Die schiefe axonometrische Projektion.

von

Hermann Kinkelin.

Bei axonometrischen Projektionen wird ein System von drei gleich langen von einem Punkt (Scheitel) ausgehenden auf einander rechtwinklig stehenden Strahlen (Axen) zu Grund gelegt. Nennen wir mit Steiner ein solches System Dreibein, so ergeben sich folgende drei Hauptaufgaben:

1) Aus der Lage des Dreibeins gegen die Projektionsebene und aus der Projektionsrichtung die Projektion des Dreikants zu bestimmen.

2) Aus der Projektion des Dreibeins die Lage desselben gegen die Projektionsebene, seine Grösse und die Projektionsrichtung zu bestimmen.

3) Zu untersuchen, wie viele reelle Dreibeine einer beliebig angenommenen Projektion entsprechen.

Indem wir uns vorsetzen, diese drei Aufgaben zu lösen, behandeln wir zunächst

Aufgabe I.

Aus der Lage des Dreibeins gegen die Projektionsebene und aus der Projektionsrichtung die Projektion des Dreibeins zu bestimmen.

Es sei E die Projektionsebene, $ABCO$ das Dreibein, SO die Senkrechte auf die Ebene E durch den Scheitel O desselben, PO die Projektionsrichtung; ferner sei $A'B'C'O'$ die Projektion des Dreibeins auf E. Wir setzen folgende Bezeichnung fest:

Die Winkel der Senkrechten SO mit den Axen des Dreibeins seien bezeichnet λ, μ, ν, die Winkel der Projektionsrichtung PO mit diesen Axen seien

L, M, N, und der Winkel POS sei φ; die Länge der Axen sei r. Endlich sollen die Projektionen der Axen bez. die Längen a, b, c haben und unter sich die Winkel α, β, γ bilden.

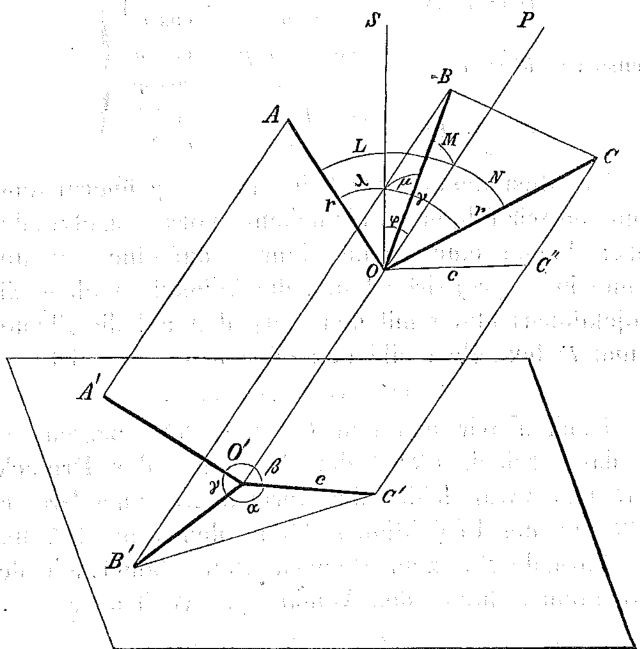
Zwischen den Grössen λ, μ, ν, L, M, N, φ finden die Bedingungsgleichungen statt

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1 \tag{1}$$

$$\cos^2 L + \cos^2 M + \cos^2 N = 1 \tag{2}$$

$$\cos L \cos \lambda + \cos M \cos \mu + \cos N \cos \nu = \cos \varphi \tag{3}$$

Durch die genannten Winkel und die Länge r ist nun die Projektion des Dreibeins, d. h. die Grösse von a, b, c, α, β, γ vollständig bestimmt.



