

## Anwendung schiefer Projektionen zu axonometrischen Zeichnungen.

Von **J. W. von Deschwanden.**

Mit einer Tafel.

### II.

In dem dritten Hefte vorigen Jahrgangs dieser Zeitschrift habe ich den Satz zu begründen gesucht, dass drei von einem Punkte  $S$  der Zeichnungsebene ausgehende Gerade  $Sa, Sb, Sc$  mit beliebiger Länge und Richtung als drei gleich lange und senkrecht zu einander stehende axonometrische Axen, oder, dass vier beliebige, in einer Ebene liegende Punkte als Parallelprojektionen der vier Ecken einer dreiseitigen Pyramide mit gleich langen und senkrecht zu einander stehenden Scheiteltanten betrachtet werden können. Ebenso wurde angeführt, dass einem jeden derartigen Systeme von axonometrischen Axen, oder von vier Punkten im Allgemeinen vier verschiedene Systeme im Raume befindlicher Axen, oder vier räumliche Pyramiden entsprechen.

Es kann nicht meine Absicht sein, in diesen Heften alle wichtigeren Anwendungen zu besprechen, deren dieser Satz fähig ist, oder alle aus ihm sich ergebenden Folgerungen einlässlich zu behandeln; dagegen mag es für diejenigen, welche den ersten Aufsatz beachtet haben sollten, angenehm sein, von den vielen hiehergehörenden Spezialfällen einige wenige herausgehoben und etwas einlässlicher besprochen zu finden. Die Behandlungsart, welche auf sie angewendet wird, zeigt zugleich, wie ich manche anderen verwandten Fälle zu behandeln gedächte.

Zu den unter jenem Hauptsatze begriffenen speziellen Fällen, welche irgend ein besonderes geometrisches oder graphisches Interesse gewähren, gehören namentlich auch diejenigen, bei welchen die Linien und Winkel, von welchen in dem Satze die Rede ist, die grössten oder kleinsten Werthe annehmen, deren sie fähig sind. Man könnte sie etwa die extremen Fälle nennen. Es soll zuerst nachgewiesen werden, wie viele und was für hiehergehörende Fälle es giebt, und alsdann sollen einige derselben zu einer einlässlichen Untersuchung ausgewählt werden.

An einem Systeme dreier axonometrischer Axen  $Sa, Sb, Sc$  sind die Längen  $a, b, c$  der drei Axen und die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$ , welche dieselben zwischen sich einschliessen, zu unterscheiden. Die Grössen  $a, b, c$  sind, zufolge dem oben ausgesprochenen Satze, ganz willkürlich; die Winkel  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  müssen, da sie in einer Ebene um einen Punkt herum liegen, ohne zwischen sich einen Raum übrig zu lassen, nur der folgenden Gleichung entsprechen:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi.$$

Die Grössen  $a, b, c$  und  $\alpha, \beta, \gamma$  können daher folgende extremen Werthe annehmen:

$$\begin{array}{ll} a = 0; & a = \infty \\ b = 0; & b = \infty \\ c = 0; & c = \infty \\ \alpha = 0; & \alpha = 2\pi \\ \beta = 0; & \beta = 2\pi \\ \gamma = 0; & \gamma = 2\pi. \end{array}$$

Zeichnet man nun die drei Axen  $a, b, c$  als drei von einem Punkte ausgehende Gerade, so ergibt sich leicht, dass durch Einführung dieser extremen Werthe folgende, von einander wesentlich verschiedene extreme Fälle vorkommen können:

$$\begin{array}{l}
 1) \quad a : b : c = 0 : n : p = m : \infty : \infty \\
 2) \quad a : b : c = 0 : 0 : p = m : n : \infty \\
 3) \quad a : b : c = 0 : n : \infty \\
 4) \quad \alpha : \beta : \gamma = 0 : N : P \\
 5) \quad \alpha : \beta : \gamma = 0 : 0 : P = 0 : 0 : 2\pi
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 \alpha : \beta : \gamma = M : N : P \\
 \\ \\
 a : b : c = m : n : p.
 \end{array}$$

Nr. 6 bis 11: Combinationen von Nr. 1 und 4, Nr. 1 und 5, Nr. 2 und 4, Nr. 2 und 5, Nr. 3 und 4, Nr. 3 und 5,

und zwar in dem Sinne, dass aus den Fällen 1, 2 und 3 stets die Werthe von  $a$ ,  $b$  und  $c$ , und aus den Fällen 4 und 5 die Werthe von  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  genommen werden. Durch  $m$ ,  $n$  und  $p$  sollen beliebige, endliche Längendimensionen, durch  $M$ ,  $N$  und  $P$  Winkel bezeichnet werden, welche zwischen 0 und  $2\pi$  liegen. Alle diese Grössen können sowohl positiv als negativ sein. Ist eine der Längendimensionen, z. B.  $m$ , negativ, so kann man an ihrer Stelle ihre nach der entgegengesetzten Seite von  $S$  gezogene Verlängerung als gleich grosse positive Grösse einführen, indem man statt der gegebenen, ihr anliegenden Winkel  $N$  und  $P$  deren Ergänzungen zu  $\pi$ , und mithin statt des gegenüberliegenden Winkels  $M$  dessen Ergänzung zu  $2\pi$ , also statt der Winkel  $M$ ,  $N$  und  $P$  die Winkel  $2\pi - M$ ,  $\pi - N$  und  $\pi - P$  einführt. Ist dagegen einer der gegebenen Winkel  $M$ ,  $N$ ,  $P$  negativ, z. B.  $M$ , so muss

