# Die
# Auflösung der höhern numerischen Gleichungen

von

**W. Denzler.**

Unter den sämmtlichen Methoden zur Auflösung der numerischen Gleichungen verdient die von unserm hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Gräffe, gefundene und im Jahr 1837 mitgetheilte den Vorzug, und zwar nicht bloss wegen der Einfachheit ihrer Begründung, sondern ganz besonders auch insofern, als ihre Anwendung schneller zum Ziele führt, als jede andere der bekannten Methoden, obschon auch sie in unendlich vielen Fällen sehr mühselige und zeitraubende Rechnungen fordert. Die Theorie und Anwendung dieser Gräffe'schen Methode genauer zu untersuchen, und insbesondere zu zeigen:

1) die Bildung einer Gleichung, deren Wurzeln die $m^{ten}$ Potenzen der Wurzeln irgend einer gegebenen Gleichung sind;
2) die Möglichkeit des Auftretens von völlig unverwendbaren regelmässig quadratisch wachsenden Coefficienten und die Nothwendigkeit ihrer Beseitigung;
3) die Operationen, welche dem Quadriren der Wurzeln vorangehen müssen, wenn man sich nicht der Gefahr aussetzen will, ohne allen Erfolg zu quadriren;

bildet die Aufgabe, deren Lösung wir in Folgendem versuchen wollen.

## § 1.

Vorerst zeigen wir zum Zwecke der Reduction der Auflösung einer Gleichung mit complexen Coefficienten auf die einer Gleichung mit reellen Coefficienten, dass, wenn $m(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ eine Wurzel der Gleichung:

$$x^n + r_,(\cos\beta_, + i\sin\beta_,)x^{n-1} + r_2(\cos\beta_2 + i\sin\beta_2)x^{n-2} + \ldots \\ \ldots + r_n(\cos\beta_n + i\sin\beta_n) = 0 \qquad 1)$$

alsdann nothwendig $m(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ eine Wurzel der Gleichng

$$x^n + r_,(\cos\beta_, - i\sin\beta_,)x^{n-1} + r_2(\cos\beta_2 - i\sin\beta_2)x^{n-2} + \ldots \\ \ldots + r_n(\cos\beta_n - i\sin\beta_n) = 0 \qquad 2)$$

sein muss. Nach der Voraussetzung und dem Moivre'schen Lehrsatz hat man folgende Gleichung:

$$m^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + r_,m^{n-1}[\cos(\beta_, + (n-1)\varphi) + i\sin(\beta_, + (n-1)\varphi)] + \\ + r_2m^{n-2}[\cos(\beta_2 + (n-2)\varphi) + i\sin(\beta_2 + (n-2)\varphi)] + \ldots \\ \ldots + r_n(\cos\beta_n + i\sin\beta_n) = 0$$

woraus sich sofort auf das Stattfinden von folgenden 2 Relationen schliessen lässt:

$$m^n\cos n\varphi + r_,m^{n-1}\cos(\beta_, + (n-1)\varphi) + r_2m^{n-2}\cos(\beta_2 + (n-2)\cdot\varphi) + \ldots \\ \ldots + r_n\cos\beta_n = 0$$

$$m^n\sin n\varphi + r_,m^{n-1}\sin(\beta_, + (n-1)\varphi) + r_2m^{n-2}\sin(\beta_2 + (n-2)\varphi) + \ldots \\ \ldots + r_n\sin\beta_n = 0$$

Multiplicirt man nun die 2[te] Gleichung mit i und zieht das Ergebniss von der ersten Gleichung ab, so ergibt sich nach Anwendung des vorhin erwähnten Lehrsatzes, dass

$$m^n(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n + r_,m^{n-1}[\cos\beta_, - i\sin\beta_,][\cos\varphi - i\sin\varphi]^{n-1} + \\ + r_2m^{n-2}(\cos\beta_2 - i\sin\beta_2)(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{n-2} + \ldots \\ \ldots + r_n(\cos\beta_n - i\sin\beta_n) = 0$$

Da nun diese letztere Gleichung auch aus der Setzung von $m(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ für x in die Cleichung 2) hervorgeht, so ist damit unsere Behauptung erwiesen.

Hieraus folgt jetzt sofort, dass unter den 2n Wurzeln der Gleichung

$$[x^n + (a_1 + b_1 i)\, x^{n-1} + (a_2 + b_2 i)\, x^{n-2} + \ldots a_n + b_n i] \times$$
$$[x^n + (a_1 - b_1 i)\, x^{n-1} + (a_2 - b_2 i)\, x^{n-2} + \ldots a_n - b_n i] = 0 \quad 3)$$

oder der Gleichung

$$[x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_n]^2 + [b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots b_n]^2 = 0 \quad 4)$$

sich die n Wurzeln der Gleichung

$$x^n + (a_1 + b_1 i)\, x^{n-1} + (a_2 + b_2 i)\, x^{n-2} + \ldots a_n + b_n i = 0 \quad 5)$$

befinden, und dass die übrigen n Wurzeln die conjugirten Werthe zu den Wurzeln derselben Gleichung 5) sind. In dem eben Bewiesenen ist zugleich das Verfahren enthalten, nach welchem sich die Auflösung einer Gleichung mit complexen Coefficienten auf die Auflösung einer Gleichung mit reellen Coefficienten reduciren lässt.

