Ueber eine Anwendung der imaginären Grössen in der Mechanik

von

Prof. Dr. H. Durège.

Der geometrischen Interpretation der imaginären Grössen ist bekanntlich eine mechanische Deutung, wenigstens in einem speciellen Falle, vorhergegangen. Fresnel war es, der schon im Jahre 1823 die Gesetze der totalen Reflexion dadurch entdeckte, dass er die bei derselben auftretende complexe Schwingungsamplitude in einer solchen Weise interpretirte, dass dadurch eine Uebereinstimmung mit den Beobachtungen erzielt wurde. Diese mechanische Anwendung der imaginären Grössen steht aber vereinzelt da und es liegt nahe, sich die Frage zu stellen, ob Fresnel's Erklärungsweise als eine Folge der jetzt allgemein angenommenen geometrischen Deutung zu betrachten ist, oder ob dieselbe als eine davon verschiedene angesehen werden muss. Es soll nun im Folgenden untersucht werden, welche Folgerungen sich aus der Bestimmung der Lage eines Punktes mittelst complexer Grössen für die Bewegung eines solchen ziehen lassen; dann wird sich aber ergeben, dass einer complexen Schwingungsamplitude eine ganz andere Bedeutung beizulegen ist, als die von Fresnel angenommene, und dass daher die Erklärungsweise des letztern als eine von jener Deutung verschiedene betrachtet werden muss.

Die Principien der Anwendung der imaginären Grössen auf die Mechanik sind zwar schon in der Abhandlung von Siebeck, „Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen" (Crelle's Journal, Bd. 55), angedeutet worden; es wird aber vielleicht nicht überflüssig sein, sie hier noch einmal in bestimmter Weise hervorzuheben.

Die Bewegung eines Punktes in der Ebene ist vollständig bestimmt, sobald die rechtwinkligen Coordinaten desselben als Functionen der Zeit ausgedrückt sind; bezeichnen aber x und y diese Coordinaten, so wird durch den complexen Ausdruck

$$z = x + iy$$

die Lage des Punktes angegeben, welche zweien zusammengehörigen, zu derselben Zeit stattfindenden Werthen von x und y entspricht. Sind daher die letzteren Functionen der Zeit, so kann für jeden Augenblick der Werth von z, also auch die Lage des Punktes angegeben werden. Wenn daher z als complexe Function der Zeit ausgedrückt ist, so wird dadurch die Bewegung in der Ebene vollständig dargestellt. Die Zeit ist eine veränderliche Grösse, welche ihrer Natur nach nur reelle Werthe annehmen kann, da sich mit einem imaginären Zeitmoment wohl kaum eine klare Vorstellung verbinden lässt. Bezeichnet man nun die Zeit mit t, und mit a, b, c etc. reelle oder complexe Constanten, so lässt sich jeder Ausdruck von der Form

$$(1) \qquad z = f(t, a, b, c, \dots .)$$

immer auf die Form

$$z = x + iy$$

bringen, in welcher x und y reelle Functionen von

t bedeuten. So lange nun die Constanten a, b, c etc. reelle Werthe haben, wird immer $y = o$, und die Gleichung (1) stellt dann eine in der x-Axe vor sich gehende gradlinige Bewegung dar. Gestattet man aber den Constanten, complexe Werthe anzunehmen, so kann durch die Gleichung (1), also durch eine complexe Function einer reellen Veränderlichen jede beliebige Bewegung in der Ebene dargestellt werden.

Das Differential dz stellt eine unendlich kleine, auch der Richtung nach bestimmte Aenderung des Ortes des beweglichen Punktes dar. Durch den Differentialquotienten $\frac{dz}{dt}$, als dem Grenzwerthe des Verhältnisses zwischen einer Zeitänderung und der ihr entsprechenden Ortsveränderung wird daher die Geschwindigkeit in jedem Augenblicke und zwar nach Grösse und Richtung zugleich angegeben. Da auch

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\,\frac{dy}{dt}$$

ist, so folgt zugleich, dass die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn die Richtung der Tangente besitzt. Die Geschwindigkeit, welche mit v bezeichnet werden möge, ist im Allgemeinen auch eine Function von t. Bildet man wieder den Differentialquotienten $\frac{dv}{dt}$, so ist dieser der Grenzwerth des Verhältnisses zwischen einer Zeitänderung und der ihr entsprechenden Aenderung der Geschwindigkeit und giebt folglich die in jedem Augenblicke stattfindende Beschleunigung ebenfalls nach Grösse und Richtung zugleich an. Nimmt man, wie in der Folge immer geschehen soll, die Masse des beweglichen Punktes gleich Eins an, so wird durch $\frac{dv}{dt}$ oder $\frac{d^2z}{dt^2}$ auch die in jedem Augenblicke wirksame Kraft nach Grösse und Richtung dargestellt.

