet, dass ungefähr eben so viele n über als unter den zugehörigen r liegen.

III. Um in die so eben angedeutete Lösung II näher einzutreten, trennen wir die q Elemente wirklich in die 2 Gruppen von der Anzahl s und t, und nennen zur Unterscheidung von den Elementen x der ersteren Gruppe die Elemente der zweiten Gruppe y; dessgleichen unterscheiden wir die Coeffizienten a und b und die Präcisionen h und k; so dass statt (6) kommen

$$(12)\quad \begin{cases} n_1 + [a_{1,s}\, x_s]_s + [b_{1,t}\, y_t]_t = 0 \\ n_2 + [a_{2,s}\, x_s]_s + [b_{2,t}\, y_t]_t = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ s \text{ Gleichungen} \end{cases}$$

und statt (7)

$$(13)\quad [h_s^2 x_s dx_s]_s + [k_t^2 y_t dy_t]_t = 0$$

(12) nach den x aufgelöst

$$(14)\quad \begin{cases} x_1 = [\beta_{1,t}\, y_t]_t + \nu_1 \\ x_2 = [\beta_{2,t}\, y_t]_t + \nu_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_s = [\beta_{s,t}\, y_t]_t + \nu_s. \end{cases}$$

Mittelst dieser Gleichungen alles auf die x Bezügliche aus (13) eliminiert, erhält man aus der Nullsetzung der Faktoren der dy:

$$(15)\quad \begin{cases} (k_1^2 + [h_s^2\beta_{s,1}\,\beta_{s,1}\,]_s)y_1 + [h_s^2\beta_{s,1}\,\beta_{s,2}\,]_s y_2 + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \qquad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot + [h_s^2\beta_{s,1}\,\beta_{s,t}\,]_s y_t + [h_s^2\beta_{s,1}\,\nu_s]_s = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ [h_s^2\beta_{s,t}\,\beta_{s,1}\,]_s y_1 + [h_s^2\beta_{s,t}\,\beta_{s,2}\,]_s y_2 + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \qquad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot + (k_t^2 + [h_s^2\beta_{s,t}\,\beta_{s,t}\,]_s)y_t + [h_s^2\beta_{s,t}\,\nu_s]_s = 0 \end{cases}$$

Man wird sonach aus (15) die y und mit Hülfe derer aus (14) die x erhalten.

Wollte man eine zweite Näherung der wahrscheinlichsten Werthe an die wahren bewerkstelligen, so hat es den Anschein, als müsste man die korrigierten Werthe $v + x$, $v + y$ der ersten Rechnung für die Wiederholung des ganzen Geschäftes II resp. III zu Grunde legen. Indessen, wenn man bedenkt, dass die β nur aus den a und b in (12) auf bekannte Weise zusammengesetzt und in (14) und (15) in die k l e i n e n y multipliciert sind, dass also die aus den Aenderungen der β hervorgehenden Zusatzglieder ein entsprechend Kleines der 2. Ordnung ausmachen; so sieht man ein, dass und unter welchen Umständen bei der zweiten Näherung die nämlichen β wie bei der ersten benützt werden dürfen. Dagegen die n resp. die Zähler der v würden neu berechnet werden müssen.

Die v lassen sich aber aus (14) und (15) eliminieren, was besonders um des Folgenden nun geschehen soll: Man multipliciere die Gleichung (14) beziehungsweise mit $h_1{}^2\beta_{1,1}$, $h_1{}^2\beta_{2,1}$ . . . . . . , $h_s{}^2\beta_{s,1}$ und addiere sie unter gleichzeitiger Ordnung nach den y, dann erhält man mit Benutzung von (15) eine und analog auch die anderen der Gleichungen

$$(16) \quad \begin{cases} k_1{}^2 y_1 + [h_s{}^2\beta_{s,1}\, x_s]_s = 0 \\ k_2{}^2 y_2 + [h_s{}^2\beta_{s,2}\, x_s]_s = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_t{}^2 y_t + [h_s{}^2\beta_{s,t} \cdot x_s]_s = 0. \end{cases}$$

Häufiger als zur besagten zweiten Annäherung desselben Systemes wird man in den Fall kommen, ein System „ausgleichen" zu müssen, wovon ein bereits ausgeglichenes Theilsystem vorliegt.

