Die Auflösung der höhern numerischen Gleichungen

von

W. Denzler.

(Fortsetzung.)

Schliesslich bemerken wir, dass, wenn die Substitution von $x\sqrt[n]{\alpha_n\,\alpha_n}$ in 12) für x zu einer weder genau noch annähernd reciproken Gleichung führt, wenigstens 2 der Moduli zu den Wurzeln von 12) merklich ungleich sein müssen. Wenn aber diese Substitution zu einer zwar nicht genau aber doch annähernd reciproken Gleichung führt, so wird es zweckmässig sein, diese Gleichung zur Bildung von Näherungswerthen der Wurzeln als eine reciproke zu behandeln, von der ausgehend man entweder nach dem bereits beschriebenen Verfahren entweder zuletzt zu einer Gleichung des 2^{ten} Grades gelangt, oder dann zu einer nicht reciproken Gleichung, deren Moduli nicht alle einander sehr nahe liegen können. Dass man durch diese Substitution auch erfährt, ob die Wurzeln von 12) Produkte aus den Wurzeln einer reciproken Gleichung in eine und dieselbe Zahl sind, und diese reciproke Gleichung selbst eben durch diese Substitution findet, ist wohl kaum zu bemerken nothwendig.

§. 6.

Wir haben im Vorhergehenden ein einfaches Mittel kennen gelernt, durch welches entweder 1) sofort mit völliger Bestimmtheit entschieden werden kann, ob irgend eine gegebene Gleichung Wurzeln mit wenigstens 2 merklich verschiedenen Moduln hat, oder 2), wenn diese einmalige Anwendung keinen Entscheid gäbe, die gegebene Gleichung auf einen höchstens halb so hohen Grad reducirt werden kann, deren Wurzeln wenigstens 2 ziemlich ungleiche Moduli haben, oder 3) die Herabsetzung der Gleichung auf den 2^{ten} Grad ermöglicht wird.

Wir haben daher jetzt nur noch zur vollständigen Auflösung der Aufgabe: die Moduli der Wurzeln einer Gleichung zu berechnen, die Frage zu beantworten, wie sich die Moduli der Wurzeln von der Gleichung 12) ermitteln lassen, wenn man bestimmt weiss, dass wenigstens 2 dieser Moduli nicht unbedeutend ungleich sind.

Nehmen wir vorerst an

I. Es sei q bekannt.

Verlangt man nun $r+1$ stellige Näherungswerthe von den Moduln der Wurzeln, so haben wir successive die 1^{te}, 2^{te} .. k^{te} Quadratgleichung zu 12) herzustellen, wo k nach der angenommenen Bezeichnung die kleinste positive ganze Zahl bedeutet, die im algebraischen Sinne nicht unter $\frac{1}{\lg 2}[\lg(r+2+\lg c)-\lg(\lg . q)]$ liegt; alsdann werden die Coefficienten $\alpha_{s_1,k}$, $\alpha_{s_2,k}$ .... $\alpha_{s_\nu,k}$ die sämmtlichen Eigenschaften von den Coefficienten der ersten Art besitzen. Gäbe es nun keine Coefficienten der 2^{ten} und 3^{ten} Art, so würde die aus jenen ν Coefficienten gebildete Reihe

$$\left[(-1)^{n_1}\alpha_{s_1,k}\right]^{\frac{1}{n_1 . 2^k}}, \left[(-1)^{n_2}\frac{\alpha_{s_2,k}}{\alpha_{s_1,k}}\right]^{\frac{1}{n_2 . 2^k}},$$

$$\left[(-1)^{n_3}\frac{\alpha_{s_3,k}}{\alpha_{s_2,k}}\right]^{\frac{1}{n_3 . 2^k}} \dots\dots (-1)^{n_\nu}\left[\frac{\alpha_{s_\nu}}{\alpha_{s_{\nu-1}}}\right]^{\frac{1}{n_\nu . 2^k}}$$

nach §. 3 Glied für Glied mit folgender Reihe übereinstimmen

$$\delta_1 W_{s_1}, \delta_2 W_{s_2}, \delta_3 W_{s_3} \dots\dots \delta_\nu W_{s_\nu}$$

wo δ_1, δ_2 .... δ_ν Zahlen bezeichnen, von welchen man bloss weiss, dass sie zwischen $\left(1+\frac{1000}{999}10^{-r-2}\right)$ und $\left[1-\frac{1000}{999}10^{-r-2}\right]$ liegen, wo ferner W_{s_1} den Modulus zu s_1 oder n_1 Wurzeln, W_{s_2} den zu s_2-s_1 oder n_2, W_{s_3} den zu s_3-s_2 oder n_3, . . , W_{s_ν} den Modulus zu n_ν Wurzeln der Gleichung 12) darstellt. Enthielte aber die k^{te} Quadratgleichung ausser den ν Coefficienten der ersten Art bloss noch Coefficienten der 2^{ten} Art, so könnten diese genau so wie die Coefficienten der ersten Art zur

Berechnung der Moduli verwendet werden; denn, nehmen wir um diess klar zu machen, an, die k^{te} Quadratgleichung enthielte zwischen dem $s_{\varepsilon-1}$^{ten} und s_ε^{ten} Coefficienten etwa 3 Coefficienten der 2ten Art, und es seien diese

$$\alpha_{p+s_{\varepsilon-1}},\quad \alpha_{q+s_{\varepsilon-1}},\quad \alpha_{r+s_{\varepsilon-1}}$$

wo wir der Kürze wegen die Zahl k von den Indices wegliessen; so müssten nach der Definition der Coefficienten der 2ten Art die Gleichungen Statt finden:

$$\delta_1\left[W_{s_1}^{n_1}\, W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_{\varepsilon-1}}^{n_{\varepsilon-1}}\, W_{s_\varepsilon}^{p}\right]^{2^k} = (-1)^{p+s_{\varepsilon-1}}\alpha_{p+s_{\varepsilon-1}}$$

$$\delta_2\left[W_{s_1}^{n_1}\, W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_{\varepsilon-1}}^{n_{\varepsilon-1}}\, W_{s_\varepsilon}^{q}\right]^{2^k} = (-1)^{q+s_{\varepsilon-1}}\alpha_{q+s_{\varepsilon-1}}$$

$$\delta_3\left[W_{s_1}^{n_1}\, W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_{\varepsilon-1}}^{n_{\varepsilon-1}}\, W_{s_\varepsilon}^{r}\right]^{2^k} = (-1)^{r+s_{\varepsilon-1}}\alpha_{r+s_{\varepsilon-1}}$$

Dividirt man durch die 3te dieser 3 Gleichungen folgende Gleichung, die nach §. 3 Statt finden muss:

$$\delta_4\left[W_{s_1}^{n_1}\, W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon}\right]^{2^k} = (-1)^{s_\varepsilon}\alpha_{s_\varepsilon}$$

hierauf die 3te durch die 2te jener 3 Gleichungen, dann die 2te durch die erste, endlich die erste durch die nach §. 3 existirende Gleichung

$$\delta\left[W_{s_1}^{n_1}\, W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_{\varepsilon-1}}^{n_{\varepsilon-1}}\right]^{2^k} = (-1)^{s_{\varepsilon-1}}\alpha_{s_{\varepsilon-1}}$$

so erhalten wir folgende Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\lambda\left[W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon-r}\right]^{2^k} &= (-1)^{s_\varepsilon-s_{\varepsilon-1}-r}\,\frac{\alpha_{s_\varepsilon}}{\alpha_{r+s_{\varepsilon-1}}}\\
\lambda_1\left[W_{s_\varepsilon}^{r-q}\right]^{2^k} &= (-1)^{r-q}\,\frac{\alpha_{r+s_{\varepsilon-1}}}{\alpha_{q+s_{\varepsilon-1}}}\\
\lambda_2\left[W_{s_\varepsilon}^{q-p}\right]^{2^k} &= (-1)^{q-p}\,\frac{\alpha_{q+s_{\varepsilon-1}}}{\alpha_{p+s_{\varepsilon-1}}}\\
\lambda_3\left[W_{s_\varepsilon}^{p}\right]^{2^k} &= (-1)^{p}\,\frac{\alpha_{p+s_{\varepsilon-1}}}{\alpha_{s_{\varepsilon-1}}}
\end{aligned}\right\} \quad 57)$$

wo λ, λ_1, λ_2 und λ_3 Zahlen bezeichnen, die nicht über $\frac{1+1,344\,10^{-r-2}}{1-1,344\,10^{-r-2}}$ liegen. Nun ist

$$\frac{1+1,344\,10^{-r-2}}{1-1,344\,10^{-r-2}} = [1+1,344\,10^{-r-2}]\left[1+\frac{\frac{1,344}{1-1,344\,10^{-r-2}}}{10^{r+2}}\right]$$

und da $\frac{1,344}{1-1,344\,10^{-r-2}}$ sein Maximum für $r = 1$ erreicht und dieser Ausdruck für $r = 1$ unter 1,346 liegt, so hat man auch folgende Ungleichheit:

$$\frac{1+1,342\,10^{-r-2}}{1-1,342\,10^{-r-2}} < (1+1,344\,10^{-r-2})\,(1+1,3458\,10^{-r-2})$$

woraus nun sehr leicht folgt, dass λ, λ_1, λ_2, λ_3 Zahlen zwischen $(1+2,69\,10^{-r-2})$ und $(1-2,69\,10^{-r-2})$ sind.

Betrachtet man nun die angenommenen 3 Coefficienten der 2ten Art in der kten Quadratgleichung zu 12) als Coefficienten der ersten Art, und dazu ist man geradezu gezwungen, so gibt man bei dieser Auffassung den Quotienten

$$\frac{\alpha_{s_\varepsilon}}{\alpha_{r+s_{\varepsilon-1}}},\ \frac{\alpha_{r+s_{\varepsilon-1}}}{\alpha_{q+s_{\varepsilon-1}}} \cdots \frac{\alpha_{p+s_{\varepsilon-1}}}{\alpha_{s_{\varepsilon-1}}}$$

gerade die Deutung, die durch die Gleichung 57) ausgedrückt ist, und findet dann zuletzt, dass W_{s_ε} der Modulus zu $[s_\varepsilon - (r + s_{\varepsilon-1})]$ oder $n_\varepsilon - r$ Wurzeln, ferner W_{s_ε} der Modulus zu $[r + s_{\varepsilon-1} - (q + s_{\varepsilon-1})]$ oder $r - q$ andern Wurzeln, überdiess zu $(q - p)$ neuen Wurzeln und endlich zu p noch andere Wurzeln, somit W_{s_ε} im Ganzen zu $[n_\varepsilon - r + r - q + q - p + p]$ oder zu n_ε Wurzeln gehört, wie es sein soll.