Bei der Anwendung dieser Grundsätze hat man den Vortheil, dass man in allen Fällen, in welchen die Kraft als eine Function von t oder z dargestellt werden kann, es nur mit einer einzigen Differentialgleichung zu thun hat, während sonst eine Bewegung in einer Ebene erst durch zwei Differentialgleichungen bestimmt ist.

Einige Beispiele mögen das Gesagte erläutern:

Es wirke gar keine Kraft auf den beweglichen Punkt. Dann ist die Differentialgleichung der Bewegung

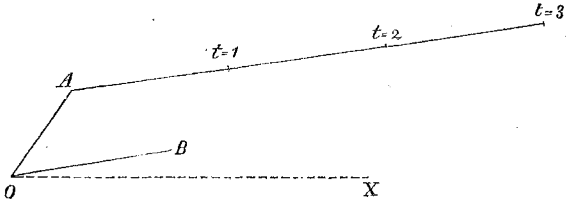
$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

und man erhält folglich durch Integration

$$\frac{dz}{dt} = b, \qquad z = a + bt,$$

worin a und b zwei im Allgemeinen als complex anzusehende willkürliche Constanten bezeichnen. Ihre Bedeutung ergiebt sich leicht, nämlich a giebt den Ort des Punktes zur Zeit $t = 0$, und b die constante Geschwindigkeit nach Grösse und Richtung an. Die Bewegung ist daher gleichförmig und geradlinig; sind

Fig. 1.



nämlich A und B die durch die complexen Werthe von a und b gegebenen Punkte und O der Nullpunkt, so bewegt sich der Punkt in einer durch A gehenden mit OB parallelen Geraden so, dass in jeder Zeiteinheit eine Strecke gleich OB durchlaufen wird.

Es wirke eine nach Richtung und Grösse constante Kraft. Bezeichnet die complexe Grösse c diese Kraft, so hat man

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = c$$

und folglich

$$\frac{dz}{dt} = b + ct, \qquad z = a + bt + \frac{1}{2} c t^2,$$

worin a und b wiederum zwei willkürliche complexe Constanten bezeichnen, deren Bedeutung sich leicht dahin ergiebt, dass a den Ort des Ausgangspunktes und b die Anfangsgeschwindigkeit nach Grösse und Richtung bedeutet.

Durch die letzte Gleichung wird, wie auf verschiedene Weise gezeigt werden kann, die Wurf-Parabel dargestellt. Man kann auch durch eine Coordinatenverwandlung das Resultat sogleich in seiner einfachsten Gestalt erhalten. Zunächst verlegen wir den Nullpunkt in den Punkt A, indem wir z für $z - a$ schreiben; dadurch geht die Gleichung über in

$$z = bt + \frac{1}{2} c t^2.$$

Alsdann drehe man die x-Axe so, dass sie mit der Richtung der Kraft c zusammenfällt. Setzt man

$$c = g e^{iC},$$

wo g und C reell sind, so geschieht dies durch Multiplication mit e^{-iC}, wodurch man

$$z e^{-iC} = b\, e^{-iC} t + \frac{1}{2} g t^2,$$

oder wenn man

$$z e^{-iC} = z', \qquad b\, e^{-iC} = b'$$

setzt

$$z' = b' t + \frac{1}{2} g t^2$$

erhält; und dann haben z' und b' die nämliche Bedeutung in Beziehung auf die neue x-Axe, wie z und b auf die alte. Hierauf kann man den Anfang der Zeit so verlegen, dass die Anfangsgeschwindigkeit senkrecht auf der neuen x-Axe steht, also rein imaginär wird. Setzt man

$$b' = \beta + i\beta'$$

so hat man

$$\frac{dz'}{dt} = \beta + i\beta' + gt$$

und erreicht daher das Gewünschte, wenn man die von einem andern Anfang gezählte Zeit t' so einführt, dass

$$t = t' - \frac{\beta}{g}$$

ist; dadurch wird

$$\frac{dz'}{dt'} = i\beta' + gt',$$

und dann

$$z' = -\frac{\beta}{g}\left(\frac{1}{2}\beta + i\beta'\right) + i\beta' t' + \frac{1}{2} g t'^2.$$