## §. 2.

Wir wollen nun zeigen, wie sich aus der Gleichung

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} \ldots \alpha_n = 0 \quad 6)$$

die Gleichung bilden lasse, deren Wurzeln die $m^{ten}$ Potenzen der ursprünglichen Gleichung 6) sind, wobei wir unter m irgend eine positive ganze Zahl verstehen.

Vorerst bemerken wir, das im Folgenden der Ausdruck ${}_\gamma 1^{\frac{p}{q}}$ denjenigen speciellen Werth von $1^{\frac{p}{q}}$ oder von $(\sqrt[q]{1})^p$ andeudet, der gleich $\cos \dfrac{2\gamma p\pi}{q} + i \sin \dfrac{2\gamma p\pi}{q}$ ist.

Offenbar gehen die n Wurzeln der Gleichung

$$\left(\frac{x}{{}_1 1^{\frac{1}{m}}}\right)^n + \alpha_1 \left(\frac{x}{{}_1 1^{\frac{1}{m}}}\right)^{n-1} + \alpha_2 \left(\frac{x}{{}_1 1^{\frac{1}{m}}}\right)^{n-2} + \ldots \alpha_n = 0$$

oder der Gleichung

$$x^n + {}_1 1^{\frac{1}{m}} \alpha_1 x^{n-1} + {}_1 1^{\frac{2}{m}} \alpha_2 x^{n-2} + \ldots {}_1 1^{\frac{n}{m}} \alpha_n = 0 \quad 7)$$

aus der Multiplikation der Wurzeln der Gleichung 6) mit ${}_1 1^{\frac{1}{m}}$ hervor; ebenso entstehen die Wurzeln der Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}
x^n + {}_2 1^{\frac{1}{m}} \alpha_1 x^{n-1} + {}_2 1^{\frac{2}{m}} \alpha_2 x^{n-2} + \ldots {}_2 1^{\frac{n}{m}} \alpha_n = 0 \\
x^n + {}_3 1^{\frac{1}{m}} \alpha_1 x^{n-1} + {}_3 1^{\frac{2}{m}} \alpha_2 x^{n-2} + \ldots {}_3 1^{\frac{n}{m}} \alpha_n = 0 \\
x^n + {}_4 1^{\frac{1}{m}} \alpha_1 x^{n-1} + {}_4 1^{\frac{2}{m}} \alpha_2 x^{n-2} + \ldots {}_4 1^{\frac{n}{m}} \alpha_n = 0 \\
| \quad\quad | \quad\quad | \quad\quad | \quad\quad | \quad\quad | \\
| \quad\quad | \quad\quad | \quad\quad | \quad\quad | \quad\quad | \\
x^n + {}_{m-1} 1^{\frac{1}{m}} \alpha_1 x^{n-1} + {}_{m-1} 1^{\frac{2}{m}} \alpha_2 x^{n-2} + \ldots {}_{m-1} 1^{\frac{n}{m}} \alpha_n = 0
\end{array}\right\} \quad 8)$$

durch Multiplication der Wurzeln der Gleichungen 6), beziehungsweise mit ${}_2 1^{\frac{1}{m}}, {}_3 1^{\frac{1}{m}}, {}_4 1^{\frac{1}{m}}, \ldots {}_{m-1} 1^{\frac{1}{m}}$. Setzen wir daher das Produkt aus den ersten Theilen der Gleichungen 6), 7) und 8) der Null gleich, so gelangen wir zu einer Gleichung, deren Wurzeln

$$\sqrt[m]{\omega_1^m},\ \sqrt[m]{\omega_2^m},\ \sqrt[m]{\omega_3^m} \ldots \sqrt[m]{\omega_n^m} \qquad 9)$$

sind, wenn nämlich $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots \omega_n$ die Wurzeln der Gleichung 6) bedeuten und jedes der m Radikale in 9) die m verschiedenen Werthe vorstellt, deren $m^{te}$ Potenz der zugehörige Radikand ist. Aber auch die Gleichung

$$\left(x^m - \omega_1^m\right)\left(x^m - \omega_2^m\right) \ldots\ldots \left(x^m - \omega_n^m\right) = 0 \qquad 10)$$

hat genau die in 9) angedeuteten mn Zahlen zu Wurzeln, woraus sich leicht auf die Identität des Produktes aus den ersten Theilen der Gleichungen 6), 7) und 8) mit dem ersten Theile der Gleichung 10) schliessen lässt. Bedenkt man nun überdiess, dass $\omega_1^m, \omega_2^m \ldots\ldots \omega_n^m$ die Wurzeln der Gleichung

$$\left(x - \omega_1^m\right)\left(x - \omega_2^m\right) \ldots \left(x - \omega_n^m\right) = 0 \qquad 11)$$

sind, und dass der erste Theil von 11) aus dem ersten Theil von 10) dadurch erhalten wird, dass man sämmtliche Exponenten zu x durch m dividirt, so wird klar, dass sich die Gleichung mit den Wurzeln $\omega_1^m, \omega_2^m \ldots\ldots \omega_n^m$ bilden lässt, indem man das Produkt aus den ersten Theilen der Gleichungen 6), 7) und 8) gleich Null setzt, und hierauf in der so erhaltenen