Enthält aber die kte Quadratgleichung zu 12) auch Coefficienten der 3ten Art, dann ist es unerlässlich, diese zu beseitigen, weil diese zu ganz unrichtigen Resultaten führen könnten, wenn sie als Coefficienten der ersten oder 2ten Art behandelt würden. Diese Beseitigung wird auf folgende Weise möglich:

Nehmen wir an, die absoluten Werthe aller der Coefficienten in der kten Quadratgleichung zu 12), welche die in §. 3. V. erwähnten 3 Eigenschaften besitzen, seien

$$\alpha_a,\ \alpha_b,\ \alpha_c,\ \alpha_d,\ \alpha_e,\ \alpha_f,\ \alpha_g,\ \alpha_n$$

wo die Indices a, b, c . . . n eine steigende Reihe bilden und die Ordnungszahlen der Coefficienten in dieser Gleichung ausdrücken; nehmen wir ferner an, α_d sei der erste von den Coefficienten der 3ten Art, die sich unter den sämmtlichen Coefficienten α_a, α_b . . . α_n befinden mögen, mithin die dem α_d vorangehenden Coefficienten zur ersten oder 2ten Art gehörig, nehmen wir überdiess an, α_g sei der erste von den Coefficienten der 1ten oder 2ten Art, die auf α_d folgen, mithin α_e und α_f der 3ten Art angehörend, so hat man nach der Eklärung von Coefficienten der 3ten Art und früher Bewiesenem folgende Relationen:

$$\left.\begin{array}{l} \delta\,[W_1 W_2 \ldots W_c]^{2^k} = \alpha_c \\ \gamma\,[W_1 W_2 \ldots W_d]^{2^k} = \alpha_d \\ \gamma_1[W_1 W_2 \ldots W_e]^{2^k} = \alpha_e \\ \gamma_2[W_1 W_2 \ldots W_f]^{2^k} = \alpha_f \\ \delta_1[W_1 W_2 \ldots W_g]^{2^k} = \alpha_g \end{array}\right\} \qquad 58)$$

wo δ und δ_1 zwischen $(1 + 1{,}344\ 10^{-r-2})$ und $(1 - 1{,}344\ 10^{-r-2})$, hingegen γ, γ_1, γ_2 unter der Zahl $(1 - 1{,}344\ 10^{-r-2})$ liegen.

Da nun zwischen den Coefficienten α_c und α_g kein Coefficient der ersten oder 2ten Art sich befindet, so sind nach dem Vorhergehenden die sämmtlichen Moduli W_{c+1}, $W_{c+2} \ldots W_d \ldots W_e \ldots W_f\ W_{f+1} \ldots W_g$ einander gleich, und man kann daher aus den Gleichungen 58) sehr leicht auf folgende Gleichungen schliessen:

$$\left(\frac{\alpha_d}{\alpha_c}\right)^{\frac{1}{2^k(d-c)}} = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{1}{2^k(d-c)}} W_d \qquad 59)$$

$$\left(\frac{\alpha_g}{\alpha_f}\right)^{\frac{1}{2^k(g-f)}} = \left(\frac{\delta_1}{\gamma_2}\right)^{\frac{1}{2^k(g-f)}} W_d \qquad 60)$$

Nun ist nach der Bedeutung von δ, γ, δ_1, γ_2 der Quotient $\frac{\gamma}{\delta}$ kleiner als 1, während $\frac{\delta_1}{\gamma_2}$ grösser als 1 ist, mithin der erste

Theil der Gleichung 59) entschieden kleiner als der erste Theil von 60), woraus folgt, dass die Reihe

$$[\alpha_a]^{\frac{1}{2^k a}}, \left[\frac{\alpha_b}{\alpha_a}\right]^{\frac{1}{2^k(b-a)}}, \left[\frac{\alpha_c}{\alpha_b}\right]^{\frac{1}{2^k(c-b)}},$$

$$\left[\frac{\alpha_d}{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{2^k(d-c)}} \dots \left[\frac{\alpha_g}{\alpha_f}\right]^{\frac{1}{2^k(g-f)}}, \left[\frac{\alpha_n}{\alpha_g}\right]^{\frac{1}{(2^k n-g)}} \qquad 61)$$

wenigstens an einer Stelle steigen muss. Wenn daher die Reihe 61) nirgends steigt, so ist unter den Coefficienten α_a, α_b, ... α_n kein Coefficient der 3^{ten} Art vorhanden, steigt sie aber an irgend einer Stelle, z. B. zuerst im 3^{ten} Gliede, so ist sicher α_b nicht ein Coefficient der ersten Art und sofort als geradezu unverwendbar, oder doch wenigstens als überflüssig zur Bestimmung der Moduli zu beseitigen. Dass α_b unter dieser Voraussetzung nicht ein Coefficient der ersten Art sein kann, erhellet aus Folgendem:

Wäre α_b ein Coefficient der ersten Art, so müsste von folgenden 4 Fällen nothwendig Einer Statt finden:

Erster Fall.

α_a und α_c sind beide nicht der 3^{ten} Art. In diesem Falle sind die Moduli W_1, W_2, W_3 ... W_a, ferner W_{a+1}, W_{a+2} ... W_b, und auch W_{b+1}, W_{b+2} ... W_c einander gleich, wobei W_a und W_b gleich, aber auch ungleich sein könnten, hingegen $W_b > W_c$, weil α_b ein Coefficient der ersten Art wäre. Man hat daher, wenn δ, δ_1 und δ_2 Zahlen zwischen $(1 + 1{,}344\ 10^{-r-2})$ und $(1 - 1{,}344\ 10^{-r-2})$ bezeichnen, mit Rücksicht auf die Lehrsätze in §. 3 und die Definition eines Coefficienten der 1^{ten} und 2^{ten} Art, folgende Gleichungen:

$$\alpha_a = \delta\,(W_1 W_2 \dots W_a)^{2k}$$

$$\alpha_b = \delta_1\left(W_1 W_2 \dots W_a W_b^{b-a}\right)^{2k}$$

$$\alpha_c = \delta_2\left(W_1 W_2 \dots W_a W_b^{b-a} W_c^{c-b}\right)^{2k}$$

und hieraus folgt ohne Mühe, dass

$$\frac{\left[\frac{\alpha_c}{\alpha_b}\right]^{\frac{1}{c-b}}}{\left[\frac{\alpha_b}{\alpha_a}\right]^{\frac{1}{b-a}}} = \frac{\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{c-b}}}{\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{b-a}}} \left(\frac{W_c}{W_b}\right)^{2k}$$

Der erste Faktor im 2^{ten} Theil dieser Gleichung ist höchstens $= \left(\frac{1 + 1{,}344\ 10^{-r-2}}{1 - 1{,}344\ 10^{-r-2}}\right)^2$, während der 2^{te} Faktor nicht grösser als $\frac{1}{c\,.\,10^{r+2}}$, wo c jetzt den grössten Binomialcoefficient in der n^{ten} Potenz eines Binoms bezeichnet, woraus folgt, dass dieser 2^{te} Theil selbst, mithin auch der erste, und daher auch der Quotient aus dem 3^{ten} Gliede der Reihe 61) durch das 2^{te} Glied kleiner als 1 wäre, was gegen die Voraussetzung ist. Es kann somit dieser erste Fall nicht eintreten.

Zweiter Fall.

α_a und α_c sind beide der 3^{ten} Art. In diesem Falle sind die Moduli $W_1, W_2, \ldots W_a, W_{a+1} \ldots W_b$ einander gleich, ebenso die Moduli $W_{b+1}, W_{b+2} \ldots W_c$, hingegen W_b wieder entschieden grösser als W_c. Bezeichnet nun γ wie γ_1 eine Zahl unter $1 - 1{,}344\ 10^{-r-2}$ und δ eine Zahl zwischen $1 + 1{,}344\ 10^{-r-2}$ und $1 - 1{,}344\ 10^{-r-2}$, so kann man ganz ähnlich wie vorhin auf folgende Gleichung schliessen:

$$\frac{\left[\frac{\alpha_c}{\alpha_b}\right]^{\frac{1}{c-b}}}{\left[\frac{\alpha_b}{\alpha_a}\right]^{\frac{1}{b-a}}} = \frac{\left[\frac{\gamma_1}{\delta}\right]^{\frac{1}{c-b}}}{\left[\frac{\delta}{\gamma}\right]^{\frac{1}{b-a}}} \left(\frac{W_c}{W_b}\right)^{2k}$$

Nach der Bedeutung von γ, γ_1 und δ ist nun $\frac{\gamma_1}{\delta}$ ein echter, hingegen $\frac{\delta}{\gamma}$ ein unechter Bruch und $\frac{W_c}{W_b} \overline{\gtrless} \frac{1}{c.10^{r+2}}$, woraus wieder sofort, wie vorhin, auf die Unmöglichkeit dieses Falls geschlossen werden kann.

Dritter Fall.

α_a ist nicht der 3^{ten} Art, hingegen α_c der 3^{ten} Art. In diesem Falle sind die Moduli $W_1, W_2 \ldots W_a$, ferner $W_{a+1}, W_{a+2} \ldots W_b$, und auch $W_{b+1}, W_{b+2} \ldots W_c$ einander gleich und W_c entschieden grösser als W_b, und man findet, wie in den vorhergehenden Fällen, wenn γ, δ und δ_1 dieselbe Bedeutung haben, dass:

$$\frac{\left[\frac{\alpha_c}{\alpha_b}\right]^{\frac{1}{c-b}}}{\left[\frac{\alpha_b}{\alpha_a}\right]^{\frac{1}{b-a}}} = \frac{\left[\frac{\gamma}{\delta}\right]^{\frac{1}{c-b}}}{\left[\frac{\delta}{\delta_1}\right]^{\frac{1}{b-a}}} \left(\frac{W_c}{W_b}\right)^{2^k}$$

Da nun $\frac{\gamma}{\delta}$ jedenfalls ein echter Bruch, und $\frac{\delta}{\delta_1}$ nicht unter $\frac{1-1{,}344\ 10^{-r-2}}{1+1{,}344\ 10^{-r-2}}$ sein kann, so folgt wie früher, dass auch dieser Fall nicht eintreten kann.

Vierter Fall.

α_a ist der 3^{ten} Art, hingegen α_c nicht der 3^{ten} Art. Die Unmöglichkeit dieses Falles lässt sich genau so wie die des 2^{ten} beweisen.