Setzt man nun endlich noch

$$z' + \frac{\beta}{g}\left(\frac{1}{2}\beta + i\beta'\right) = z'',$$

so kommt

$$z'' = i\beta' t' + \frac{1}{2} g t'^2,$$

und der Nullpunkt ist dann so verlegt, dass für $t' = o$ auch $z'' = o$ ist. Demnach ist nun

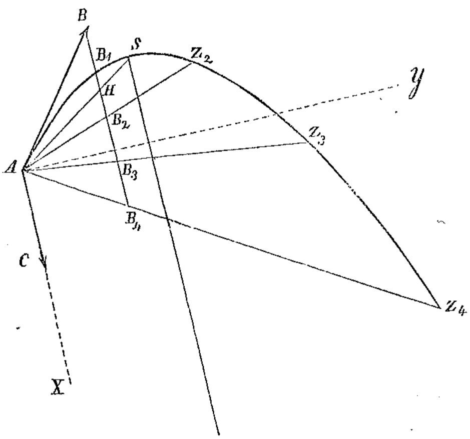
$$x = \frac{1}{2} g\, t'^2, \qquad y = \beta' t'$$

und folglich

$$y^2 = 2 \frac{\beta'^2}{g} x.$$

Die Bahn des beweglichen Punktes ist also eine Parabel, deren Axe der Kraft parallel läuft, und die ihren Scheitel S im neuen Nullpunkte hat. Die Lage des

Fig. 2.



letztern in Beziehung auf den Punkt A und die mit der Kraftrichtung zusammenfallende x–Axe ist durch die complexe Grösse $-\frac{\beta}{g}\left(\frac{1}{2}\beta + i\beta'\right)$ gegeben; er liegt daher stets auf der Geraden AH, wenn H den Halbirungspunkt der von B auf die y–Axe gefällten Senkrechten bezeichnet, und so, dass immer $AS = -\frac{\beta}{g} \cdot \overline{AH}$ ist. Um für verschiedene Zeiten die entsprechenden

Punkte der Bahn leicht construiren zu können, schreibe man die ursprüngliche Gleichung

$$z = t\,(b' + \frac{1}{2}\,g\,t);$$

zieht man dann aus B eine Parallele mit der Kraft AC und macht

$$B\,B_1 = B_1\,B_2 = B_2\,B_3 = \;.\;.\;.\;. = \frac{1}{2}AC,$$

so sind B, B_1, B_2 etc. die Punkte, durch welche $b' + \frac{1}{2}\,g\,t$ für $t = 0$, 1, 2 etc. dargestellt wird. Zieht man ferner die Geraden AB_1, AB_2, AB_3 etc. und macht auf denselben

$$Az_2 = 2\,.\,AB_2;\; Az_3 = 3\,.\,AB_3,\; Az_4 = 4\,.\,AB_4,\; \text{etc.},$$

so sind A, B_1, z_2, z_3, z_4 etc. die Orte des beweglichen Punktes z für $t = 0$, 1, 2, 3, 4 etc.

Es wirke auf einen beweglichen Punkt eine Kraft, welche zwar der Grösse nach constant sei, aber ihre Richtung dergestalt ändere, dass sie sich mit constanter Geschwindigkeit drehe.

Um etwas Bestimmtes zu haben, sei angenommen, dass die Kraft im Anfange der Bewegung senkrecht auf der x–Axe stehe und sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω in negativem Sinne herumdrehe. Alsdann ist, wenn ihre absolute Grösse mit p bezeichnet wird, ihr Ausdruck

$$ip\,(\cos\omega\,t - i\,\sin\omega\,t);$$

ferner sei angenommen, dass der Punkt seine Bewegung aus dem Nullpunkt und zwar ohne Anfangsgeschwindigkeit beginne. Man hat nun