$$\begin{aligned}
 -M + N + P &= 2\pi, \text{ oder} \\
 M + (N + P - 2M) &= 2\pi
 \end{aligned}$$

sein. Aus der Zeichnung ergibt sich nun sofort, dass man die gleiche Figur wieder erhält, wenn man die  $-2M$  auf  $N$  und  $P$  gleich vertheilt und mithin statt der Winkel  $-M$ ,  $N$  und  $P$  die Winkel  $M$ ,  $N - M$  und  $P - M$  annimmt. Ist einer der beiden positiven Winkel, z. B.  $N$ , kleiner als  $M$ , so wird  $N - M$  negativ. Um auch diesen negativen Werth zu entfernen,

wiederhole man die eben auf  $-M$  angewendete Operation nochmals, aber mit Bezug auf  $N-M$ . Man erhält alsdann folgende Winkel:  $2M-N$ ,  $M-N$ ,  $P-N$ , welche an die Stelle der ursprünglich gegebenen Winkel  $-M$ ,  $N$  und  $P$  ohne Veränderung der Figur gesetzt werden können.

Da mithin sowohl negative Werthe von  $m$ ,  $n$ ,  $p$  als solche der Winkel  $M$ ,  $N$  und  $P$  stets auf positive zurückgeführt werden können, so sollen alle diese Werthe stets als positiv angenommen werden.

Es ist noch hervorzuheben, dass unter den 11 oben bezeichneten extremen Fällen die zwei ersten in doppelter Form aufgeführt sind. Für Nr. 1 ist die erste Form, nämlich:

$$a : b : c = 0 : n : p$$

und für Nr. 2 die zweite, nämlich:

$$a : b : c = m : n : \infty$$

vorzuziehen, weil im ersten Falle das Verhältniss  $\infty : \infty$  und im zweiten ebenso das Verhältniss  $0 : 0$  ein unbestimmtes wäre.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über die extremen Fälle mögen einige derselben zur Behandlung im Einzelnen ausgewählt werden.

#### Fall Nr. 2.

$$a : b : c = 0 : 0 : p = m : n : \infty ; a : \beta : \gamma = M : N : P$$

Die zu lösende Aufgabe besteht darin, die Lage der gleich langen rechtwinkligen Axen im Raume  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ , sowie ihrer projizirenden Linien anzugeben, wenn  $Sa$ ,  $Sb$  und  $Sc$  (Fig. 3) die Projektionen dieser Axen sind.

Zufolge dem ersten Aufsätze hat man die drei räumlichen Axen als drei senkrechte Durchmesser

einer Kugel zu betrachten und die Projektion dieser Kugel zu suchen. Zu diesem Zwecke sind die drei Ellipsen zu zeichnen, die je zwei der drei gegebenen Axen zu conjugirten halben Durchmessern haben. Im gegenwärtigen Falle ist die zu  $Sa$  und  $Sb$  gehörende Ellipse durch die Curve  $a b a_1 b_1$  dargestellt, so dass  $Sa : Sb = m : n$  ist. Da  $Sc$  unendlich lang ist, so ist die zu  $Sa$  und  $Sc$  gehörige Ellipse in der Richtung von  $Sc$  ebenfalls unendlich lang und die durch  $a$  und  $a_1$  gezogenen, mit  $Sc$  parallelen Geraden sind Theile ihrer Peripherie. Ebenso ist die zu  $Sb$  und  $Sc$  gehörende Ellipse in der Richtung von  $Sc$  unendlich lang, und die durch  $b$  und  $b_1$  gehenden, mit  $Sc$  parallelen Geraden sind Theile ihrer Peripherie. Die gesuchte Kugelprojektion ist nun eine vierte Ellipse, welche die drei ersten einschliesst und berührt. Dieselbe muss daher in gegenwärtigem Falle offenbar ebenfalls unendlich lang in der Richtung von  $Sc$  sein, und ihre Peripherie wird in der Nähe von  $S$  mit zwei zu  $Sc$  parallelen Geraden  $NQ$  und  $N_1Q_1$  zusammenfallen, welche die Ellipse  $a b a_1 b_1$  berühren. Die Berührung mit den beiden andern Ellipsen findet in unendlicher Ferne statt. Zieht man durch  $S$  die Gerade  $NN_1$  senkrecht zu  $Sc$ , so ist dieses die kleine Axe dieser Ellipse und mithin der Durchmesser der gesuchten Kugel. Zur Darstellung der orthographischen Projektionen dieser Kugel sei  $M_2M_2'$ , eine zu  $MM'$  parallele Gerade, die Projektionsaxe.  $S_2$  ist sodann die vertikale Projektion des Kugelmittelpunktes, und der von  $S_2$  aus mit dem Radius  $SN$  beschriebene Kreis die vertikale, der von  $S$  aus mit demselben Radius beschriebene Kreis die horizontale Projektion der Kugel.