Man kann also nicht annehmen, α_b sei ein Coefficient der ersten Art und man wird daher diesen Coefficient aus der Reihe der Coefficienten, welche die in §. 4. III. erwähnten 3 Eigenschaften besitzen, entfernen und hernach die Bildung der Reihe

$$[\alpha_a]^{\frac{1}{2^k a}},\ \left[\frac{\alpha_c}{\alpha_a}\right]^{\frac{1}{2^k(c-a)}},\ \left[\frac{\alpha_d}{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{2^k(d-c)}} \ldots\ldots \left[\frac{\alpha_n}{\alpha_g}\right]^{\frac{1}{2^k(n-g)}}$$

so lange fortsetzen, bis man entweder wieder ein Glied erhält, das grösser ist als das Vorhergehende, oder wenn ein solches Glied sich nicht mehr zeigen würde, die Reihe complet berechnen. Im letztern Falle kann man versichert sein, dass keiner der zur Bildung dieser Reihe verwendeten Coefficienten zur 3^{ten} Art gehört; im erstern Falle aber muss wieder derjenige Coefficient entfernt werden, durch welchen zur Herstellung desjenigen Gliedes dividirt werden musste, das sich grösser als das Vorhergehende zeigte, u. s. f. Die Beseitigung von Coefficienten der 3ten Art wollen wir noch an folgendem Beispiel erläutern: Es ist zu der Gleichung

$$x^7 - 100x^6 + 0.x^5 - 1{,}000001x^4 + 100{,}0001x^3 - 0.x^2 + 0{,}000001x - 0{,}0001 = 0.$$

Die erste Quadratgleichung:

$$x^7 - 10^4x^6 + 0.x^5 - (1 + 10^{-12})x^4 + (10^4 + 10^{-8})x^3 - 0.x^2 + 10^{-12}x - 10^{-8} = 0.$$

Die zweite Quadratgleichung:

$$x^7 - 10^8x^6 + 0.x^5 - (1 + 10^{-24})x^4 + (10^8 + 10^{-16})x^3 - 0.x^2 + 10^{-24}x - 10^{-16} = 0.$$

Die dritte Quadratgleichung:

$$x^7 - 10^{16}x^6 + 0.x^5 - (1 + 10^{-48})x^4 + (10^{16} + 10^{-32})x^3 - 0.x^2 + 10^{-48}x - 10^{-32} = 0.$$

Wir sehen hier, dass die Coefficienten $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{4,3}$, $\alpha_{6,3}$ und $\alpha_{7,3}$ die sämmtlichen 3 in §. 3. III. erwähnten Eigenschaften für $r = 21$ besitzen, und dass die 2 übrigen Coefficienten in dieser 3ten und jeder höhern Quadratgleichungen beständig $= 0$ sind. Um nun 21stellige Näherungswerthe von den sämmtlichen Moduln der Wurzeln zu der ursprünglichen gegebenen Gleichung zu erhalten bilden wir die Reihe

$$\left[-\alpha_{1,3}\right]^{\frac{1}{2^3}} \left[\frac{\alpha_{3,3}}{\alpha_{1,3}}\right]^{\frac{1}{2^3(3-1)}} \left[\frac{\alpha_{4,3}}{\alpha_{3,3}}\right]^{\frac{1}{2^3}} \left[\frac{\alpha_{6,3}}{\alpha_{4,3}}\right]^{\frac{1}{2^3(6-4)}} \left[\frac{-\alpha_{7,3}}{\alpha_{6,3}}\right]^{\frac{1}{2^3}}$$

bis zu einem Gliede hin, das grösser ist als das unmittelbar Vorhergehende; und finden hiebei das 3te Glied grösser als das 2te, und wir haben daher den Divisor bei diesem 3ten Gliede, nämlich $\alpha_{3,3}$ als geradezu unverwendbaren Coefficienten zu beseitigen. Um nun zu untersuchen, ob unter den übrigen 4 von jenen 5 Coefficienten sich noch Coefficienten der 3ten Art befinden, bilden wir die Reihe

$$\left[-\alpha_{1,3}\right]^{\frac{1}{2^3}} \left[\frac{\alpha_{4,3}}{-\alpha_{1,3}}\right]^{\frac{1}{2^3(4-1)}} \left[\frac{\alpha_{6,3}}{\alpha_{4,3}}\right]^{\frac{1}{2^3(6-4)}} \left[\frac{-\alpha_{7,3}}{\alpha_{6,3}}\right]^{\frac{1}{2^3}}$$

und finden das letzte Glied grösser als das 3te, und man hat daher auch den Divisor bei diesem letzten Gliede, nämlich $\alpha_{6,3}$ als unverwendbaren Coefficienten der 3ten Art zu entfernen. Endlich ist noch die Reihe

$$[-\alpha_{1,3}]^{\frac{1}{2^3}} \left[\frac{\alpha_{4,3}}{-\alpha_{1,3}}\right]^{\frac{1}{2^3(4-1)}} \left[\frac{-\alpha_{7,3}}{\alpha_{4,3}}\right]^{\frac{1}{2^3(7-4)}}$$

zu untersuchen. Berechnen wir zu diesem Zwecke die einzelnen Glieder, so finden wir dieselben beziehungsweise gleich

$$10^2, \qquad (1+10^{-48})^{\frac{1}{24}}, \qquad \left[\frac{10^{-32}}{10^{16}+10^{-32}}\right]^{\frac{1}{24}}$$

Diese Reihe ist nun durchgehends fallend, und sind somit $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{4,3}$ und $\alpha_{7,3}$ lauter Coefficienten der 1ten Art, woraus nach Vorhergehendem sehr leicht gefolgert werden kann, dass 100 der Modulus zu 1 Wurzel, 1 der Modulus zu (4 — 1) Wurzeln und 0,01 der Modulus zu (7 — 4) Wurzeln der ursprünglich gegebenen Gleichung ist; und diess ist wirklich der Fall, denn die gegebene Gleichung hat die Wurzeln:

$$100,\ 0{,}01,\ 0{,}01\left(\cos\frac{2}{3}\pi \pm i \sin\frac{2}{3}\pi\right),\ 1,\ \left(\cos\frac{2}{3}\pi \pm i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

Würde man die Coefficienten der 3ten Art nicht entfernt, sondern sie zur Berechnung der Moduli der Wurzeln wie die Coefficienten der ersten Art verwendet haben, so hätte man zuletzt gefunden, dass 100 zu 3 Wurzeln, 0,0001 zu 2 Wurzeln, 0,1 zu 2 Wurzeln als Modulus gehört. Wir sehen hieraus, wie höchst wünschenswerth die Beseitigung der Coefficienten der 3ten Art sein muss.

II. Es sei q unbekannt.

Die aufzulösende Gleichung sei:

$$x^9 + \alpha_1 x^8 + \alpha_2 x^7 + \dots \alpha_9 = 0 \tag{62}$$

und man wisse nun von den Wurzeln dieser Gleichung weiter nichts, als dass mindestens 2 unter den den Wurzeln zugehörigen Moduli merklich ungleich sind. In diesem Falle bilden wir zur Herstellung von vierstelligen Näherungswerthen dieser Moduli, da

$$13 < \frac{1}{\lg 2}\Big[\lg[3+2+\lg(\tfrac{4}{9})] - \lg(\lg . 1{,}001)\Big] < 14$$

Die 14^{te} Quadratgleichung; jedoch natürlich nur dann, wenn in keiner der niedrigern Quadratgleichungen die Coefficienten zur Bestimmung der verlangten Näherungswerthe vollkommen geeignet erscheinen; d. h. so beschaffen, dass ein Theil der 9 Coefficienten die 3 in §. 3. V. angegebenen Eigenschaften besitzen, hingegen alle übrigen Coefficienten diese Eigenschaft nicht besitzen und auch in keiner höhern Quadratgleichung erlangen können. Gesetzt nun, auch die 14^{te} Quadratgleichung liesse noch Zweifel über die Deutung aller Coefficienten zu, so würden wir die Quadrirung der Wurzeln nicht weiter fortsetzen, sondern selbst auf die Gefahr hin, dass man höchstens 2stellige Näherungswerthe für die Moduli erhalte, das aus folgenden Betrachtungen sich ergebende Verfahren vorziehen.

Nehmen wir an, es seien die absoluten Werthe aller der Coefficienten in der 14^{ten} Quadratgleichung zu 62), welche der 3 in §. 3. V. erwähnten Eigenschaften theilhaft sind, folgende

$$\alpha_a,\ \alpha_b,\ \alpha_c,\ \alpha_d,\ \alpha_e,\ \alpha_f,\ \alpha_g,\ \alpha_9 \qquad 63)$$

wo die Indices a, b, . . . 9 eine steigende Reihe bilden und die Ordnungszahlen der Coefficienten in dieser Quadratgleichung ausdrücken. Dass unter diesen Coefficienten ausser α_9 noch wenigstens ein zweiter zur ersten Art gehört, wird man sogleich einsehen, wenn man den Lehrsatz §. 3. I. auf die Voraussetzung bezieht, nach welcher unter den Moduln zu den Wurzeln von 62) mindestens 2 vorkommen, die merklich ungleich sind.

Wenn nun die Reihe

$$[\alpha_a]^{\frac{1}{2^{14}.a}},\ \left[\frac{\alpha_b}{\alpha_a}\right]^{\frac{1}{2^{14}(b-a)}},\ \left[\frac{\alpha_c}{\alpha_b}\right]^{\frac{1}{2^{14}(c-b)}} \dots \left[\frac{\alpha_9}{\alpha_g}\right]^{\frac{1}{2^{14}(9-g)}} \qquad 64)$$

an irgend einer Stelle, z. B. zuerst an der 3^{ten} Stelle steigt, so ist sicher α_b nicht ein Coefficient der ersten Art. Um diess zu beweisen, können wir genau so verfahren, wie in dem Falle, da wir uns q bekannt dachten; nur werden wir bei der Behandlung der einzelnen 4 Fälle für die dort vorkommende Potenz

$$\left[\frac{W_c}{W_b}\right]^{2^k} \text{ setzen: } \left[\frac{(W_{b+1} W_{b+2} \ldots W_c)^{\frac{1}{c-b}}}{(W_{a+1} W_{a+2} \ldots W_b)^{\frac{1}{b-a}}}\right]^{2^9}$$

und alsdann in Erwägung ziehen, dass der Dividend bei diesem letztern Quotienten gewiss nicht über W_{b+1} und der Divisor nicht unter W_b liegen kann. Es seien α_b und α_e die Coefficienten, welche nach dem oben erläuterten Verfahren beseitigt werden müssen, um für die Reihe 64) eine nirgends steigende Reihe zu bilden, alsdann sind

$$\alpha_a, \ \alpha_c, \ \alpha_d, \ \alpha_f, \ \alpha_g, \ \alpha_9 \qquad 65)$$

die zur Bestimmung sämmtlicher Moduli vorhandenen Coefficienten.