$$\frac{d^2\,z}{d\,t^2} = ip\,(\cos\omega\,t - i\,\sin\omega\,t)$$

und erhält demnach

$$\frac{dz}{dt} = \frac{ip}{\omega}(\sin\omega t + i\cos\omega t) + \frac{p}{\omega}$$

$$z = \frac{ip}{\omega^2}(-\cos\omega t + i\sin\omega t) + \frac{p}{\omega}t + \frac{ip}{\omega^2},$$

wenn man der obigen Annahme gemäss die willkürlichen Constanten so bestimmt, dass für $t = o$ sowohl z als auch $\frac{dz}{dt}$ verschwinden. Hiernach wird

$$x = \frac{p}{\omega^2}(\omega t - \sin\omega t); \qquad y = \frac{p}{\omega^2}(1 - \cos\omega t).$$

Die Bahn des beweglichen Punktes ist also in diesem Falle eine Cycloide; der Radius r des mit der Winkelgeschwindigkeit ω rollenden Kreises $= \frac{p}{\omega^2}$; die Kraft $p = r\,\omega^2$ ist daher nichts anderes als die durch das Rollen des Kreises im erzeugenden Punkte erregte Centrifugalkraft.

Wir können nun, um zur Deutung einer complexen Schwingungsamplitude zu gelangen, in gleicher Weise auch die Schwingungsgleichung behandeln. Wird ein beweglicher Punkt von dem festen Nullpunkt der Entfernung proportional angezogen, und bezeichnet man die im Punkte Eins stattfindende Kraft mit $-k^2$, wo also k reell angenommen wird, so hat man

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -k^2 z.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist

(2) $$z = A\cos kt + B\sin kt$$

mit den willkürlichen Constanten A und B. Diese Gleichung stellt im Allgemeinen eine Ellipse dar. Setzt man nämlich, um dies zu sehen,

$$A = \varrho\sin g, \qquad B = \varrho\cos g,$$

so erhält man

(3) $$z = \varrho\sin(g + kt)$$

und kann dann zunächst, indem man die x-Axe in die Richtung von ϱ dreht, die Grösse ϱ reell machen. Ist ferner

$$g = \gamma + i\gamma'$$

$$z = \varrho \sin\left[k\left(\frac{\gamma}{k} + t\right) + i\gamma'\right],$$

so verlege man den Anfang der Zeit, indem man

$$\frac{\gamma}{k} + t = t'$$

einführt, dann ist

$$z = \varrho \sin(kt' + i\gamma')$$
$$= \varrho \cos i\gamma' \sin kt' + i\varrho \frac{\sin i\gamma'}{i} \cos kt';$$

und da nun

$$\cos i\gamma' = \frac{e^{\gamma'} + e^{-\gamma'}}{2}; \qquad \frac{\sin i\gamma'}{i} = \frac{e^{\gamma'} - e^{-\gamma'}}{2}$$

beide reell sind, so folgt

$$x = \varrho \cos i\gamma' \sin kt', \quad y = \varrho \frac{\sin i\gamma'}{i} \cos kt'$$

und

$$\frac{x^2}{(\varrho \cos i\gamma')^2} + \frac{y^2}{\left(\varrho \frac{\sin i\gamma'}{i}\right)^2} = 1,$$

also eine Ellipse mit den Halbaxen $\varrho \cos i\gamma'$ und $\varrho \frac{\sin i\gamma'}{i}$, von denen die erstere mit der Richtung von ϱ zusammenfällt. Der bewegliche Punkt befindet sich in den Scheiteln dieser Halbaxen zu den Zeiten $t' = \frac{\pi}{2k}$ und $= o$ und da alsdann die Geschwindigkeiten die Werthe $-i\varrho k \frac{\sin i\gamma'}{i}$ und $\varrho k \cos i\gamma'$ annehmen, so sieht man, dass in diesen Punkten die Geschwindigkeit senkrecht auf der Halbaxe steht und der andern Halbaxe proportional ist.