Wir bestimmen zuerst die Projektionen a, b, c der Axen. Ziehen wir OC'' parallel $O'C'$, so ist aus dem Dreikant $SPCO$

$$\cos(\varphi, N) = \frac{\cos\nu - \cos\varphi \cos N}{\sin\varphi \sin N}$$

wobei (φ, N) den Winkel bedeutet, den die Ebene des Winkels φ mit der Ebene des Winkels N bildet. Ferner ist aus dem Dreikant $SPC''O$, weil $\angle POC'' = 180 - OC''C$,

$$\operatorname{cotg} OC''C = \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos(\varphi, N) = \frac{\cos\nu - \cos\varphi \cos N}{\cos\varphi \sin N}$$

Endlich ist im Dreieck OCC'', weil $\angle OCC'' = N$,

$$r : c = \sin OC''C : \sin N,$$

woraus man vermittelst der Bestimmung von cotg $OC''C$ leicht findet

$$\left.\begin{aligned} c^2 &= r^2\left(1 - \frac{2\cos N\cos\nu}{\cos\varphi} + \frac{\cos^2\nu}{\cos^2\varphi}\right) \\ \text{ebenso ist}\quad b^2 &= r^2\left(1 - \frac{2\cos M\cos\mu}{\cos\varphi} + \frac{\cos^2\mu}{\cos^2\varphi}\right) \\ a^2 &= r^2\left(1 - \frac{2\cos L\cos\lambda}{\cos\varphi} + \frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\varphi}\right) \end{aligned}\right\} \quad (4$$

Zur Bestimmung der Winkel α, β, γ übergehend, benutzen wir folgenden als bekannt vorauszusetzenden Satz: Wenn eine ebene Figur F auf einer zweiten Ebene in F' projizirt ist und die Winkel, welche die Projektionsrichtung mit den Normalen auf die Ebenen F und F' bezüglich bildet, sind n und n', so ist

$$F : F' = \cos n' : \cos n.$$

Denken wir uns nun BC und $B'C'$ gezogen, so ist das Dreieck $B'C'O'$ die Projektion des Dreiecks BCO und zwar bildet die Normale AO zum Dreieck BCO mit der Projektionsrichtung den Winkel L und die Normale SO zum Dreieck $B'C'O'$ bildet mit der Projektionsrichtung den Winkel φ. Weil aber

$$\Delta\, BCO = \frac{1}{2}r^2,\quad \Delta\, B'C'O' = \frac{1}{2}bc \sin\alpha,$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{r^2 \cos L}{bc \cos\varphi} \\ \sin\beta &= \frac{r^2 \cos M}{ac \cos\varphi} \\ \sin\gamma &= \frac{r^2 \cos N}{ab \cos\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad (5$$

Nimmt man hiezu noch die Relation

$$\alpha + \beta + \gamma = 360^0 \qquad (6$$

so sind die Winkel α, β, γ vollständig bestimmt.

Aufgabe II.

Aus der Projektion des Dreibeins die Lage desselben gegen die Projektionsebene, seine Grösse und die Projektionsrichtung zu bestimmen.

Es handelt sich darum, aus den Grössen α, β, γ, a, b, c die Grössen r, φ, L, M, N, λ, μ, ν zu bestimmen.

Durch Addiren der Gleichungen (4) erhält man mit Beiziehung von (1) und (3).

$$a^2 + b^2 + c^2 = r^2 \left(1 + \frac{1}{\cos^2\varphi}\right),$$

und durch Quadriren und Addiren der Gleichungen (5) unter Benutzung von (2).

$$b^2 c^2 \sin^2\alpha + c^2 a^2 \sin^2\beta + a^2 b^2 \sin^2\gamma = \frac{r^4}{\cos^2\varphi.}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\left.\begin{aligned} A &= a^2 + b^2 + c^2 \\ B &= \pm\sqrt{b^2 c^2 \sin^2\alpha + c^2 a^2 \sin^2\beta + a^2 b^2 \sin^2\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad (7$$

so hat man also, wenn das Zeichen von B einstweilen unbestimmt gelassen wird,

$$A = r^2 \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \varphi}\right)$$

$$B = \frac{r^2}{\cos \varphi}$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen r^2, so erhält man

$$\cos^2 \varphi = \frac{A^2 - 2B^2 - A\sqrt{A^2 - 4B^2}}{2B^2}$$

wobei nur $- A \sqrt{A^2 - 4B^2}$ gesetzt werden muss, weil $+ A \sqrt{A^2 - 4B^2}$, wie man leicht sieht, einen Werth für $\cos^2 \varphi$ gibt, welcher grösser als 1 ist. Demnach wird