1) Wenn nun jeder dieser Coefficienten nicht zur 3^{ten} Art gehört, mithin entweder der ersten oder 2^{ten} Art ist, so ist die Reihe

$$[\alpha_a]^{\frac{1}{2^{14}.a}}, \ \left[\frac{\alpha_c}{\alpha_a}\right]^{\frac{1}{2^{14}(c-a)}}, \ \left[\frac{\alpha_d}{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{2^{14}(d-c)}} \ldots \left[\frac{\alpha_9}{\alpha_g}\right]^{\frac{1}{2^{14}(9-g)}} \qquad 65_1)$$

Glied für Glied übereinstimmend mit folgender Reihe:

$$\mu(W_1 W_2 \ldots W_a)^{\frac{1}{a}}, \ \mu_1(W_{a+1} W_{a+2} \ldots W_c)^{\frac{1}{c-a}},$$

$$\mu_2(W_{c+1} W_{c+2} \ldots W_d)^{\frac{1}{d-c}} \ldots \mu_6(W_{g+1} W_{g+2} \ldots W_9)^{\frac{1}{9-g}}$$

wo $W_1, W_2 \ldots W_9$ die Moduli sämmtlicher Wurzeln der Gleichung 62) bedeuten, so der Grösse nach auf einander folgend, dass W_1 nicht kleiner als jeder der übrigen ist, und $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_6$ positive Zahlen bedeuten, die zwischen

$$\left[\frac{1 + 1{,}344 \,.\, 10^{-3-2}}{1 - 1{,}344 \,.\, 10^{-3-2}}\right]^{\frac{1}{2^{14}}} \text{ und } \left[\frac{1 - 1{,}344 \,.\, 10^{-3-2}}{1 + 1{,}344 \,.\, 10^{-3-2}}\right]^{\frac{1}{2^{14}}}$$

mithin auch zwischen $1 + 2 \,.\, 10^{-9}$ und $1 - 2 \,.\, 10^{-9}$ liegen. Es frägt sich nun, mit welchem Grade der Genauigkeit sich den einzelnen Gliedern dieser Reihe die Moduli der Wurzeln entnehmen lassen. Fassen wir zu diesem Behufe irgend eines dieser Glieder, z. B. das 3^{te}, in's Auge, so finden wir, da im

Allgemeinen zwischen dem c^{ten} und d^{ten} Coefficienten in der 14^{ten} Quadratgleichung Coefficienten vorausgesetzt werden müssen, die zwar in dieser 14^{ten} Quadratgleichung noch nicht, wohl aber in einer höhern Quadratgleichung die Eigenschaften von Coefficienten der ersten Art erlangen können, dass dieses Glied keineswegs gleich $\mu_2 W_{c+1}$ gesetzt werden darf, wie es der Fall wäre, wenn man die volle Gewissheit hätte, dass zwischen dem c^{ten} und d^{ten} Coefficienten in keiner Quadratgleichung ein Coefficient der ersten Art vorkommen könnte. Da jedoch die 14^{te} Quadratgleichung mindestens 4 stellige Näherungswerthe von jedem der den Wurzeln zugehörigen Moduli durch Coefficienten der ersten Art geben muss, wenn jede der beiden Zahlen, die ausdrücken, wie oft in ihm der nächstkleinere Modulus und er selbst im nächstgrössern Modulus liegt, nicht kleiner als 1,001 ist; so werden bei dem Umstande, dass zwischen dem c^{ten} und d^{ten} Coefficienten in unserer 14^{ten} Quadratgleichung kein Coefficient der ersten Art erscheint, die Moduli

$$W_{d-1},\ W_{d-2},\ W_{d-3}\ \ldots\ W_{c+1}$$

beziehungsweise sicher unter

$$1{,}001 W_d,\ (1{,}001)^2 W_d^2,\ (1{,}001)^3 W_d^3 \ldots (1{,}001)^{d-c-1} W_d$$

liegen, woraus sich durch Multiplication aus diesen (d-c-1) Ungleichheiten sehr leicht auf folgende Relationen schliessen lässt

$$\left.\begin{aligned}(W_{c+1} W_{c+2} \ldots W_d)^{\frac{1}{d-c}} &< W_d (1{,}001)^{\frac{d-c-1}{2}}\\ (W_{c+1} W_{c+2} \ldots W_d)^{\frac{1}{d-c}} &> W_{c+1} (1{,}001)^{-\frac{d-c-1}{2}}\end{aligned}\right\} \qquad 66)$$

Bedenken wir nun, dass d-c-1 offenbar unter 9, mithin $(1{,}001)^{\frac{d-c-1}{2}}$ unter 1,00401 und $(1{,}001)^{-\frac{d-c-1}{2}}$ über $1 - 0{,}00401$ liegt, dass ferner $(W_{c+1} W_{c+2} \ldots W_d)^{\frac{1}{d-c}}$ einen Zahlenwerth zwischen W_{c+1} und W_d hat, so folgt aus 66):

$$(W_{c+1} W_{c+2} \ldots W_d)^{\frac{1}{d-c}} = (1 + 0{,}00401\varrho) W_d = (1 - 0{,}00401\varrho_1) W_{c+1} \qquad 67)$$

wo ϱ und ϱ_1 positive Zahlen unter 1 bedeuten. Ist nun jede der 2 Zahlen $d-d_1$ und $c+c_1$ zwischen $c+1$ und d, und hiebei W_{d-d_1} kleiner, hingegen W_{c+c_1} grösser als $(W_{c+1}\, W_{c+2} \cdots W_d)^{\frac{1}{d-c}}$, so ergibt sich aus 67) sofort die Richtigkeit folgender Gleichung:

$$(W_{c+1}\, W_{c+2} \ldots W_d)^{\frac{1}{d-c}} (= 1 + 0{,}00401.\varrho_2) W_{d-d_1} = (1 - 0{,}00401.\varrho_3) W_{c+c_1} \tag{68}$$

wo ϱ_2 und ϱ_3 wieder unbestimmte echte Brüche bezeichnen, die beziehungsweise unter ϱ und ϱ_1 liegen. Aus Vorstehendem folgt nun offenbar, dass in dem ungünstigen Falle, in welchem die aufzulösende Gleichung 62) Coefficienten zwischen dem c^{ten} und d^{ten} besitzt, die durch fortgesetztes Quadriren der Wurzeln zu Coefficienten der ersten Art werden können, der Ausdruck

$$\mu_2 (W_{c+1}\, W_{c+2} \ldots W_d)^{\frac{1}{d-c}}$$

als ein den Moduln gemeinsamer Näherungswerth betrachtet werden kann, der von jedem dieser Moduli um eine Zahl differirt, die jedenfalls das 0,0041fache des betreffenden Modulus nicht zu erreichen vermag, wobei jedoch vorausgesetzt wird, dass die Reihe 65), der man die sämmtlichen Moduli zu entnehmen hat, keine Coefficienten der 3^{ten} Art enthält. Es versteht sich wohl von selbst, dass sich von den übrigen Gliedern in der Reihe 65_1) ganz ähnliches in gleicher Weise begründen lässt.

2) Wir haben nun noch den Fall zu betrachten, wo die Reihe 65) auch Coefficienten der 3^{ten} Art enthält, was keineswegs unmöglich ist. In diesem Falle sind wir geradezu gezwungen, diese Coefficienten der 3^{ten} Art gerade so wie die Coefficienten der 1^{ten} oder 2^{ten} Art zu verwenden, und es entsteht nun die Frage, welche Grösse die Fehler erreichen können, die aus dieser Behandlung hervorgehen möchten. Nehmen wir zur Erörterung dieser Fragen an, α_d und α_f seien Coefficienten

der 3^{ten} Art, hingegen α_e und α_g der 1^{ten} oder 2^{ten} Art, so findet man nach §. V. wie früher folgende Gleichungen

$$\left[\frac{\alpha_d}{\alpha_c}\right]^{\frac{1}{2^{14}(d-c)}} = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{1}{2^{14}(d-c)}} (W_{c+1}\, W_{c+2} \ldots W_d)^{\frac{1}{d-c}}$$

$$\left[\frac{\alpha_g}{\alpha_f}\right]^{\frac{1}{2^{14}(g-f)}} = \left(\frac{\delta_1}{\gamma_2}\right)^{\frac{1}{2^{14}(g-f)}} (W_{f+1}\, W_{f+2} \ldots W_g)^{\frac{1}{g-f}}$$

wo δ und δ_1 zwischen $(1 + 1{,}344.10^{-3-2})$ und $(1 - 1{,}344.10^{-3-2})$, hingegen γ und γ_1 unter $(1 - 1{,}344.10^{-5})$ liegen. Da nun nach der Voraussetzung die Reihe 65_1) nirgends steigt, so ist offenbar

$$\frac{\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{1}{2^{14}(d-c)}} (W_{c+1}\, W_{c+2} \ldots W_d)^{\frac{1}{d-c}}}{\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{2^{14}(g-f)}} (W_{f+1}\, W_{f+2} \ldots W_d)^{\frac{1}{g-f}}} \geqq 1.$$

woraus folgt, dass:

$$\frac{\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{1}{2^{14}(d-c)}}}{\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{2^{14}(g-f)}}} \geqq \frac{(W_{f+1}\, W_{f+2} \ldots W_g)^{\frac{1}{g-f}}}{(W_{c+1}\, W_{c+2} \ldots W_d)^{\frac{1}{d-c}}}$$

Nun ist der Dividend dieses letztern Quotienten offenbar zwischen W_{f+1} und W_g und der Divisor zwischen W_{c+1} und W_d, daher:

$$\frac{\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{1}{2^{14}(d-c)}}}{\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{2^{14}(g-f)}}} > \frac{W_g}{W_{c+1}}$$

Aber nach der Voraussetzung ist in unserer 14^{ten} Quadratgleichung zu 62) zwischen dem c^{ten} und g^{ten} Coefficienten kein

Coefficient der ersten Art vorhanden, dagegen in einer höhern Quadratgleichung sehr wohl möglich, woraus wie im Vorhergehenden geschlossen werden kann, dass der Quotient aus W_{c+1} durch W_g nicht über $(1{,}001)^{g-c-1}$, mithin, da $g-c-1$ die Zahl 7 nicht übersteigen kann, auch nicht über 1,0071 liegt, und es ist daher

$$\frac{\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{1}{2^{14}(d-c)}}}{\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{2^{14}(g-f)}}} > \frac{1}{1{,}0071}$$

Da nun der Dividend des grössern dieser 2 Quotienten ein echter Bruch, hingegen der Divisor ein unechter Bruch ist, so findet man ohne Mühe, dass, wenn ϱ und ϱ_1 positive echte Brüche bezeichnen, folgende Gleichungen bestehen:

$$\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{1}{2^{14}(d-c)}} = 1 - 0{,}0071\varrho$$

$$\left(\frac{\gamma_1}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{2^{14}(g-f)}} = 1 + 0{,}0071\varrho_1$$