Die elliptische Bewegung geht in eine kreisförmige über, wenn

$$\cos iy' = \pm \frac{\sin iy'}{i}$$

ist; nun war aber

$$A = \varrho \left(\sin\gamma \cos iy' + i \cos\gamma \frac{\sin iy'}{i} \right)$$

$$B = \varrho \left(\cos\gamma \cos iy' - i \sin\gamma \frac{\sin iy'}{i} \right),$$

man erhält also für den Fall kreisförmiger Schwingungen

$$A = \varrho (\sin\gamma \pm i \cos\gamma) \cos iy'$$

$$B = \varrho (\cos\gamma \mp i \sin\gamma) \cos iy'$$

das heisst

$$B = \mp i A.$$

Die Gleichung (2) verwandelt sich dann in

$$z = A (\cos k t \mp i \sin k t)$$

und stellt wirklich einen Kreis dar, weil A durch eine blosse Drehung der x-Axe reell gemacht werden kann. Nimmt man ϱ complex $= r + i r'$, g aber als reell an, so hat man nach (3)

$$z = (r + ir') \sin (g + k t)$$

$$x = r \sin (g + k t), \qquad y = r' \sin (g + k t)$$

und daher

$$\frac{x}{r} = \frac{y}{r'};$$

die Schwingungen sind also dann geradlinig und gehen in der Richtung von ϱ vor sich.

Hienach kann man nun übersehen, was eine Schwingungsgleichung bedeutet, wenn in ihr entweder die Phase oder die Amplitude imaginär wird. So lange nämlich die Phase reell ist, hat man stets geradlinige Schwingungen, das Imaginärwerden der Amplitude bedeutet nur, dass die Schwingungsrichtung nicht mehr mit der x-Axe zusammenfällt, während bei elliptischen Schwingungen die Phase imaginär sein muss. Diess stimmt nun mit Fresnel's Interpretation nicht überein, da bei ihm das Imaginärwerden der Amplitude eine Veränderung der Phase bedingt.

Was die Zusammensetzung mehrerer Schwingungen anbelangt, so finden sich aus unsern Betrachtungen leicht die bekannten Gesetze wieder. Haben zwei geradlinige Schwingungen dieselbe Phase, so setzen sie sich wieder zu geradlinigen in einer andern Richtung vor sich gehenden Schwingungen zusammen. Geradlinige Schwingungen von verschiedenen Phasen aber geben elliptische Schwingungen, weil, wenn die Gleichung auf die Form (3) gebracht wird, alsdann die Phase imaginär ausfällt.

Wir schliessen hieran noch die Betrachtung des Falles, dass die Grösse k imaginär ist. Sei

$$k = c + i\,c' = p\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,;$$

dann ist die Kraft nicht mehr nach dem festen Nullpunkt gerichtet, sondern bildet, wie man leicht sieht, mit dem Radiusvektor des beweglichen Punktes den Winkel $2\,\varphi$. Man hat hier wie vorhin die Gleichung

$$z = A\cos k\,t + B\sin k\,t,$$

die auf die Form

$$z = \varrho\sin(g + k\,t)$$

gebracht, und worin dann ϱ durch Drehung der x-Axe reell gemacht werden kann. Führt man dann

$$g = \gamma + i\gamma' \text{ und } k = c + i\,c'$$

ein, so erhält man

$$z = \varrho\sin\left[c\,\left(\frac{\gamma}{c} + t\right) + i\,c'\left(\frac{\gamma'}{c'} + t\right)\right].$$

Hier werde nun wieder der Anfang der Zeit verlegt, indem

$$\frac{\gamma'}{c'} + t = t'$$

gesetzt werde; führt man ausserdem zur Abkürzung

$$\frac{\gamma}{c} - \frac{\gamma'}{c'} = \delta$$

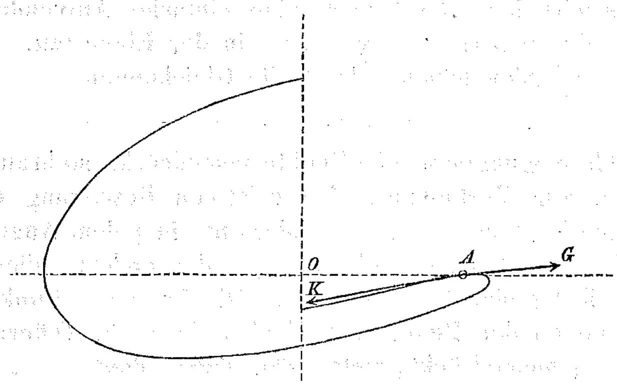
ein, so kommt

$$z = \varrho \sin\left[c(\delta + t') + i c' t'\right]. \tag{4}$$

Demnach ergiebt sich

$$x = \varrho \sin c(\delta + t') \cos i c' t', \qquad y = \varrho \cos c(\delta + t') \frac{\sin i c' t'}{i}.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Bewegung jetzt nicht mehr in einer geschlossenen Curve vor sich geht, sondern dass die Bahn sich spiralartig um den Nullpunkt herumwindet. Fig. 3



giebt ein Stück dieser Bahn an, welche den Annahmen $p = 1$, $\varphi = 10°$, $\varrho = 1$, $c\delta = \frac{1}{3}\pi$ entspricht.