Es sind nun diejenigen Punkte dieser Kugel in

orthographischer Projektion aufzusuchen, deren schiefe Projektionen  $a$ ,  $b$  und  $c$  sind.

Da die schiefe Projektion der ganzen Kugel die Ellipse ist, deren kleine Axe  $NN_1$ , und deren grosse Axe die unendlich lange Linie  $MM'$  ist, welche mit  $cc_1$  zusammenfällt, so sind die projizirenden Linien parallel zu  $MM'$  selbst, und deren orthogonale Projektionen beziehungsweise parallel zu  $MM'$  und  $M_2M_2'$ . Man erhält daher die den Punkten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  entsprechenden Punkte auf der Kugel, wenn man durch die erstern Parallele zu  $MM'$ ,  $M_2M_2'$  zieht, und deren Durchschnittspunkte mit der Kugeloberfläche bestimmt.

Die durch  $a$  und  $b$  gehenden projizirenden Linien treffen die Kugel offenbar in Punkten, deren horizontale und vertikale orthogonale Projektionen  $A_1, B_1$  und  $A_2, B_2$  sind. Die von dem unendlich entfernten Punkte  $c$  ausgehende Projizirende kann dagegen als eine Linie angesehen werden, welche vom Endpunkte der grossen Axe der unendlich langen, durch  $N$  und  $N_1$  gehenden Ellipse ausgeht und daher die Kugel in ihrem höchsten Punkte  $C_1, C_2$  berührt. Die orthogonalen Projektionen der drei räumlichen Axen sind daher  $SA_1, SB_1, SC_1$  und  $SA_2, SB_2, SC_2$ .

Es ist leicht einzusehen, dass diese drei Linien im Raume stets senkrecht zu einander stehen müssen. Betrachtet man die Ellipse  $ab a_1 b_1$  als eine schiefe Projektion des Kreises  $NA_1 B_1 N_1$ , was stets geschehen darf, weil beide Curven den gleichen Mittelpunkt haben und sich schneiden, so sind  $Sa$  und  $Sb$  die Projektionen von  $SA_1$  und  $SB_1$ ; da die erstern zwei Linien conjugirte Durchmesser der Ellipse sind, so müssen  $SA_1$  und  $SB_1$  zwei rechtwinklige Durchmesser des Kreises sein. Die Gerade  $C_1, SC_2 S_2$  aber steht senk-

recht auf der horizontalen Projektionsebene, weil  $C_1$   $C_2$  der von derselben entfernteste Punkt der Kugel ist.

Verlängert man die Linien  $aa'$  und  $bb'$  über  $a'$  und  $b'$  hinaus, so treffen sie die Kugel auch wieder in  $a''$  und  $b''$ ; die vertikalen Projektionen dieser Punkte sind  $a_2''$  und  $b_2''$ . Der Punkt  $c'c_2'$  verändert sich durch eine Verlängerung der Linie  $cc'$  nicht. Man erhält daher in  $Sa_2'$ ,  $Sa_2''$ ;  $Sb_2'$ ,  $Sb_2''$ ;  $Sc'$ ,  $S_2'$  ein zweites System räumlicher Axen, deren schiefe Projektionen ebenfalls die gegebenen Axen  $Sa$ ,  $Sb$ ,  $Sc$  sind.

Dieses sind indessen die zwei einzigen Auflösungen, welche diese Aufgabe zulässt, denn die zwei andern Auflösungen, welche im Allgemeinen noch möglich sind, fallen hier mit den beiden eben beschriebenen zusammen, weil auch die beiden Richtungen, welche im Allgemeinen die projizirenden Linien haben können, miteinander zusammenfallen, indem sie parallel zu  $MM_1$ ,  $M_2M_2'$  sind.

Bei der Lösung dieser Aufgabe möchte ein Umstand auffallend erscheinen, die Behauptung nämlich, dass die schiefen Projektionen der Punkte  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  der Kugel gerade auf die Punkte  $a$  und  $b$  der Grundfläche und nicht in irgend welche andern Punkte der Linien  $A_1a$  und  $B_1b$  fallen. Man könnte nämlich einwenden, es sei zwar allerdings richtig, dass sich die Punkte  $a$  und  $b$  der Grundfläche auf die Punkte  $A_1$  und  $B_1$  der Kugelfläche projizieren, wenn die projizirenden Linien parallel zu  $MM'$ ,  $M_2M_2'$  sind; dagegen sei es nicht gestattet, diesen Satz sofort umzukehren und zu behaupten, die Punkte  $a$  und  $b$  seien auch die Projektionen von  $A_1A_2$  und  $B_1B_2$ , indem bei der angegebenen Richtung der projizirenden Linien ebenso gut jeder andere Punkt der Geraden  $A_1a$  als Projektion von  $A$ ,