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= \frac{A - \sqrt{A^2 - 4B^2}}{2} \\ \cos \varphi &= \frac{r^2}{B}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Führt man den letzten Werth von $\cos \varphi$ in die Gleichungen (5) ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \cos L &= \frac{bc \sin \alpha}{B} \\ \cos M &= \frac{ca \sin \beta}{B} \\ \cos N &= \frac{ab \sin \gamma}{B} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Endlich ergeben die Gleichungen (4) die Werthe der Winkel λ, μ, ν, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{\cos \varphi}{r}(r \cos L \pm \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 L}) \\ \cos \mu &= \frac{\cos \varphi}{r}(r \cos M \pm \sqrt{b^2 - r^2 \sin^2 M}) \\ \cos \nu &= \frac{\cos \varphi}{r} r \cos N \pm \sqrt{c^2 - r^2 \sin^2 N}) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Man sieht sogleich, dass, weil diese Werthe den Gleichungen (1) und (3) genügen müssen, die Vorzeichen der Wurzelgrössen nicht unabhängig von einander sein werden.

Was endlich die räumliche Darstellung des gesuchten Dreibeins betrifft, so ergibt sich dieselbe aus den obigen Ausdrücken von selbst. Nimmt man nämlich irgend eine Längeneinheit m und setzt überall $\frac{a}{\sqrt{m}}, \frac{b}{\sqrt{m}}, \frac{c}{\sqrt{m}}$ für a, b, c resp., so werden die Gleichungen (7) homogen, so dass A und B ebenfalls Linien vorstellen. In den Gleichungen (8) hat man ebenfalls $\frac{r}{\sqrt{m}}$ für r zu setzen. Die Konstruktion von r und φ aus den Ausdrücken in (8) ergibt sich sehr leicht, ebenso die von L, M, N aus den Ausdrücken in (9), letztere in folgender eleganter Form. Man errichte aus den Längen $\frac{bc \sin \alpha}{m}$, $\frac{ca \sin \beta}{m}$, $\frac{ab \sin \gamma}{m}$ ein rechtwinkliges Parallelepipedum, so hat die Diagonale desselben die gleichen Neigungen zu den Kanten, wie die Normale auf der Projektionsebene zu den Axen des Dreibeins. Oder als Lehrsatz ausgesprochen:

T r ä g t m a n a u f d e n A x e n e i n e s D r e i b e i n s G e r a d e a b, w e l c h e m i t d e n P r o j e k t i o n e n d e r g e g e n ü b e r l i e g e n d e n S e i t e n f l ä c h e n a u f e i n e E b e n e p r o p o r t i o n a l s i n d, u n d v e r v o l l s t ä n d i g t d a s P a r a l l e l e p i p e d u m; s o i s t d i e D i a g o n a l e d e s s e l b e n i m S c h e i t e l d e s D r e i b e i n s s e n k r e c h t z u r P r o j e k t i o n s e b e n e, w i e a u c h d i e P r o j e k t i o n s r i c h t u n g a n g e n o m m e n w u r d e.

Die Konstruktion der Winkel λ, μ, ν bietet ebenfalls keine Schwierigkeiten dar, wenn man bemerkt, dass der Ausdruck $r \cos L \pm \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 L}$ die dritte Seite eines Dreiecks ist, von welchem a und r zwei Seiten und L der Gegenwinkel von a ist.

Aufgabe III.

Man soll untersuchen, wie viele reelle Dreibeine einer beliebig angenommenen Projektion entsprechen.