In diesem Falle kann man nun die x aus den Ausgleichungen des Theilsystemes wählen — beziehungsweise aus sonstigen vorläufigen Rechnungen — und mit Hülfe dieser aus (16) die y berechnen. Diese x und y den v zusetzend macht man alsdann mit den auf diese Weise vorläufig verbesserten v die Ausgleichung des ganzen Systemes, d. i. man findet aus den Gleichungen (14) und (15) die (neuen und besseren) Correktionen des ganzen Systemes, wobei die β der Gleichungen (16), wie bemerkt, beibehalten werden können.

Berechnet man dagegen das grosse System ohne Benützung des kleinen, so erspart man nur den Rechnungsaufwand der Einrichtung und Auflösung der

Gleichungen (16) (die Berechnung der β ist nicht mitzuzählen), welcher Aufwand somit häufig gering sein wird gegenüber dem Vortheile der durch ihn erzielbaren vollkommeneren Ausgleichung. —

Die Gleichungen (16) gestatten ferner eine bequemere Fassung der restierenden Fehlerquadratsumme $[h_q^2 x_q^2]_q$ (siehe II (10)):

Man findet durch geeignete Multiplikation, Addition und Ordnung aus den Gleichungen (14)

$$[h_s^2 x_s^2]_s = [h_s^2 \cdot \beta_{s,1}\, x_s]_s y_1 + [h_s^2 \cdot \beta_{s,2} \cdot x_s]_s y_2 + \cdot \cdot \cdot$$
$$\cdot \cdot \cdot + [h_s^2 \cdot \beta_{s,t} \cdot x_s]_s y_t + [h_s^2 \nu_s x_s]_s$$

und vermöge (16)

$$[h_s^2 x_s^2]_s = - [k_t^2 y_t^2]_t + [h_s^2 \cdot \nu_s x_s]_s$$

oder, alle x und y wiederum x nennend und von 1 bis q zählend,

$$(17) \qquad [h_q^2 x_q^2]_q = [h_s^2 \nu_s^2 x_s]_s$$

welcher Ausdruck also nur mehr s Glieder statt q zu bilden erheischt. Setzt man in demselben die x der Gleichungen (14) ein und ordnet nach den y, so ergiebt sich

$$(18) \quad [h_q^2 x_q^2]_q = [h_s^2 \nu_s^2]_s + [h_s^2 \cdot \beta_{s,1} \cdot \nu_s]_s y_1 + [h_s^2 \cdot \beta_{s,2} \cdot \nu_s]_s y_2 + \cdot \cdot \cdot$$
$$\cdot \cdot \cdot + [h_s^2 \cdot \beta_{s,t}\, \nu_s] y_t$$

wofür einzig der numerische Werth $[h_s^2 \nu_s^2]_s$ noch zu berechnen ist (das Uebrige in und aus (15)). Insoferne indessen die Berechnung des Ausdruckes in (17) nicht umständlicher ist als die Berechnung jenes einzelnen Bestandtheiles in (18), wird man (17) vorziehen.

Besonders wurde die Gleichung (18) noch angeführt wegen ihrer Uebereinstimmung mit der Gleichung (7) in I. Dort sind es 3 unabhängige Unbekannte, hier t; dort sind in (2) die Beobachtungszahlen n negativ eingeführt, und die Präcisionen den $v\,a\,b\,c\,n$ einmultpliciert gedacht, womit man III (14) vergleichen möge.

IV. Wie die eben vorgeführte Methode der Lösung der Aufgabe II an den Namen des Hansen geknüpft ist, so nennen wir die nun folgende Methode für diese Aufgabe die Gauss-Bessel'sche.

Man multipliciere II (8) beziehungsweise mit den unbestimmten „Correlaten" $A_1 \ldots\ldots A_s$, addiere dazu die Gleichung (7) und ordne nach den q Differentialen dx. Die Coefficienten dieser gleich Null gesetzt, giebt q Gleichungen, welche im Vereine mit den s Gleichungen (6) die $(q+s)$ Grössen A und x bestimmen lassen. Man hat demnach:

$$(1)\quad \begin{cases} h_1^2 x_1 + [a_{s,1} \cdot A_s]_s = 0 \\ h_2^2 x_2 + [a_{s,2} \cdot A_s]_s = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_q^2 x_q + [a_{s,q} \cdot A_s]_s = 0 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} n_1 + [a_{1,q} x_q]_q = 0 \\ n_2 + [a_{2,q} \cdot x_q]_q = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n_s + [a_{s,q} \cdot x_q]_q = 0 \end{cases}$$

Die Elimination der A aus (1) würde die Gleichungen (16) liefern (darin statt der y die x von 1 bis q gezählt).