Da die Gleichung (4) sich auch in der Form

$$z = \varrho \sin(c\delta + kt')$$

schreiben lässt, und dann auf die Form $z = A \cos kt' + B \sin kt$ gebracht den Grössen A und B reelle Werthe zuertheilt, so geht hervor, dass man in dem Falle eines imaginären k durch eine Drehung der x-Axe und eine Verlegung des Zeitanfanges die Grössen A und B immer reell machen kann. Da dann ferner A den Anfangsort und kB die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet, so ist damit der Zeitanfang und der ihm entsprechende Anfangsort so gewählt, dass die Anfangsgeschwindigkeit den Winkel zwischen dem Radiusvektor des Anfangspunktes und der Kraftrichtung halbirt. In Fig. 3 ist durch AK die Kraft und durch AG die Geschwindigkeit angedeutet, welche in dem Punkte A, welcher der Zeit $t' = o$ entspricht, stattfinden.

Die hier besprochene Art, die Bahn eines beweglichen Punktes durch eine complexe Funktion der Zeit auszudrücken, lässt auch eine einfache Anwendung auf die relative Bewegung in der Ebene zu.

Werden nämlich durch die Gleichungen

$$z_1 = f_1(t), \quad z_2 = f_2(t)$$

die Bewegungen zweier Punkte ausgedrückt, so braucht man zur Bestimmung der relativen Bewegung des einen Punktes gegen den andern nur in jedem Augenblicke die Lage des einen gegen den andern, diesen als fest gedacht, zu kennen. Die Lage des Punktes z_2 gegen den Punkt z_1 wird aber durch die Differenz $z_2 - z_1$ ausgedrückt; setzt man daher diese $= z$, so wird durch die Gleichung

$$z = f_2(t) - f_1(t)$$

die scheinbare Bahn dargestellt, in welcher die Bahn des Punktes z_2 dem ruhend gedachten Punkte z_1 erscheint. Hat man z. B. zwei in concentrischen Kreisen von den Radien r_1 und r_2 mit verschiedenen aber constanten Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 sich bewegende Punkte, und nimmt man etwa an, dass zu Anfang der Bewegung sich beide auf der x-Axe befinden, so werden ihre Bahnen durch die Gleichungen

$$z_1 = r_1 (\cos \omega_1 t + i \sin \omega_1 t)\,; \qquad z_2 = r_2 (\cos \omega_2 t + i \sin \omega_2 t)$$

gegeben. Die scheinbare Bahn des zweiten Punktes gegen den ersten ist daher

$$z = (r_2 \cos \omega_2 t - r_1 \cos \omega_1 t) + i (r_2 \sin \omega_2 t - r_1 \sin \omega_1 t)\,;$$

und aus dieser Gleichung können alle Eigenthümlichkeiten dieser Bewegung mit Leichtigkeit abgeleitet werden.

Ein neues Myographion

von

Adolf Fick.

Mit einer Tafel.

Bekanntlich sind viele der wichtigsten Untersuchungen auf dem Gebiete der Nervenphysiologie mit Hülfe jenes feinen von Helmholtz erfundenen zeitmessenden Werkzeuges ausgeführt, welches man mit dem Namen „Myographion“ bezeichnet. Ohne Zweifel wird auch noch ferner für lange Zeit jeder Forscher auf diesem Gebiete des Myographion bedürfen. Da die ursprüngliche Konstruktion von Helmholtz, sowie auch die spätern Modifikationen nur zu ausserordentlich hohen Preisen mit hinlänglicher Genauigkeit ausgeführt wurden, so wird sich gewiss Mancher durch den blossen Mangel an Geldmitteln in seinen Forschungen beschränkt fühlen. Ich halte es daher nicht für über-