Die Realität von r^2 aus (8) erfordert lediglich, dass

$$A^2 - 4 B^2 \geqq o$$

d. h. es muss

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 4(b^2 c^2 \sin^2 \alpha + c^2 a^2 \sin^2 \beta + a^2 b^2 \sin^2 \gamma) \geqq o.$$

Der Ausdruck linkerhand ist leicht auf die Form zu bringen

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2 b^2 c^2 \cos 2 \alpha + 2 c^2 a^2 \cos 2 \beta + 2 a^2 b^2 \cos 2 \gamma$$

oder weil $\alpha + \beta + \gamma = 360^0$ und daher

$$\cos 2 \alpha = \cos 2 \beta \cos 2 \gamma - \sin 2 \beta \sin 2 \gamma,$$

$$(a^2 + b^2 \cos 2 \gamma + c^2 \cos 2 \beta)^2 + (b^2 \sin 2 \gamma - c^2 \sin 2 \beta)^2$$

welches in der That immer gleich oder grösser als Null ist. Für ersteres wird erfordert, dass

$$a^2 + b^2 \cos 2 \gamma + c^2 \cos 2 \beta = o \text{ und } b^2 \sin 2 \gamma = c^2 \sin 2 \beta$$

d. h. dass mit 3 Geraden, welche bezüglich proportional mit a^2, b^2, c^2 sind, ein Dreieck konstruirt werden kann, dessen Winkel bez. gleich $2 \alpha - 180^0$, $2 \beta - 180^0$, $2 \gamma - 180^0$ sind. In diesem Fall ist also

$$\pm A = 2 B, \quad r^2 = \frac{A}{2}, \quad \cos \varphi = 1$$

d. h. die Projektionsrichtung ist senkrecht zur Projektionsebene. Man hat alsdann die gewöhnliche senkrechte axonometrische Projektion.

Aus der Realität von r^2 folgt auch die von $\cos \varphi$.

Damit aber φ reell sei, muss noch die Bedingung erfüllt werden:

$$r^2 \leqq B \text{ oder } A - \sqrt{A^2 - 4B^2} \leqq 2B$$

welches wieder die Bedingung $A > 2B$ gibt, deren reelle Existenz eben dargethan wurde.

Der Werth von cos φ in (8) enthält die Wurzelgrösse B, welche sowohl positiv als negativ genommen werden kann. Im ersten Fall wird $\varphi < 90^0$, im zweiten $> 90^0$, und zwar ergänzt der stumpfe Werth von φ den spitzen zu 180^0. Dies bedeutet nichts anderes, als dass die Projektionsrichtung sowohl gegen die Ebene hin als von der Ebene weg gedacht werden kann. Nennen wir erstere Richtung, welche dem positiven Werth von cos φ entspricht, die positive, letztere aber die negative.

Dass ferner die Winkel L, M, N immer reell sind, geht aus den Bestimmungen (9) sogleich hervor, da dort der Nenner grösser als jeder Zähler ist. Für den negativen Werth von B, welcher ebenfalls dem negativen Werth von cos φ entspricht, erhält man auch negative Werthe von cos L, cos M, cos N. Das heisst: es gibt zwei verschiedene Dreibeine von gleicher Axenlänge, und zwar haben dieselben resp. die gleiche Lage zur positiven und zur negativen Projektionsrichtung. Da aber irgend eine Axe des einen mit der entsprechenden des andern die gleiche Projektion gibt und also beide in einer Ebene durch PO liegen, so folgt, dass diese beiden Dreibeine symmetrisch sind mit Bezug auf eine zur Projektionsrichtung senkrechte Ebene.

Das nämliche Resultat, dass es nur zwei verschiedene reelle Dreibeine gibt, welche der Aufgabe II genügen, bieten die Gleichungen (10). Wir werden nämlich alsbald zeigen, dass die Vorzeichen der Wurzelgrössen daselbst von einander abhangen in der Weise, dass, wenn eines willkührlich angenommen wird, die andern beiden dadurch bestimmt sind. Man hat für $\cos\lambda$ die zwei Werthe

$$\cos\lambda = \frac{\cos\varphi}{r}(r\cos L + \sqrt{a^2 - r^2\sin^2 L}),$$

$$\cos\lambda = \frac{\cos\varphi}{r}(r\cos L - \sqrt{a^2 - r^2\sin^2 L}).$$

Diese beiden Werthe entsprechen gerade den eben besprochenen beiden Dreibeinen. Denn setzt man im ersten $-\cos\varphi$ für $\cos\varphi$, so muss auch $-\cos L$ für $\cos L$ gesetzt werden, und dann wird

$$\cos\lambda = \frac{\cos\varphi}{r}(r\cos L - \sqrt{a^2 - r^2\sin^2 L}),$$

was mit dem zweiten Werth von $\cos\lambda$ gleichlautend ist.