Dagegen eliminieren wir jetzt die x, indem wir die Gleichungen (1) beziehungsweise mit

$$\frac{a_{1,1}}{h_1^2},\ \frac{a_{1,2}}{h_2^2},\ \ldots\ldots\ \frac{a_{1,q}}{h_q^2}$$

multiplicieren und nach den A ordnend addieren, mit Rücksicht auf (2).

So erhalten wir die erste und analog die folgenden der Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} \left[\frac{a_{1,q}\cdot a_{1,q}}{h_q^2}\right]_q\cdot A_1+\left[\frac{a_{1,q}\cdot a_{2,q}}{h_q^2}\right]_q\cdot A_2+\ldots+\left[\frac{a_{1,q}\cdot a_{s,q}}{h_q^2}\right]_q\cdot A_s=n_1 \\ \left[\frac{a_{2,q}\cdot a_{1,q}}{h_q^2}\right]_q\cdot A_1+\left[\frac{a_{2,q}\cdot a_{2,q}}{h_q^2}\right]_q\cdot A_2+\ldots+\left[\frac{a_{2,q}\cdot a_{s,q}}{h_q^2}\right]_q\cdot A_s=n_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left[\frac{a_{s,q}\cdot a_{1,q}}{h_q^2}\right]_q\cdot A_1+\left[\frac{a_{s,q}\cdot a_{2,q}}{h_q^2}\right]_q\cdot A_2+\ldots+\left[\frac{a_{s,q}\cdot a_{s,q}}{h_q^2}\right]_q\cdot A_s=n_s \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen bestimmt man die A und alsdann aus den Gleichungen (1) die x. —

In Betreff einer der endlichen Ausgleichung vorangehenden „unvollkommenen“ Ausgleichung gilt das Wesentliche des in III Gesagten ohne Weiteres. Man denke sich wiederum vorerst ein und dasselbe System als ein zum zweiten Male auszugleichendes, so würde man die a vom ersten Male belassen, dagegen die n würden neue und folglich auch die A. (Man bemerke, dass aus (3) die A als lineare Funktionen der kleinen n hervorgehen, deren Coeffizienten aus den a und h zusammengesetzt sind.) Oder aber, man könne und wolle ein ausgeglichenes Theilsystem des ganzen auszugleichenden Systemes benutzen, so kann man sich wieder der Gleichungen (16) bedienen, und die a — dort theilweise b genannt und in den β enthalten — für die letzten Gleichungen (3) von dorther entnehmen.

Die restierende Fehlerquadratsumme lässt sich ferner, ähnlich wie bei (17) und (18), bequemer ausdrücken. Man multipliciere die Gleichungen (1) bezüglich mit $x_1, x_2, \ldots, x_q$, addiere unter Ordnung nach den A und mit Rücksicht auf (2), so erhält man

$$(4)\qquad [h_q^2 x_q^2] = [A_s n_s]_s$$

V. Kurze Vergleichung des Rechnungsaufwandes beider Methoden:

Es erfordert die

Hansen'sche Methode II, III.:	Gauss-Bessel'sche Methode IV.:
Die Bildung der β aus den a und b, und der ν aus den a und n in (14).	— — — — — —
Die Bildung der $s \, . \, t\,(t+1)$ Produkte in (15).	Die Bildung der $s \, . \, s(s+t)$ Produkte in (3).
Die Auflösung der t Gleichungen (15).	Die Auflösung der s Gleichungen (3).
Die Bildung der $s \, . \, t$ Produkte in (14).	Die Bildung der $s\,(s+t)$ Produkte in (1).

Erwägt man den verhältnissmässig bedeutenden Aufwand bei der Berechnung der β und ν, so wird man die Gauss-Bessel'sche Methode in den meisten Fällen günstiger gestellt finden; so zwar, dass nur in dem Falle $t < s$ die geringere Zahl der aufzulösenden Gleichungen (15) statt (3) jenen Mehraufwand mag ausgleichen können.