und jeder Punkt von  $B_1$   $b$  als Projektion von  $B$  betrachtet werden könnte. Um indessen einzusehen, wie allerdings gerade die Punkte  $a$  und  $b$  die schiefen Projektionen von  $A$  und  $B$  sein müssen, mit Ausschluss aller andern Punkte der Linien  $A_1$   $a$  und  $B_1$   $b$ , braucht man nur in der Lösung der Aufgabe folgende unendlich kleine Abänderung eintreten zu lassen. Anstatt die beiden räumlichen Axen  $SA$  und  $SB$  genau auf der Grundfläche anzunehmen, denke man sich die Punkte  $A$  und  $B$  im Raume unendlich wenig von der Grundfläche entfernt, und zwar so, dass diese unendlich kleinen Entfernungen sich zu einander verhalten wie die Grössen  $aA_1$  und  $bB_1$ . Da überdiess in der gegenwärtigen Figur die beiden letztern Grössen entgegengesetzte Richtungen haben, so müssten auch jene unendlich kleinen Entfernungen in entgegengesetztem Sinne, der eine der beiden Punkte  $A$  und  $B$  also unendlich wenig über, der andere unendlich wenig unter der Grundfläche angenommen werden. Nimmt man unter diesen Voraussetzungen den Punkt  $a$  als schiefe Projektion von  $A$  an, so ist die projizirende Linie nicht mehr genau parallel mit der Grundlinie  $M_2 M_2'$ , sondern nur noch mit der vertikalen Projektionsebene, während sie mit der horizontalen Projektionsebene einen unendlich kleinen Winkel bildet. Projiziert man nun den Punkt  $B$  mittelst einer parallel zu  $A a$  liegenden Linie auf die Grundfläche, so fällt diese Projektion genau auf den Punkt  $b$  und jeder andere Punkt der Grundfläche bleibt ausgeschlossen. In der Lage des Punktes  $c$  als Projektion von  $C$  wird hiedurch nichts geändert.

Man sieht also, dass sich die erwähnte scheinbare Unbestimmtheit in der Auflösung der vorliegenden Auf-



gabe beseitigt, ohne dass die geringste Abänderung in dem Schlussresultate nöthig wird.

Fall Nr. 3.

$$a : b : c = 0 : n : \infty ; \alpha : \beta : \gamma = M : N : P.$$

Dieser Fall schliesst sich so nahe an den soeben behandelten an, dass er mit wenigen Worten und mittelst der gleichen Fig. 3 besprochen werden kann. Um diese Figur nämlich für den Fall Nr. 3 umzugestalten, muss  $a C_1$  gleich Null gemacht, oder  $a$  nach  $C_1$  verlegt werden; die Punkte  $b$  und  $c$  bleiben dagegen unverändert. Dadurch geht die Ellipse  $ab a_1 b_1$  in die Gerade  $b b_1$  über, die mit  $MM'$  parallelen, durch  $N$  und  $N'$  gehenden Geraden werden nun, ohne Veränderung ihrer Richtung, durch  $b$  und  $b_1$  gehen und der Kreis  $NA_1 B_1 N_1$  wird jetzt zwischen diesen beiden Geraden liegen. Der Punkt  $A_1$  wird auf den Schnittpunkt der Linie  $C_1 c_1$  mit dem Kreise, der Punkt  $B_1$  auf den Berührungspunkt der durch  $b$  gehenden Geraden mit dem Kreise fallen. Die horizontalen Projektionen zweier räumlichen Axen sind also wieder zwei senkrecht auf einander stehende Kreishalbmesser, diejenige der dritten Axe ist unverändert der Punkt  $C_1$  geblieben. Die Stellung dieser Axen im Raume selbst ist von derjenigen im vorigen Falle nur wenig verschieden: die Axen  $Sa$  und  $Sb$  liegen wieder auf der Grundfläche, die erstere aber fällt mit  $SM$  zusammen, die andere steht senkrecht auf dieser Linie. Die dritte räumliche Axe steht, wie vorhin, senkrecht auf der Grundfläche.

Fall Nr. 4.

$$a : b : c = m : n : p ; \alpha : \beta : \gamma = 0 : N : P.$$

Die Auflösung dieses Falles bietet nicht die geringste Schwierigkeit, wohl aber eine Eigenthümlich-

keit dar, um deren willen kurz Einiges darüber mitgetheilt werden mag.