Wir haben also unter allen Umständen nie mehr als zwei Dreibeine, welche der gegebenen Projektion genügen, auf der einen Seite der Ebene, und diese liegen symmetrisch zu einer auf der Projektionsrichtung senkrechten Ebene. Weil aber der Raum symmetrisch ist, so muss es auf der andern Seite der Projektionsebene eben so viele mit jenen kongruente geben, und zwar liegen diese und ihre Projektionsrichtungen symmetrisch zu den beiden ersten und deren Projektionsrichtungen, mit Bezug auf die Projektionsebene selbst.

Es bleibt uns der Nachweis, dass die Werthe von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ stets reell und < 1 sind. Es wird

$$\sin^2 L = 1 - \cos^2 L = \frac{a^2\,(b^2\sin^2\gamma + c^2\sin^2\beta)}{B^2}$$

$$r^2 = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4B^2}}{2} = \frac{2B^2}{A + \sqrt{A^2 - 4B^2}}$$

$$a^2 - r^2 \sin^2 L =$$

$$a^2 \frac{(a^2+b^2\cos 2\gamma+c^2\cos 2\beta)+\sqrt{(a^2+b^2\cos 2\gamma+c^2\cos 2\beta)^2+(b^2\sin 2\gamma-c^2\sin 2\beta)^2}}{A+\sqrt{A^2-4B^2}}$$

Dieser Ausdruck ist stets positiv, also $\cos\lambda$ reell, ebenso $\cos\mu$, $\cos\nu$. Wenn ferner die Bedingungsgleichung (1) erfüllt ist, so sind die Werthe von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ kleiner als 1. Substituirt man nun dieselben aus (10) in diese Gleichung, so erhält man die Bedingung

$$\pm \cos L\sqrt{a^2-r^2\sin^2 L} \pm \cos M\sqrt{b^2-r^2\sin^2 M} \pm \cos N\sqrt{c^2-r^2\sin^2 N} = o$$

die auch so geschrieben werden kann

$$\cos^2 L\,(a^2-r^2\sin^2 L)+\cos^2 M\,(b^2-r^2\sin^2 M)-\cos^2 N\,(c^2-r^2\sin^2 N)$$

$$= \mp\, 2\cos L\cos M\sqrt{(a^2-r^2\sin^2 L)\,(b^2-r^2\sin^2 M)},$$

wo rechterhand das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem $\sqrt{a^2-r^2\sin^2 L}$ und $\sqrt{b^2-r^2\sin^2 M}$ gleiches oder ungleiches Vorzeichen erhalten. Diese Gleichung nimmt nach gehöriger Reduktion die Form an

$$\Delta = \pm\sqrt{\Delta^2}$$

worin $\Delta = (a^2+b^2)\cos\gamma + c^2\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma\sqrt{A^2-4B^2}$, (11

so dass also die Bedingungsgleichung (1) unter Vorbehalt der gehörigen Vorzeichen der Wurzelgrössen in $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ immer erfüllt ist.

Die Grössen $\sqrt{a^2-r^2\sin^2 L}$ und $\sqrt{b^2-r^2\sin^2 M}$ erhalten gleiche Vorzeichen, wenn Δ positiv ist, ungleiche hingegen, wenn Δ negativ ist. Aehnliches findet bezüglich der Grösse $\sqrt{c^2-r^2\sin^2 N}$ statt.

Dass endlich auch die Gleichung (3) erfüllt ist, geht aus der Substitution der Werthe der genannten cos in diese Gleichung hervor, indem sich hiedurch wieder die nämliche soeben aufgelöste Bedingung herausstellt.