Beachten wir jetzt, dass nach den Gleichungen 67) und 68):

$$(W_{c+1}\,W_{c+2}\,.\,.\,.\,W_d)^{\frac{1}{d-c}} = W_{c+m}(1 + 0{,}00401\Theta)$$

$$(W_{f+1}\,W_{f+2}\,.\,.\,.\,W_g)^{\frac{1}{g-f}} = W_{f+n}(1 + 0{,}00401\Theta_1)$$

wo Θ und Θ_1 unbestimmte Zahlen zwischen 1 und -1, m und n aber beliebige positive ganze Zahlen bezeichnen, die beziehungsweise die Differenzen $d-c$ und $g-f$ nicht übersteigen, so finden wir sofort

$$\left(\frac{\alpha_d}{\alpha_c}\right)^{\frac{1}{2^{14}(d-c)}} = (1 - 0{,}0071\varrho)\,(1 + 0{,}0062\Theta)W_{c+m} =$$

$$(1 + 0{,}0134\Theta)W_{c+m}$$

$$\left(\frac{\alpha_g}{\alpha_f}\right)^{\frac{1}{2^{14}(g-f)}} = (1 + 0{,}0071\varrho_1)(1 + 0{,}0062\Theta)W_{f+n} = (1 + 0{,}0134\Theta)W_{f+n}$$

Da uns nun, wenn q unbekannt ist, ein sicheres Kriterium fehlt, an welchem die An- oder Abwesenheit von Coefficienten der 3^{ten} Art unter den Coefficienten α_a, α_c, α_d, α_f, α_g, α_9, welchen die sämmtlichen Moduli zu entnehmen sind, erkannt werden kann, so sehen wir uns im Allgemeinen gezwungen, jedes Glied der nirgends steigenden Reihe 65_1), z. B. das 2^{te} Glied als einen den Moduln W_{a+1}, $W_{a+2} \ldots W_c$ gemeinsamen Näherungswerth zu betrachten, der von jedem dieser Moduli um eine Zahl differirt, die kleiner ist als das Produkt aus dem betreffenden Modulus in 0,0134.

Wir sehen hieraus, dass die 14^{te} Quadratgleichung zu einer Gleichung vom 9^{ten} Grade Näherungswerthe von den Moduln der Wurzeln geben kann, die in der Regel ungleich genau sein werden, und bei den ungenauesten sich kaum mehr als die 2 ersten Stellen verbürgen lassen; überdiess zeigt die obige Ableitung, dass von der 14^{ten} Quadratgleichung zu einer Gleichung, welche den 9^{ten} Grad sehr bedeutend übersteigt, Näherungswerthe erwartet werden müssen, unter denen viele kaum die erste Stelle richtig haben werden.

§. 7. Aufgabe.

Aus den sämmtlichen Moduln von den Wurzeln irgend einer Gleichung die diesen Wurzeln zugehörigen Ablenkungsfaktoren zu berechnen, d. h. die Zahlen zu bestimmen, mit welchen jene Moduli multiplicirt die zugehörigen Wurzeln geben, unter der Voraussetzung, dass man immer im Stande sei, die Moduli zu den Wurzeln einer Gleichung zu ermitteln.

Auflösung.

Es sei

$$x^{2n} + \alpha_1 x^{2n-1} + \alpha_2 x^{2n-2} + \ldots . \alpha_{2n} = 0 \tag{69}$$

die gegebene Gleichung von geradem Grade, wo α_1, α_2, . . α_n bekannte reelle Zahlen, die Null nicht ausgeschlossen, bezeichnen.

Ist nun W der Modulus von ω, d. i. von irgend einer der 2n Wurzeln zu 69), die nicht $= 0$ ist, und der zugehörige Ablenkungsfaktor $= Z = \cos\varphi + i \sin\varphi$, so ist WZ, aber auch jedenfalls (W : Z) oder $W(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ eine Wurzel der Gleichung 69), woraus sich sogleich auf die Coexistenz folgender 2 Gleichungen schliessen lässt:

$$\left.\begin{aligned} W^{2n}Z^{2n} + \alpha_1 W^{2n-1}Z^{2n-1} + \ldots \alpha_{2n-1}WZ + \alpha_{2n} = 0 \\ W^{2n}Z^{-2n} + \alpha_1 W^{2n-1}Z^{-(2n-1)} + \ldots \alpha_{2n-1}WZ^{-1} + \alpha_{2n} = 0 \end{aligned}\right\} \quad 70)$$

Ein Blick auf diese Gleichungen lässt sofort erkennen, dass sie nicht bloss für ein bestimmtes W und den zugehörigen Ablenkungsfaktor Z existiren, sondern überhaupt für jedes Z, von dem man sagen kann, es sei sowohl das W fache von ihm, als auch das W fache seines reciproken Werthes eine Wurzel der Gleichung 69). Die diesen 2 Gleichungen für ein bestimmtes W gemeinsamen Wurzeln enthalten also nicht bloss die eigentlichen Ablenkungsfaktoren zu den sämmtlichen Wurzeln in 69), deren Modulus $=$ W ist, sondern auch den W^{ten} Theil von jeder der übrigen Wurzeln, wenn das W fache von dem reciproken Werth dieses W^{ten} Theils ebenfalls eine Wurzel von 69) ist, und in diesem letztern Falle ist dann Z nicht mehr eine Complexe mit einem der Einheit gleichen Modulus.

Bei der weitern Behandlung der Gleichungen 70) schlagen wir folgenden allgemein bekannten Weg ein: Wir dividiren die erste dieser Gleichungen durch Z^n, und multipliciren die 2^{te} mit Z^n, addiren hierauf die so erhaltenen Gleichungen zu einander und subtrahiren sie von einander, wodurch wir folgende Gleichungen erhalten:

$$W^{2n}[Z^n + Z^{-n}] + \alpha_1 W^{2n-1}[Z^{n-1} + Z^{-(n-1)}] + \ldots$$
$$\ldots \alpha_{2n-1}W[Z^{n-1} + Z^{-(n-1)}] + \alpha_{2n}[Z^n + Z^{-n}] = 0$$

$$W^{2n}[Z^n - Z^{-n}] + \alpha_1 W^{2n-1}[Z^{n-1} - Z^{-(n-1)}] + \ldots$$
$$\ldots - \alpha_{2n-1}W[Z^{n-1} - Z^{-(n-1)}] - \alpha_{2n}[Z^n - Z^{-n}] = 0$$

Ziehen wir jetzt in jeder dieser 2 Gleichungen die letzten Glieder und diejenigen, die gleichweit von den Enden abstehen, zusammen, dividiren hierauf durch W^{2n} und setzen dann der Kürze wegen

$$\left.\begin{array}{ll} 1+\alpha_{2n}W^{-2n}=\beta & 1-\alpha_{2n}W^{-2n}=\gamma \\ \alpha_1+\alpha_{2n-1}W^{-(2n-2)}=\beta_1 & \alpha_1-\alpha_{2n-1}W^{-(2n-2)}=\gamma_1 \\ \alpha_2+\alpha_{2n-2}W^{-(2n-4)}=\beta_2 & \alpha_2-\alpha_{2n-2}W^{-(2n-4)}=\gamma_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1}+\alpha_{n+1}W^{-2}=\beta_{n-1} & \alpha_{n-1}-\alpha_{n+1}W^{-2}=\gamma_{n-1} \\ 2\alpha_n \qquad =\beta_n & \end{array}\right\} \quad 71)$$

so gelangen wir zu folgenden 2 Gleichungen:

$$\beta[Z^n+Z^{-n}]+\beta_1W^{-1}[Z^{n-1}+Z^{-(n-1)}]+\ldots$$
$$\ldots\beta_{n-1}W^{-(n-1)}[Z+Z^{-1}]+\beta_nW^{-n}=0 \qquad 72)$$

$$\gamma[Z^n-Z^{-n}]+\gamma_1W^{-1}[Z^{n-1}-Z^{-(n-1)}]+\ldots$$
$$\ldots\gamma_{n-1}W^{-(n-1)}[Z-Z^{-1}]=0 \qquad 73)$$

Da nun offenbar

$$Z^n+Z^{-n}=[Z^{n-1}+Z^{-(n-1)}](Z+Z^{-1})-[Z^{n-2}+Z^{-(n-2)}] \qquad 74)$$

so ergibt sich hieraus, wenn t für $Z+Z^{-1}$ gesetzt wird, dass wenigstens für $n=1,\ 2,\ 3$ folgende Gleichung besteht:

$$Z^n+Z^{-n}=t^n-nt^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}t^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}t^{n-6}+\ldots \qquad 75)$$

wo die Glieder mit solchen Potenzen von t, deren Exponenten negativ sind, weggelassen werden müssen. Bezeichnen wir nun diese Reihe mit R_n, so findet man ohne Mühe, dass

$$tR_{m-1}-R_{m-2}=R_m \qquad 76)$$

Da aber für $m=2,\ 3$ die Reihe R_m beziehungsweise mit (Z^2+Z^{-2}) und (Z^3+Z^{-3}) übereinstimmt, so findet durch Setzung von 4 für m in 76) mit Beachtung der Gleichung 74, dass $R_4=Z^4+Z^{-4}$, hernach durch Setzung von $5,\ 6,\ 7\ldots m$ in 75) auf gleiche Weise die Existenz der Gleichung $R_m=Z^m+Z^{-m}$ für $m=5,\ 6,\ 7\ldots m$.

Auf ganz ähnliche Weise findet man aus:

$$Z^n - Z^{-n} = [Z^{n-1} - Z^{-(n-1)}](Z + Z^{-1}) - [Z^{n-2} - Z^{-(n-2)}]$$

folgende identische Gleichung, wenn wieder t für $Z + Z^{-1}$ gesetzt wird:

$$Z^n - Z^{-n} = (Z - Z^{-1})\Big[t^{n-1} - (n-2)t^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2}t^{n-5} - \frac{(n-4)(4-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3}t^{n-7} + \ldots\Big] \qquad 77)$$

mit Weglassung derjenigen Glieder in der eingeklammerten Reihe, die Potenzen von t mit negativen Exponenten enthalten.