Die gegebenen Axen  $a$ ,  $b$  und  $c$  werden die in Fig. 6 dargestellte Lage haben, indem  $Sb$  und  $Sc$  zusammenfallen,  $Sa$  dagegen einen beliebigen Winkel mit  $Sc$  bildet. Von den vier verschiedenen Ellipsen, welche zur Lösung der Aufgabe gezeichnet werden müssen, sind die zwei ersten leicht zu konstruiren, indem zwei conjugirte Halbmesser der ersten  $Sa$  und  $Sb$ , und zwei conjugirte Halbmesser der zweiten  $Sa$  und  $Sc$  sind. Die beiden zugehörigen Ellipsen sind also  $a b a_1 b_1$  und  $a c a_1 c_1$ . In  $a$  und  $a_1$  berühren sich dieselben. Die beiden conjugirten Halbmesser der dritten Ellipse sind die auf die gleiche Gerade fallenden Linien  $Sb$  und  $Sc$ . Hier muss nun der nahe liegende Irrthum vermieden werden, dass die gerade Linie  $c c_1$  selbst als zugehörige Ellipse angenommen wird. Allerdings ist diese Ellipse eine auf  $c c_1$  fallende begränzte Gerade, allein ihre Länge ist nicht  $c c_1$  selbst, sondern ergibt sich auf folgende Weise. Stellt man sich diese Ellipse als schiefe Projektion eines Kreises vor, was jederzeit gestattet ist, so sind  $Sb$  und  $Sc$  die Projektionen zweier senkrecht zu einander stehenden Durchmesser desselben. Einer dieser Durchmesser kann stets mit einer der Linien  $b b_1$  oder  $c c_1$  selbst, sowohl der Länge als der Richtung nach, zusammenfallen. Wird hier  $c c_1$  als dieser Durchmesser angesehen, und denkt man sich den Kreis um diese Linie auf die Projektionsebene umgeklappt, so erscheint die eine Hälfte desselben in  $c b_2 c_1$ . Die umgeklappte projizirende Linie des Punktes  $b_2$  ist sodann  $b_2 b$ , und mithin die projizirende Linie jedes anderen Punktes des Kreisumfanges parallel mit  $b_2 b$ . Man er-

hält daher nun den von  $S$  entferntesten Punkt auf  $Sc$ , welcher noch als Projektion eines Punktes des Kreisumfangs betrachtet werden kann, indem man an den Kreis eine zu  $b_2 b$  parallele Tangente zieht und deren Schnittpunkt  $d$  mit  $Sc$  aufsucht. Der Berührungspunkt  $d_2$  ist der Punkt, dessen Projektion  $d$  ist. Bestimmt man den Punkt  $d_1$  auf ähnliche Weise, so ist mithin jetzt  $d d_1$  die Projektion des ganzen Kreises, oder die unendlich schmale Ellipse, welche als Projektion dieses Kreises zu betrachten ist.

Nun lassen sich aber ausser dem Kreise  $c b_2 c_1$  noch unendlich viele andere construiren, von denen  $cc_1$  und  $bb_1$  die schiefen Projektionen zweier senkrecht zu einander stehenden Durchmesser sind. Man braucht zu diesem Zwecke nur den ersten dieser Durchmesser mit  $cc_1$  irgend einen Winkel bilden, statt mit dieser Linie zusammenfallen zu lassen. Die Punkte  $d$  und  $d_1$  aber bleiben für alle diese Kreise unverändert, weil  $d d_1$  als eine Ellipse betrachtet werden kann, von welcher zwei conjugirte Halbmesser,  $Sb$  und  $Sc$ , gegeben sind, eine Ellipse aber stets durch zwei conjugirte Halbmesser vollständig bestimmt ist.

Nachdem auf diese Art die dritte Ellipse in Gestalt der Geraden  $d d_1$  bestimmt ist, kann nun auch die vierte, welche die drei ersten umhüllen und berühren soll, gezeichnet werden. In Fig. 6 ist es die Curve  $a d a_1 d_1$ , welche die beiden ersten Ellipsen in  $a$  und  $a_1$ , die dritte in  $d$  und  $d_1$  berührt. Ihre Axen sind  $MM'$  und  $NN'$ .

Die ganze übrige Auflösung bietet gar nichts Ungewöhnliches mehr dar. Die orthogonalen Projektionen der Kugel, in welcher die gesuchten räumlichen Axen als rechtwinklig zu einander stehende Durch-

messer enthalten sind, sind die in Fig. 6 gezeichneten Kreise mit dem Halbmesser  $SN$ ,  $SN'$ ; die Richtung der schiefen projizirenden Linien ist  $SM$ ,  $m_2 M_2$ , und die orthogonalen Projektionen von einem der gesuchten Systeme räumlicher Axen sind  $SA_1$ ,  $S_2 A_2$ ;  $SB_1$ ,  $S_2 B_2$ ;  $SC_1$ ,  $S_2 C_2$ . Es ergibt sich aus dem ersten Aufsatze, auf welche Weise noch drei andere Systeme solcher Axen für dieselbe Aufgabe gefunden werden können.

#### Fall Nr. 5.

$$a : b : c = m : n : p; \quad a : \beta : \gamma = 0 : 0 : 2\pi.$$

In diesem Falle liegen alle vier Punkte  $S$ ,  $a$ ,  $b$  und  $c$  auf der gleichen Geraden  $MM_1$ , Fig. 4. Die drei Ellipsen, deren conjugirte Durchmesser je zwei der drei gegebenen Axen sind, fallen ebenfalls in die gleiche Gerade  $MM_1$  zusammen, und daher besteht auch die vierte, dieselben einschliessende und berührende Ellipse aus einer auf  $MM_1$  fallenden Geraden von endlicher Länge. Alle diese Ellipsen können mithin so betrachtet werden, als hätten sie zwar endliche grosse Axen, während dagegen ihre kleinen Axen unendlich klein angenommen werden müssen.