VI. Zum Schlusse mögen beide Methoden auf das Beispiel angewendet werden, dass man die drei Winkel eines ebenen Dreieckes beobachtet und hieraus die wahrscheinlichsten Werthe derselben zu berechnen habe.

Es seien $w_1 \; w_2 \; w_3$ die wahren Winkel (die unbekannten),

$v_1 \; v_2 \; v_3$ die beobachteten Winkelwerthe,

$x_1 \; x_2 \; x_3$ die wahren Fehler der letzteren (1)

$$w_1 = v_1 + x_1, \; \ldots \ldots,$$

$p_1 \; p_2 \; p_3$ die betreffenden Repetitionszahlen (v_1 sei durch p_1 malige Repetition gefunden, ...).

Die zu erfüllende Bedingungsgleichung ist

$$f(w_1, w_2, w_3) \equiv w_1 + w_2 + w_3 - 180^\circ = 0 \tag{2}$$

und statt deren finde man

$$v_1 + v_2 + v_3 - 180^\circ = n \tag{3}$$

(2) nach Taylor's Theorem mit Hülfe von (1) und (3) entwickelt, giebt

$$n + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \tag{4}$$

Die Repetitionszahlen p sind der Theorie zufolge gleichbedeutend mit den „Gewichten" der drei Winkelbeobachtungen, d. i. auch gleichbedeutend mit den Quadraten der betreffenden „Präcisionen". Folglich ist die Bedingung zur Auffindung der wahrscheinlichsten Fehler der drei v, wenn wir von jetzt an diese wahrscheinlichsten Fehler $x_1\ x_2\ x_3$ nennen wollen,

$$p_1x_1^2 + p_2x^2 + p_3x_3^2 \text{ ein Minimum, d. i.}$$

$$p_1x_1dx_1 + p_2x_2dx_2 + p_3x_3dx_3 = 0 \tag{5}$$

Zur Vereinigung mit dieser Gleichung die Gleichung (4) differenziert:

$$dx_1 + dx_2 + dx_3 = 0. \tag{6}$$

Nach der Hansen'schen Methode eliminieren wir nun aus (5) und (6) das dx_3 und finden

$$(p_1x_1 - p_3x_3)\, dx_1 + (p_2x_2 - p_3x_3)\, dx_2 = 0 \tag{7}$$

und aus der Nullsetzung jedes der beiden eingeklammerten Faktoren sofort

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{p_1} : \frac{1}{p_2} : \frac{1}{p_3} \tag{8}$$

und endlich mit Benutzung von (4)

$$x_1 = -\frac{n}{p_1N},\ x_2 = -\frac{n}{p_2N},\ x_3 = -\frac{n}{p_3N},\ N = \frac{1}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}} \tag{9}$$

(die Fehler umgekehrt proportional den Repetitionszahlen, wie zu erwarten war.)

Nach der Gauss-Bessel'schen Methode addiert man (5) zu der mit der „Correlate“ A multiplicierten Gleichung (6), findet also

$$(7') \qquad (p_1x_1 + A)\,dx_1 + (p_2x_2 + A)\,dx_2 + (p_3x_3 + A)\,dx_3 = 0$$

und bestimmt A, $x_1\ x_2\ x_3$ aus dem Systeme der Gleichungen (4) und

$$(8') \qquad p_1x_1 + A = 0, \quad p_2x_2 + A = 0, \quad p_3x_3 + A = 0$$

woraus die Gleichungen (9) entspringen.

Die restierende Fehlerquadratsumme $[p_3x_3{}^2]_3$ ergiebt sich als $\frac{n^2}{N}$, also der mittlere Fehler für die Präcision 1, d. i. hier für eine Winkel-Einstellung ohne Repetition:

$$(10) \qquad \varepsilon = \frac{n}{\sqrt{N}}$$

folglich der mittlere Fehler eines p-mal repetierten Winkels $\frac{n}{\sqrt{pN}}$.

Endlich soll noch auf den Vortheil der Symmetrie in der Gauss-Bessel'schen Methode hingewiesen sein.

Zug, im Mai 1863.