Setzt man nun successive n, n − 1, n − 2, ... für n in 75) und substituirt dann die 2ten Theile der so erhaltenen Gleichungen in 72), so gelangt man zu folgender Gleichung:

$$\begin{aligned} &\beta t^n + \frac{\beta_1}{W}t^{n-1} - \left[n\beta - \frac{\beta_2}{W^2}\right]t^{n-2} - \left[(n-1)\frac{\beta^1}{W} - \frac{\beta_3}{W^3}\right]t^{n-4} + \\ &\left[\frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}\beta - (n-2)\frac{\beta_2}{W^2} + \frac{\beta_4}{W^4}\right]t^{n-4} + \\ &\left[\frac{(n-1)(n-4)}{1 \cdot 2}\frac{\beta_1}{W} - (n-3)\frac{\beta_3}{W^3} + \frac{\beta_5}{W^5}\right]t^{n-5} - \\ &\left[\frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\beta - \frac{(n-2)(n-5)}{1 \cdot 2}\frac{\beta_2}{W^2} + (n-4)\frac{\beta_4}{W^4} - \frac{\beta_6}{W^6}\right]t^{n-6} - \\ &\left[\frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{\beta_1}{W} - \frac{(n-3)(n-6)}{1 \cdot 2}\frac{\beta_3}{W^3} + (n-5)\frac{\beta^5}{W_5} - \frac{\beta_7}{W^7}\right]t^{n-7} + \\ &+ - \ldots\ldots = 0 \end{aligned} \qquad 78)$$

wo die Glieder mit solchen Potenzen von t, deren Exponenten negativ wären, als Nullen betrachtet werden müssen. Auf ganz ähnliche Weise ergibt sich aus den Gleichungen 73) und 77) folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} &(Z - Z^{-1})\Big\{\gamma t^{n-1} + \frac{\gamma_1}{W}t^{n-1} - \left[(n-2)\gamma - \frac{\gamma_2}{W^2}\right]t^{n-3} - \\ &\left[(n-3)\frac{\gamma_1}{W} - \frac{\gamma_3}{W^3}\right]t^{n-4} + \\ &\left[\frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2}\gamma - (n-4)\frac{\gamma_2}{W^2} + \frac{\gamma_4}{W^4}\right]t^{n-5} + \end{aligned}$$

$$\left[\frac{(n-4)(n-5)}{1\cdot 2}\frac{\gamma_1}{W} - (n-5)\frac{\gamma_3}{W^3} + \frac{\gamma_5}{W^5}\right]t^{n-6} -$$

$$\left[\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}\gamma - \frac{(n-5)(n-6)}{1\cdot 2}\frac{\gamma_2}{W^2} + (n-6)\frac{\gamma_4}{W^4} - \frac{\gamma_6}{W^6}\right]t^{n-7} -$$

$$\left.- + \ldots\ldots\right\} = 0 \qquad 79)$$

wo auch hier die Glieder mit solchen Potenzen von t, deren Exponenten negativ sind, weg zu lassen sind.

Ehe wir nun den Gebrauch dieser 2 Gleichungen zeigen können, ist es nothwendig, folgende Lehrsätze zu beweisen, wobei wir den ersten Theil der Gleichung 78) $= S_t$ und den eingeklammerten Faktor von $(Z - Z^{-1})$ im ersten Theil von 79) $= T_t$ setzen wollen:

I.

S_t ist nur dann bei einem bestimmten W für jeden Werth von t gleich Null, wenn nach der Substitution von $x\sqrt[2n]{\underbrace{\alpha_n}\,\alpha_n}$ für x in die Gleichung 69) eine solche reciproke Gleichung von geradem Grade entsteht, bei der die Coefficienten an den Enden und gleichweit von den Enden einander entgegengesetzt sind und der mittlere Coefficient $= 0$ ist. In diesem Falle hat die Gleichung 69) 2 Wurzeln, von denen die eine $= W$, die andere $= -W$, und die übrigen 2n Wurzeln lassen sich dann jederzeit in 2 Gruppen mit gleichvielen Wurzeln bringen, von denen die durch W getheilten Wurzeln der einen Gruppe genau die reciproken Werthe von den durch W getheilten Wurzeln der andern Gruppe sind.

II.

T_t ist nur dann bei einem bestimmten Werthe von W für jeden Werth von t gleich Null, wenn nach der Substitution von $x\sqrt[2n]{\underbrace{\alpha_{2n}}\,\alpha_{2n}}$ für x in 69) eine solche reciproke Gleichung von geradem Grade entsteht, bei der die Coefficienten an den Enden und gleichweit von den Enden einander gleich sind. In diesem Falle lassen sich sämmtliche Wurzeln zu 69) so in 2 Gruppen bringen, dass die durch W getheilten Wurzeln der einen Gruppe genau die reciproken Werthe von den durch W getheilten Wurzeln der andern Gruppe sind.

III.

Enthält die Gleichung 69) W oder — W als Wurzel, aber nur einmal, so ist im erstern Falle T_2 und im letztern Falle T_{-2} nicht 0, und die Gleichung 79) reducirt sich dann in jedem dieser 2 speciellen Fälle auf

$$Z - Z^{-1} = 0$$

IV.

Enthält die Gleichung 69) $\binom{W}{-W}$ (2q + 1)mal als Wurzel, und ist S_t nicht für jeden Werth von t gleich Null; so ist $\binom{(t-2)^{1+q}}{(t+2)^{1+q}}$ die höchste Potenz von $\binom{t-2}{t+2}$ die in S_t als Faktor erscheint, dagegen $\binom{(t-2)^q}{(t+2)^q}$ die höchste Potenz von $\binom{t-2}{t+2}$, die ein Faktor von T_t ist.

Beweis zu I. S_t ist offenbar nur dann für jeden Werth von t gleich Null, wenn alle β Nullen sind, also nach den Gleichungen 71)

$$1 + \alpha_{2n} W^{-2n} = 0, \text{ mithin } W = \sqrt[2n]{\underbrace{\alpha_{2n}}\alpha_{2n}}$$

$$\alpha_1 + \alpha_{2n-1} W^{-(2n-2)} = 0, \text{ mithin } \alpha_1 W^{-1} = -\alpha_{2n-1} W^{-(2n-1)}$$

u. s. f.

wenn somit die Gleichung

$$x^{2n} + \alpha_1 W^{-1} x^{2n-1} + \ldots + \alpha_{2n-1} W^{-(2n-1)} x + \alpha_{2n} W^{-2n} = 0 \qquad 80)$$

die eben aus der Substitution von Wx, oder, da nach dem Bewiesenen $W = \sqrt[2n]{\underbrace{\alpha_{2n}}\alpha_{2n}}$, aus der von $x\sqrt[2n]{\underbrace{\alpha_{2n}}\alpha_{2n}}$ für x in 69) hervorgeht, eine solche reciproke Gleichung ist, wie sie im Lehrsatze beschrieben ist. Die 2[te] Behauptung unsers Lehrsatzes geht sofort aus dem Bewiesenen und der bekannten Eigenschaft der Wurzeln von reciproken Gleichungen hervor.

Beweis zu II. T_t ist gewiss nur dann identisch Null, wenn alle γ Nullen, also nach den Gleichungen 71)

$$1 - \alpha_{2n} W^{-2n} = 0\,,\ \text{mithin}\ W = \sqrt[2n]{\underbrace{\alpha_{2n}\,\alpha_{2n}}}$$

$$\alpha_1 - \alpha_{2n-1} W^{-(2n-2)} = 0\,,\ \text{mithin}\ \alpha_1 W^{-1} = \alpha_{2n-1} W^{-(2n-1)}$$

u. s. f.

wenn daher die Gleichung 80), die aus der im Beweis zu I) erwähnten Substitution hervorgeht, eine solche reciproke Gleichung von geradem Grade ist, wie sie der Lehrsatz beschreibt. Hieraus folgt denn auch mit Beiziehung der bekannten Eigenschaft von solchen reciproken Gleichungen die 2[te] Behauptung des Lehrsatzes.

Beweis zu III. Der Kürze wegen setzen wir den Faktor von $(Z - Z^{-1})$ in 77) gleich $f(t,n)$; alsdann ist nur nach der Ableitung der Gleichung 77)

$$T_t = \gamma f(t,n) + \gamma_1 W^{-1} f(t,n-1) + \gamma_2 W^{-2} f(t,n-2) + \ldots \gamma_{n-1} W^{-(n-1)} f(t,1)$$

Nun ist nach der Bedeutung von $f(t,n)$

$$f(2,m) = 2^{m-1} - (m-2)2^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{1\cdot 2}\,2^{m-5} - \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1\cdot 2\cdot 3}\,2^{m-7} + \ldots$$

mit Weglassung der Glieder, welche Potenzen von 2 mit negativen Exponenten enthalten; überdiess ist

$$f(-2,m) = (-1)^{m-1} f(2,m)$$

Aber die Reihe $f(2,m)$ ist genau $=$ der Zahl m, so lange m eine positive ganze Zahl bezeichnet; denn für $m = 1, 2, 3$ wird die Richtigkeit dieser Behauptung sofort erkannt, und wenn die Gleichung $f(2,m) = m$ für $m = p - 2$ und $p - 1$ als richtig vorausgesetzt wird, so hat es nicht die mindeste Schwierigkeit darzuthun, dass sie auch für $m = p$ gilt; man findet nämlich sehr leicht, dass $2f(2,n-1) - f(2,n-2) = f(2,n)$.

Wenn aber $f(2,m) = m$, so folgt aus den obigen Gleichungen sofort, dass:

$$T_2 = n\gamma + (n-1)\gamma_1 W^{-1} + (n-2)\gamma_2 W^{-2} + \ldots 2\gamma_{n-2} W^{-(n-2)} + \gamma_{n-1} W^{-(n-1)} \qquad 81)$$

$$T_{-2} = (-1)^{n-1}\left[n\gamma - (n-1)\gamma_1 W^{-1} + \ldots (-1)^{n-1}\gamma_{n-1} W^{-(n-1)}\right] \qquad 82)$$

Setzen wir jetzt zur Vereinfachung den ersten Theil der Gleichung 69) $= F(x)$, so folgt aus dem allgemein bekannten Lehrsatz, nach welchem, wenn die Gleichung $F(x) = 0$ irgend eine Wurzel, die a heissen möge, wenigstens 2 Mal enthält, der erste Differenzialquotient, nämlich $F'(a)$, gleich Null sein muss, sehr leicht, dass $F'(\omega)$ und mithin auch

$$[\omega F'(\omega) - nF(\omega)]\omega^{-2n} \text{ nur dann } = 0 \text{ ist,}$$

wenn die Gleichung 69) die Wurzel ω wenigstens 2 Mal enthält. Berechnen wir nun den Ausdruck $[\omega F'(\omega) - nF\omega]\omega^{-2n}$, so finden wir denselben

$$= \omega^{-2n}\left[n\omega^{2n} + (n-1)\alpha_1\omega^{2n-1} + (n-2)\alpha_2\omega^{2n-2} + \ldots - (n-3)\alpha_{2n-3}\omega^3 - (n-2)\alpha_{2n-2}\omega^2 - (n-1)\alpha_{2n-1}\omega - n\alpha_{2n}\right]$$

$$= n + (n-1)\omega^{-1}\alpha_1 + (n-2)\alpha_2\omega^{-2} + (n-3)\alpha_3\omega^{-3} + \ldots - (n-3)\alpha_{2n-3}\omega^{-(2n-3)} - (n-2)\alpha_{2n-2}\omega^{-(2n-2)} - (n-1)\alpha_{2n-1}\omega^{-(2n-1)} - n\alpha_{2n}\omega^{-2n}$$

und wenn hier das erste und letzte Glied und je 2 von den Enden gleichweit abstehende Gliede zusammengezogen werden, auch

$$= \left[1 - \alpha_{2n}\omega^{-2n}\right]n + (n-1)\omega^{-1}\left[\alpha_1 - \alpha_{2n-1}\omega^{-(2n-2)}\right] + (n-2)\omega^{-2}\left[\alpha_2 - \alpha_{2n-2}\omega^{-(2n-4)}\right] + \ldots + 2\omega^{-(n-2)}\left[\alpha_{n-2} - \alpha_{n+2}\omega^4\right] + 1 \cdot \omega^{-(n-1)}\left[\alpha_{n-1} - \alpha_{n+1}\omega^2\right]$$