Hieraus folgt zunächst, dass die Kugel, deren Durchmesser auf  $aa_1$ ,  $bb_1$ ,  $cc_1$  schief projizirt sind, unendlich klein ist, und dass die projizirenden Linien unendlich kleine Winkel mit der Projektionsebene bilden oder parallel zu derselben sind. Ueber die Lage der unendlich kleinen, rechtwinkligen Kugeldurchmesser, deren schiefe Projektionen  $aa_1$ ,  $bb_1$  und  $cc_1$  sind, ergibt sich sofort folgendes. Schiefe Parallelprojektionen von Geraden, welche senkrecht zur Projektionsebene stehen, sind stets proportional mit diesen

Geraden selbst; und umgekehrt, denkt man sich nun von den Endpunkten jener unendlich kleinen Kugeldurchmesser Senkrechte auf die Projektionsebene gefällt, so werden dieselben mithin proportional zu den Entfernungen ihrer Fusspunkte von den Punkten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sein. Wegen der unendlich kleinen Grösse der Kugeldurchmesser fallen aber alle jene Fusspunkte mit dem Mittelpunkte  $S$  der Kugel zusammen, und mithin sind jene Senkrechten, oder die Abstände der Endpunkte der besprochenen Kugeldurchmesser, von der Projektionsebene proportional zu den gegebenen Axen  $Sa$ ,  $Sb$  und  $Sc$ . Daraus ergibt sich die Lage der unendlich kleinen Kugeldurchmesser leicht. Sind in Fig. 5  $SA'$ ,  $SB'$  und der Punkt  $C'$  oder  $S$  die orthogonalen Projektionen der drei Durchmesser, für den Fall, dass  $SA'$  und  $SB'$  auf den Projektionsebenen liegen, so ziehe man durch  $S$  die ebenfalls auf der Projektionsebene liegende Gerade  $SS_2$  in der Weise, dass ihre Abstände von  $A'$  und  $B'$ , welche mit  $m'$  und  $n'$  bezeichnet sind, folgender Proportion entsprechen:

$$m' : n' = m : n.$$

Dreht man die Kugeldurchmesser um diese Linie als um eine Drehungsaxe, so bleiben die senkrechten Abstände der Punkte  $A'$  und  $B'$  von der Projektionsebene stets in dem Verhältnisse von  $m$  und  $n$  zu einander. In einer zweiten Projektion  $A_2'$ ,  $B_2'$ ,  $C_2'$ ,  $S_2$  der ganzen Figur, in welcher diese Abstände  $m''$  und  $n''$  in wahrer Grösse erscheinen, sieht man überdiess, dass durch eine angemessene Grösse jener Drehung auch der Abstand  $n''$  des dritten Punktes  $C'$ ,  $C_2'$  von der Projektionsebene leicht so gross gemacht werden kann, dass man folgende Proportion hat:

$$m'' : n'' : p'' = m : n : p.$$

Diese Verhältnisse bleiben unverändert, wenn das ganze System von Kugeldurchmessern um eine senkrecht zur ersten Projektionsebene stehende Axe gedreht wird, so dass mithin unendlich viele Stellungen dieser Durchmesser möglich sind, für welche jene Projektionen gelten. Dazu kommen noch eben so viele Stellungen der Kugeldurchmesser auf der entgegengesetzten Seite der ersten Projektionsebene.

Da nun die eben betrachteten Kugeldurchmesser mit den im Raume befindlichen Axen, deren schiefe Projektionen  $Sa, Sb, Sc$  sind, identisch sind, so ergibt sich also aus den bisherigen Betrachtungen folgendes: wenn die Punkte  $S, a, b, c$  in einer Geraden liegen, so sind die zugehörigen Axen im Raume unendlich klein und können unendlich viele verschiedene Stellungen haben, in denen aber stets die senkrechten Abstände ihrer Endpunkte von der durch  $S$  gehenden Projektionsebene in dem Verhältnisse von  $m:n:p$  zu einander stehen. Ebenso folgt unmittelbar aus Fig. 5, dass die Endpunkte der Axen im Raume auf der gleichen, oder auf verschiedenen Seiten der Projektionsebene liegen, je nachdem die Punkte  $a, b, c$  auf der gleichen oder auf verschiedenen Seiten von  $S$  sind.

#### Fall Nr. 9.

$$a:b:c = 0:0:p = m:n:\infty; \quad \alpha:\beta:\gamma = 0:0:2\pi.$$

Eine einfache Vergleichung dieses Falles mit dem vorhergehenden zeigt sofort, dass bei der Auflösung beider Fälle der ganz gleiche Weg einzuschlagen ist. In der That sind in Fig. 4 jetzt nur die Punkte  $c$  und  $c_1$  auf der Linie  $MM'$  unendlich weit von  $S$  zu entfernen, um diese Figur für den jetzigen Fall umzugestalten, alles Andere bleibt unverändert. In Fig. 5

sind ebenfalls nur die folgenden, einfachen Abänderungen vorzunehmen: die Perpendikel  $m''$  und  $n''$  müssen im Verhältnisse zu  $p''$  unendlich klein werden, zu einander aber stetsfort in einem endlichen Verhältnisse stehen. Man erreicht dies offenbar dadurch, dass man die Linien  $SA'$ ,  $SB'$ ,  $SC'$  und die Axe  $SS_2$  nur unendlich wenig dreht, so dass  $S_2, C_2'$  nur unendlich wenig von der senkrechten Stellung abweicht. Wenn die drei gegebenen Axen auf der gleichen Geraden liegen und eine von ihnen unendlich lang ist, so sind daher die zugehörigen Axen im Raume unendlich klein, eine von ihnen steht senkrecht zur Projektionsebene und die beiden andern können jede Stellung haben, welche sie bei einer Drehung um die erste durchlaufen. Die projizirenden Linien sind parallel zur Projektionsebene.

Fall Nr. 10.

$$a : b : c = 0 : n : \infty; \quad a : \beta : \gamma = 0 : N : P.$$

Während hier die Axenverhältnisse dieselben sind, wie in Fall 3, haben dagegen die Winkel andere, in den bisherigen Fällen nicht vorgekommene Werthe. Zwei der gegebenen Axen fallen nämlich zusammen, die dritte bildet dagegen mit diesen beiden ersten einen beliebigen Winkel. Zuzufolge den oben angeführten Proportionen fallen die endliche und die unendlich lange Axe zusammen; die unendlich kleine Axe fällt als blosser Punkt mit dem Anfangspunkte der beiden andern zusammen, so dass also auch hier alle drei Axen auf eine einzige Gerade fallen. Es lässt sich mithin auch dieser Fall in der hier zunächst dargebotenen Gestalt auf Fig. 4 zurückführen, mit der Abänderung, dass die Punkte  $a$  und  $a_1$  nach  $S$ , die Punkte

$c$  und  $c_1$  in unendliche Entfernung von  $S$  verlegt werden. In Fig. 5 hat man sich folgende Verhältnisse zu denken, um sie für den gegenwärtigen Fall umzugestalten. Die räumlichen Axen  $SA_1$ ,  $SA_2$  u. s. f. sind auch hier wieder unendlich klein anzunehmen. Ferner müssen die Punkte  $A_1 A_2$  und  $B_1 B_2$  unendlich nahe bei der Grundfläche gedacht werden, allein in der Weise, dass die Entfernung  $n''$  des Punktes  $B_1 B_2$  von der Grundfläche wieder unendlich vielmal grösser ist, als die Entfernung  $m''$  des Punktes  $A_1 A_2$  von derselben. Diese beiden unendlich kleinen Grössen verschiedener Ordnung lassen sich nicht mehr graphisch anschaulich machen, denn wenn man Fig. 5 dem gegenwärtigen Falle anpasst, so fällt einfach die Linie  $S_2 B_2' A_2'$  mit der Grundlinie zusammen,  $S_2 C_2'$  steht senkrecht auf derselben,  $A_1' S B_1'$  wird zu einem rechten Winkel und  $C_1'$  fällt auf den Punkt  $S$ . Wohl aber kann man sich dieses dem physischen Auge nicht mehr darstellbare Verhältniss ganz leicht denken, und zwar auf mehr als eine Art. Man kann z. B. den Punkt  $A_1 A_2$  vollständig auf der Grundfläche,  $m''$  also gleich der absoluten Null,  $B_1 B_2$  aber um ein unendlich kleines Theilchen der räumlichen Axen über der Grundfläche,  $n''$  also gleich einem derartigen Theilchen annehmen; oder man kann  $p''$  als endliche,  $n''$  als unendlich kleine Grösse des ersten und  $m''$  als unendlich kleine Grösse des zweiten Grades auffassen. Beide Auffassungen liefern das gleiche Ergebniss und in jedem Falle sind die projizirenden Linien parallel zur Grundfläche zu setzen. Unter allen Umständen kann man die Auflösung dieses Falles auf folgende Weise aussprechen: die drei räumlichen Axen sind unendlich klein; eine von ihnen steht senkrecht zur Projektions-



ebene, die beiden andern können jede Lage haben, welche sie bei einer Drehung um die erste einnehmen. Die projizirenden Linien sind parallel zur Projektionsebene.

Wesentlich verschieden gestaltet sich sowohl die Auflösungsart als das Ergebniss derselben, wenn in dieser Aufgabe der Winkel, dessen Grösse Null ist, der endlichen Axe gegenübersteht, oder wenn die Verhältnisse:

$$a : b : c = 0 : n : \infty; \quad \alpha : \beta : \gamma = M : 0 : P$$

bestehen. Es ergibt sich aber sogleich aus der Zeichnung der Figur, dass dieser Fall ganz mit dem Falle Nr. 3 zusammenfällt und daher auch ganz die gleichen Ergebnisse liefert, wie jener. Setzt man endlich:

$$a : b : c = 0 : n : \infty; \quad \alpha : \beta : \gamma = M : N : 0$$

so verändert sich weder die Figur noch das Ergebniss der Auflösung, sondern Alles bleibt auch hier wie in Nr. 3.