Ist also W oder $-W$ eine Wurzel zu 69), die nur einmal als Wurzel zu 69) erscheint, so ist z. B. $\left[(-W)F'(-W) - nF(-W)\right](-W)^{2n}$, was nach dem eben Bewiesenen

$$= \left[1 - \alpha_{2n}W^{-2n}\right]n - (n-1)W^{-1}\left[\alpha_1 - \alpha_2 W^{-(2n-2)}\right] + \ldots (-1)^{n-1}W^{-(n-1)}(\alpha_{n-1} - \alpha_{n+1}W^2)$$

oder vermöge der Gleichungen 71)

$$= \gamma n - (n-1)W^{-1}\gamma_1 + (n-2)W^{-2}\gamma_2 - \ldots (-1)^{n-1}W^{-(n-1)}\gamma_{n-1}$$

oder gemäss der Gleichung 82) $= (-1)^{n-1}\, T_{-2}$ ist, sicher nicht gleich Null, und daher auch T_{-2} nicht $= 0$. Ebenso findet man, dass, wenn W nicht mehr als einmal unter den Wurzeln zu 69) vorkömmt, T_2 nicht 0 sein kann. Hieraus folgt offenbar noch, dass in jedem dieser 2 Fälle die Gleichung 77) in Folgende übergeht:

$$Z - Z^{-1} = 0$$

Beweis zu IV. Vorerst bemerken wir, dass bei den Voraussetzungen unsers Lehrsatzes T_t nicht identisch Null sein kann; denn wäre diess der Fall, so müssten nach dem Lehrsatze I) die sämmtlichen 2n Wurzeln zu 69) sich so in 2 Gruppen mit gleichvielen Wurzeln bringen lassen, dass die durch W getheilten Wurzeln der einen Gruppe genau die reciproken Werthe von den durch W getheilten Wurzeln der andern Gruppe wären, was natürlich nicht sein kann, wenn die Anzahl aller der dem W gleichen Wurzeln unter den 2n Wurzeln zu 69) ungerade ist.

Will man nun den Beweis unsers Lehrsatzes ohne Zuziehung höherer Differenzialquotienten geben, so denke man sich von den z. B. der Zahl W gleichen $(2q+1)$ Wurzeln zu 69) 2q derselben so beschaffen, dass die q ersten davon unter sich ungleich, aber alle unendlich nahe an W sind, und die W^{ten} Theile der übrigen genau mit den reciproken Werthen von den W^{ten} Theilen jener q ersten übereinstimmen. Bei dieser Auffassung wird der Lehrsatz auf den vorhergehenden reducirt, wenn man hiebei noch beachtet, dass unter den Voraussetzungen des Lehrsatzes III), wenn S_t nicht identisch 0, $t-2$ oder $t+2$ in Folge der Ableitung der Gleichungen 78) und 79) ein Faktor von S_t sein muss.

Aus diesen Lehrsätzen ergibt sich nun folgendes Regulativ für den Gebrauch der Gleichungen 78) und 79):

1) Wenn S_t bei einem bestimmten W für jeden Werth von $t = 0$ und $n > 1$, so ist die Gleichung $T_t = 0$ vom $(n-1)^{\text{ten}}$

Grade. Ihre Auflösung gibt $(n-1)$ Wurzeln, jede derselben wird $= Z + Z^{-1}$ gesetzt, und jede so entstandene Gleichung gibt dann für Z zwei zu einander reciproke Wurzeln, die dann mit W multiplicirt zwei Wurzeln zu 69) geben. Auf diese Weise erhält man im Ganzen $2n-2$ Wurzeln. Von den noch übrigen 2 Wurzeln ist die eine $= W$ und die andere $= -W$. Wenn aber $n = 1$, so führt die Gleichung 79), die jetzt zu $Z - Z^{-1} = 0$ wird, zu den Wurzeln W und $-W$ für 69).

2) Wenn T_t für jeden Werth von t gleich Null, so muss die Gleichung $S_t = 0$ nothwendig vom n^{ten} Grade sein. Wird alsdann diese Gleichung aufgelöst und jede der n Wurzeln $= Z + Z^{-1}$ gesetzt, so erhält man n Gleichungen, von welchen jede 2 zu einander reciproke Wurzeln gibt, die mit W multiplicirt 2 Wurzeln zu 69) darbieten. Auf diese Weise erhält man die sämmtlichen Wurzeln zu 69).

3) Haben für ein bestimmtes W die Functionen S_t und T_t keinen gemeinschaftlichen Faktor, so ist es nie möglich, dass T_t identisch Null ist, dagegen kann S_t für jeden Werth von t gleich 0 sein, jedoch müsste dann $n = 1$ sein. Ist aber S_t nicht identisch 0, so enthält dieses entweder den Faktor $t-2$ und nicht zugleich $t+2$, oder umgekehrt, oder dann $(t-2)(t+2)$. Im ersten Falle hat 69) nur eine Wurzel mit dem Modulus W und diese ist $= W$, im 2^{ten} ebenfalls nur eine Wurzel mit dem Modulus W und ist gleich $-W$, und im 3^{ten} Falle sind unter den Wurzeln von 69) nicht mehr und nicht weniger als 2 mit dem Modulus W vorhanden, von denen die eine $= W$, die andere $= -W$ ist.

4) Ist endlich für ein bestimmtes W weder S_t noch T_t identisch 0, und $\varphi(t)$ der grösste gemeinschaftliche Faktor von S_t und T_t, so wird die Gleichung $\varphi(t) = 0$, deren Grad wir mit n_1 bezeichnen wollen, nach t aufgelöst, und jede der dadurch erhaltenen n_1 Wurzeln $= Z + Z^{-1}$ gesetzt. Durch Auflösung von jeder der so erhaltenen n_1 Gleichungen nach Z, erhält man für Z zwei zu einander reciproke Wurzeln, die mit W multiplicirt 2 Wurzeln von 69) geben müssen. Auf diese Weise gelangt man sicher im Ganzen zu $2n_1$ Wurzeln von 69). Aus den übri-

gen $2(n - n_1)$ Wurzeln lassen sich alsdann nicht mehr 2 herausheben, deren W^{te} Theile zu einander reciprok wären und es wird in Beziehung auf die Moduli dieser übrigen Wurzeln stets von folgenden 4 Fällen einer Statt finden:

a) Keiner derselben ist $= W$

b) 2 sind $= W$

c) Nur Einer ist $= W$

Die Anwesenheit dieser Fälle wird auf folgende Weise erkannt. Nach der Auflösung der Gleichung $\varphi(t) = 0$ wird sehr leicht die höchste Potenz von $(t + 2)$ und von $(t - 2)$ gefunden, die in $\varphi(t)$ als Faktor erscheint. Nehmen wir an, die Exponenten dieser höchsten Potenzen seien respective e und ε, wo in besondern Fällen e und ε auch Nullen sein können. Ist nun der Quotient $\frac{S_t}{(t + 2)^e}$ für $t = 2$ nicht 0, und auch $\frac{S_t}{(t - 2)^\varepsilon}$ für $t = 2$ nicht 0, so tritt der Fall a) ein; sind bei denselben Substitutionen die beiden Quotienten $= 0$, so ist der Fall b) vorhanden und alsdann sind unter jenen $2(n - n_1)$ übrigen Wurzeln von 69) zwei, von denen die eine $= W$, die andere $= - W$ ist; wird endlich durch diese Substitutionen nur einer jener 2 Quotienten etwa der erste zu 0, so ist dadurch der Fall c) indicirt und unter den $2(n - n_1)$ Wurzeln ist noch eine $= - W$, während noch eine $= + W$ wäre, wenn durch jene Setzung der 2^{te} Quotient zu 0 würde.

Dass die Gleichungen 78) und 79) auch für den Fall Anwendung finden, wenn die gegebene Gleichung von ungeradem Grade ist, wird sofort einleuchten, wenn man bedenkt, dass eine solche Gleichung durch Multiplication mit dem Faktor $x + 0$ in eine Gleichung von geradem Grade verwandelt wird, bei der dann freilich der Coefficient von x^0 gleich Null ist, was aber keine Schwierigkeiten veranlassen kann, da wir wirklich in 69) α_{2n} als eine reelle voraussetzten, die auch 0 sein könne.

Durch vorstehendes Raisonnement wird unsere Aufgabe reducirt auf die Auflösung einer Gleichung von höchstens halb so hohem Grade, als die gegebene Gleichung hat, wenn sie von geradem Grade ist, oder als diejenige Gleichung besitzt, wenn die gegebene Gleichung von ungeradem Grade, welche aus der

Multiplication dieser Gleichung mit $x + 0$ entsteht. Da wir aber in unserer Aufgabe die Bestimmung der Moduli von den Wurzeln irgend einer Gleichung als bekannt voraussetzten, so werden wir, wenn uns die Auflösung der aus jener Reduction entstandenen Gleichung auf keine einfachere Weise möglich ist, zuerst die Moduli der so entstandenen Gleichung berechnen, und alsdann diese wieder so behandeln, wie die Gleichung 69). Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens müssen wir zuletzt zu einer Gleichung gelangen, die wir vollständig auflösen können, und dadurch werden wir dann auch offenbar in den Stand gesetzt, successive die frühern Reductionsgleichungen und endlich auch die ursprünglich vorgelegte Gleichung selbst vollständig aufzulösen.

Man könnte jetzt noch fragen, wie sich die Gleichung $Z + Z^{-1} = t$ in dem Falle, da man für t imaginäre Wurzeln erhält, am kürzesten algebraisch auflösen lasse. Wir antworten hierauf mit Folgendem:

Bezeichnen a, b, a_1, b_1 reelle Zahlen, 0 nicht ausgeschlossen, und ist

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\left[a^2 - b^2 - 4a_1 + \sqrt{(a^2 - b^2 - 4a_1)^2 + 4(ab - 2b_1)^2}\right]} = A$$

$$\sqrt{-\tfrac{1}{2}\left[a^2 - b^2 - 4a_1 - \sqrt{(a^2 - b^2 - 4a_1)^2 + 4(ab - 2b_1)^2}\right]} = B$$

wo die vorkommenden Wurzelgrössen alle in positivem Sinne zu nehmen sind, so gehen aus der Gleichung

$$Z^2 + (a + bi)Z + a_1 + b_1 i = 0$$

stets folgende Gleichungen hervor:

$$\left.\begin{aligned} Z &= \tfrac{1}{2}\left(-a + A + (-b + \underbrace{ab - 2b_1}_{} B)i\right) \\ Z &= \tfrac{1}{2}\left(-a - A + (-b - \underbrace{ab - 2b_1}_{} B)i\right) \end{aligned}\right\} \qquad 83)$$

wo $\underbrace{ab - 2b_1}_{}$ die positive Einheit bedeutet, wenn $ab - 2b_1$ positiv oder 0 ist, hingegen die negative Einheit, wenn $ab - 2b_1$ negativ wäre.

Wir schliessen die Auflösung unserer Aufgabe mit folgenden Beispielen:

I) Die Gleichung

$$x^6 + \frac{17}{4}x^4 - \frac{1053}{4}x^2 - 729 = 0$$

hat die Wurzeln $6i$, $-\frac{3}{2}i$, $-6i$, $+\frac{3}{2}i$, 3, -3.

Die Gleichungen 78) und 79) sind in diesem Falle für $W = 3$ folgende:

$$\left.\begin{aligned} 0\,.\,t^3 + 0\,.\,t^2 + 0\,.\,t + 0 &= 0 \\ (Z - Z^{-1})\left(2t^2 + 0\,.\,t + \tfrac{9}{2}\right) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Hier ist nun $T_t = t^2 + \frac{9}{4} = \left(t - \frac{3}{2}i\right)\left(t + \frac{3}{2}i\right)$. Lösen wir nun die 2 Gleichungen

$$Z + Z^{-1} = \frac{3}{2}i$$

$$Z + Z^{-1} = -\frac{3}{2}i$$

mit Hülfe der Gleichung 83) auf, so gibt die erste $-2i$ und $(-2i))^{-1}$ und die 2te $2i$ und $(2i)^{-1}$ als Wurzeln und diese geben mit W oder 3 multiplicirt die 4 Wurzeln $-6i$, $\frac{3}{2}i$, $6i$ und $-\frac{3}{2}i$ zur gegebenen Gleichung. Die 2 übrigen Wurzeln müssen sich noch durch Auflösung von $Z - Z^{-1} = 0$ und Multiplication der dadurch erhaltenen Wurzeln mit 3 ergeben.

II) Wendet man auf die Gleichung

$$x^6 + 14x^5 + 140x^4 + 656x^3 + 2240x^2 + 3584x + 4096 = 0$$

deren Wurzeln sind: 4α, $4\alpha^{-1}$, 2α, $8\alpha^{-1}$, 8α, $2\alpha^{-1}$ wo $\alpha = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$, die Gleichungen 78) und 79) für $W = 4$ an, so erhält man für diese:

$$\left.\begin{aligned} t^3 + \tfrac{7}{2}t^2 + \tfrac{23}{4}t + \tfrac{13}{4} &= 0 \\ 0.t^2 + 0\,.\,t + 0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

In diesem Falle ist

$$S_t = \left[t - (\alpha + \alpha^{-1})\right]\left[t - \left(\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}\right)\right]\left[t - (2\alpha + (2\alpha)^{-1})\right]$$

III) Werden die Gleichungen 78) und 79) auf die Gleichung

$$x^8 + 13x^7 + 126x^6 + 516x^5 + 1584x^4 + 1344x^3 + 512x^2 - 4096x = 0$$

mit den Wurzeln 1, 4α, $4\alpha^{-1}$, 2α, $8\alpha^{-1}$, 8α, $2\alpha^{-1}$, 0, wo $\alpha = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$, für $W = 1$ angewendet, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{r} t^4 - 4083t^3 + 634t^2 + 14109t + 1894 = 0 \\ (Z - Z^{-1})\,[t^3 + 4109t^2 - 388t - 4937] = 0 \end{array}\right\}$$

Hier zeigt sich, dass S_t und T_t keinen gemeinschaftlichen Faktor besitzen, dagegen die erste dieser 2 Gleichungen nach der Substitution von $Z + Z^{-1}$ für t mit der Gleichung $Z - Z^{-1} = 0$ die gemeinschaftliche Wurzel 1 hat, woraus sofort folgt, dass die gegebene Gleichung die Zahl WZ oder 1.1 einmal als Wurzel enthält.

IV. Bringt man auf die Gleichung

$$x^6 - 28x^3 + 27 = 0$$

mit den Wurzeln 3α, $3\alpha^{-1}$, α, α^{-1}, 1, 3, wo $\alpha = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$ die Gleichungen 78) und 79) für $W = 1$ in Anwendung, so geben diese:

$$\left.\begin{array}{r} t^3 - 3t - 2 = 0 \\ (Z - Z^{-1})\,[t^2 - 1] = 0 \end{array}\right\}$$

Jetzt ist der grösste gemeinschaftliche Faktor für S_t und $T_t = t - (\alpha + \alpha^{-1}) = t + 1$, der sogleich die beiden Wurzeln α und α^{-1} für die gegebene Gleichung darbietet. Aber man darf nicht unterlassen, wie vorhin, zu untersuchen, ob die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} (Z + Z^{-1})^3 - 3(Z + Z^{-1}) - 2 = 0 \\ Z - Z^{-1} = 0 \end{array}\right\}$$

eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen; und da findet man sofort, dass sie die gemeinschaftliche Wurzel 1 haben, mithin 1.1 auch eine Wurzel der gegebenen Gleichung sein muss.

§. 8.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich das Verfahren, nach welchem man zu sämmtlichen Wurzeln der Gleichung

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots . \alpha_n = 0 \qquad 84)$$

Näherungswerthe erhalten kann. Wir wollen jetzt noch in Kürze die wichtige Frage erörtern, wie sich diese Näherungswerthe verbessern lassen.

Es sei $p+qi$, wo q nicht 0, ein Näherungswerth von m Wurzeln zu 84). Um nun genauere Näherungswerthe zu diesen Wurzeln zu erhalten, setzen wir

$$x = y\sqrt{p^2+q^2} \tag{85}$$

in die Gleichung 84). Die aus dieser Setzung hervorgehende Gleichung sei

$$F(y) = 0 \tag{86}$$

Bildet man nun die Gleichung

$$F(y) \cdot F\left(\frac{1}{y}\right) = 0 \tag{87}$$

so erhält man offenbar eine reciproke Gleichung vom $2n^{\text{ten}}$ Grade, bei der die Coefficienten an den Enden und gleichweit von den Enden einander gleich sind, und wo $\frac{p+qi}{\sqrt{p^2+q^2}}$ ein Näherungswerth zu m Wurzeln, und $\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{p+qi}$ ein Näherungswerth zu m andern Wurzeln ist. Wenden wir nun auf diese Gleichung 87) die Gleichungen 78) und 79) an, indem wir dort 1 für W setzen, so wird die zweite dieser Gleichungen zu einer identischen, hingegen wird die erste eine Bestimmungsgleichung vom n^{ten} Grade und geht nach der Division durch 2 in folgende über:

$$\begin{aligned} & t^n + \alpha_1 t^{n-1} - (n-\alpha_2)t^{n-2} - (\alpha_1(n-1)-\alpha_3)t^{n-3} + \\ & \quad \left[\frac{n(n-3)}{1\cdot 2} - \alpha_2(n-2) + \alpha_4\right] t^{n-4} + \\ & \quad \left[\frac{(n-1)(n-4)}{1\cdot 2}\alpha_1 - (n-3)\alpha_3 + \alpha_5\right] t^{n-5} - \\ & \quad \left[\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{(n-2)(n-5)}{1\cdot 2}\alpha_2 + (n-4)\alpha_4 - \alpha_6\right] t^{n-6} - \\ & \left[\frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha_1 - \frac{(n-3)(n-6)}{1\cdot 2}\alpha_3 + (n-5)\alpha_5 - \alpha_7\right] t^{n-7} + \ldots \\ & \quad \ldots\ldots = 0 \end{aligned} \tag{88}$$

Diese Gleichung hat nun n Wurzeln, die sich aus den n Wurzeln zu 86) dadurch ergeben, dass man zu jeder derselben ihren reciproken Werth addirt, und es müssen daher m dieser n Wurzeln zu 88) annähernd mit

$$\frac{p+qi}{\sqrt{p^2+q^2}} + \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{p+qi} \text{ oder } \frac{2p}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

übereinstimmen. Substituiren wir nun $u + \frac{2p}{\sqrt{p^2+q^2}}$ für t in 88) und nehmen wir an, es entstehe durch diese Setzung die Gleichung

$$f(u) = 0 \tag{89}$$

so wird wohl in den meisten Fällen der kleinste unter den Moduln zu den n Wurzeln dieser letztern Gleichung zu dem diesem kleinsten Modulus nächsten in einem sehr merklichen Verhältniss stehen, so dass schon nach sehr wenigen Quadrirungen der kleinste Modulus bis auf eine grosse Anzahl Stellen bestimmbar sein wird, wobei gar häufig nur einige der letzten Coefficienten in den herzustellenden Quadratgleichungen ausgerechnet werden müssen. Da man nun die Ablenkungsfaktoren zu den Wurzeln, die diesen kleinsten Modulus besitzen, nach §. 7. berechnen kann, so wird man auf diese Weise eine Anzahl von sehr genau bestimmten Wurzeln zu der Gleichung 89) ermitteln können. Gesetzt, irgend eine dieser Wurzeln wäre $= p_1 + q_1 i$, so würde $\frac{2p}{\sqrt{p^2+q^2}} + p_1 + q_1 i$ eine Wurzel von 89) sein, und durch Auflösung der Gleichung

$$y^2 - \left(\frac{2p}{\sqrt{p^2+q^2}} + p_1 + q_1 i\right)y + 1 = 0$$

erhielte man 2 zu einander reciproke Wurzeln, von welchen eine der Gleichung 86) angehören muss, die dann mit $\sqrt{p^2+q^2}$ multiplicirt eine der Gleichung 84) angehörige Wurzel gibt, aus deren Ableitung sich ohne Schwierigkeit auf das Maximum des ihr anhaftenden Fehlers schliessen lässt.

Wäre der gegebene zu verbessernde Näherungswerth reell und $= p$, so würde man natürlich nicht die Gleichung 88) herstellen, sondern sofort $p + u$ für x in 84) setzen.

Auf diese kurzen Andeutungen müssen wir uns beschränken, und eine ausführlichere mit Beispielen belegte Discussion dieser Frage einer spätern Gelegenheit vorbehalten.

Küsnach, 4. Jan. 1861.