#### Fall Nr. 11.

$$a : b : c = 0 : n : \infty; \quad \alpha : \beta : \gamma = 0 : 0 : 2\pi.$$

Dieser Fall lässt sich sofort auf den Fall Nr. 5, oder genauer auf Nr. 10 und die zugehörigen Figuren 4 und 5 zurückführen, indem man in diesem letztern  $a$  und  $a_1$  nach  $S$ ,  $c$  und  $c_1$  in unendliche Entfernung von  $S$  verlegt, und die Grössen  $m''$ ,  $n''$  und  $p''$ , wie in Fall Nr. 10, in das Verhältniss von  $0 : n : \infty$  zu einander bringt. Man erhält hierdurch die ganz gleichen Figuren wie für den ersten Werth der Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  im Falle Nr. 10 und mithin auch die gleiche Auflösung.

Im Vorstehenden sind namentlich solche Spezialfälle des allgemeinen Problemes behandelt worden, in welchen nicht nur eine der gegebenen Axen  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , oder einer der Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , sondern mehrere dieser Grössen zugleich gleich Null sind. Man sieht hieraus, wie ich mir die konstruktive Behandlung dieser Fälle denke und welche Ergebnisse erhalten werden.

## Ueber die von Dr. Lyall in Grönland entdeckten fossilen Pflanzen.

Sendschreiben an Herrn. Dr. Jos. D. Hooker in Kew.

Sie haben die Freundlichkeit gehabt mir die von Dr. Lyall auf der Disco-Insel im nordwestlichen Grönland entdeckten, und in dem an Pflanzenschätzen aller Art so überaus reichen Museum in Kew aufbewahrten, fossilen Pflanzen zur Untersuchung anzuvertrauen. Ich gedenke die Zeichnungen und Beschreibungen derselben mit andern Pflanzen der arctischen Zone zu veröffentlichen, bin aber so frei, Ihnen vorläufig einige Bemerkungen über dieselben mitzutheilen. Es enthält die Sammlung 10 Arten, von denen indessen mehrere zur Bestimmung zu unvollständig erhalten sind. Die genauer bestimmbaren Arten sind folgende:

### 1) *Sequoia Langsdorffii* Br. sp.

Zahlreiche Zweigstücke, welche völlig mit solchen aus unserer untern Molasse übereinstimmen. Diese

Fig. 3.

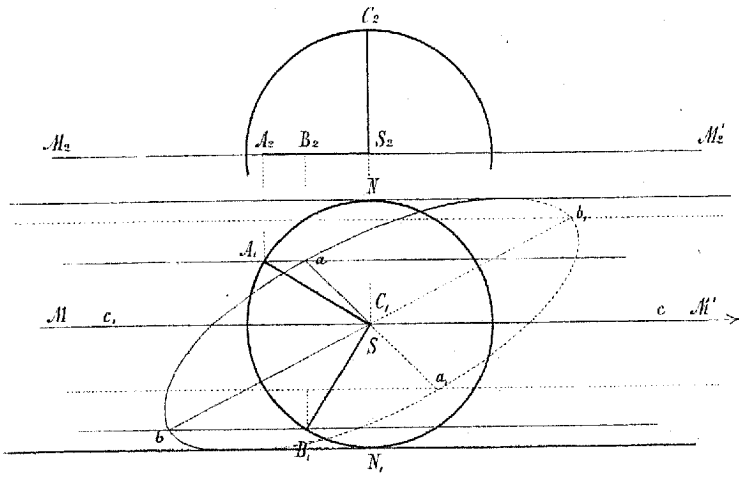


Fig. 4.

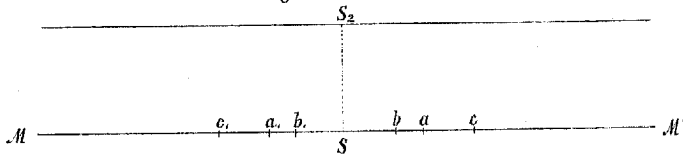


Fig. 5.

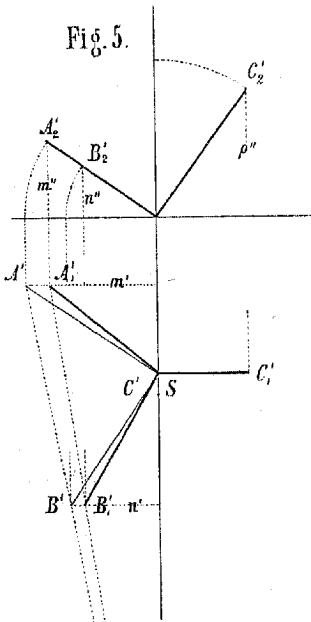


Fig. 6.