Gleichung sämmtliche Exponenten zu x durch m dividirt. Dass bei der Bildung des Produktes aus den ersten Theilen der Gleichungen 6), 7) und 8), welches offenbar eine ganze rationale algebraische des $mn^{ten}$ Grades ist, alle die Glieder, deren Exponenten nicht vielfache von m sind, Nullen sein müssen, mithin nicht berechnet werden müssen, wird sogleich klar, wenn man die oben erwiesene Identität und ausserdem erwägt, dass die ganze Funktion des $mn^{ten}$ Grades, die = dem ersten Theil von 10) ist, gewiss keine von 0 verschiedene Glieder haben haben kann, bei welchen der Exponent zu x sich nicht durch m ohne Rest theilen lässt.

Die Gleichung, deren Wurzeln die $2^{ten}$ Potenzen der Gleichung 6) sind, ergibt sich demnach, indem man das Produkt

$$[x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots \alpha_n][x^n - \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} - \ldots + 1^{\frac{n}{2}} \alpha_n]$$

in eine ganze Function des $2n^{ten}$ Grades verwandelt, hierauf sämmtliche Exponenten zu x in der erhaltenen Function durch 2 dividirt, und endlich die aus diesen Divisionen entspringende Function des $n^{ten}$ Grades gleich Null setzt. Führt man diese Operationen aus, so ergibt sich, dass der $s^{te}$ Coefficient in der Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate von den Wurzeln der Gleichung 6) sind, gleich folgendem Produkte ist:

$$(-1)^s [\alpha_s^2 - 2\alpha_{s-1}\alpha_{s+1} + 2\alpha_{s-2}\alpha_{s+2} - 2\alpha_{s-3}\alpha_{s+3} + \ldots .]$$

wo die eingeklammerte Summe mit regelmässig abwechselnden Vorzeichen so weit fortzuführen ist, bis man endlich ein doppeltes Produkt gesetzt hat, bei welchem ein Factor der Coefficient von $x^0$ oder von $x^n$ in der Gleichung 6) ist. Hat man nun die Gleichung hergestellt, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln von 6) sind, so kann man auf gleiche Weise aus der gefundenen Gleichung die Gleichung bilden, deren Wurzeln die Quadrate ihrer Wurzeln oder die $(2^2)^{ten}$ Potenzen der Gleichung 6) sind; und so kann man fortfahren, um zuletzt zu einer Gleichung zu gelangen, deren Wurzeln solche Potenzen von den Wurzeln der Gleichung 6) sind, bei welchen der Exponent aus der Potenzirung von 2 mit irgend einer positiven ganzen Zahl hervorgeht.

## §. 3. Lehrsätze.

### I.

Gruppiren wir die sämmtlichen Wurzeln von folgender Gleichung mit reellen numerischen Coefficienten:

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0 \qquad 12)$$

wo $\alpha_n$ nicht 0 sei, in der Weise, dass in jeder Gruppe die Moduli der reellen und imaginären Wurzeln einander gleich, aber verschieden von den Moduli in den übrigen Gruppen sind, und lassen diese Gruppen so aufeinander folgen, dass der gemeinschaftliche Modulus in jeder Gruppe, z. B. in der $\varepsilon^{\text{ten}}$ kleiner als in der vorhergehenden $(\varepsilon - 1)^{\text{ten}}$ Gruppe ist; und nehmen wir hiebei an:

$\gamma$ sei die Anzahl aller dieser Gruppen, mithin grösser als 1;

$n_1, n_2, n_3, \ldots n_\gamma$ beziehungsweise die Zahl der Wurzeln in der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, 3^{\text{ten}}, \ldots \gamma^{\text{ten}}$ Gruppe;

$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ seien die Wurzeln der Gleichung 12), $W_1, W_2, \ldots W_n$ beziehungsweise ihre Moduli und zwar so aufeinanderfolgend, dass der Modulus von jeder dieser n Wurzeln nicht kleiner als der folgende ist;

$s_\varepsilon$ bedeute die Summe $n_1 + n_2 + \ldots n_\varepsilon$, mithin $s_1$ die Zahl $n_1$ und $W_{s_\varepsilon}$ den gemeinschaftlichen Modelus in der $\varepsilon^{\text{ten}}$ jener $\gamma$ Gruppen;

c bezeichne den Binomialcoefficienten $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ wenn n gerade, hingegen $\binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ wenn n ungerade;

$\varkappa$ bedeute die kleinste positive ganze Zahl, die in algebraischem Sinne nicht unter

$$\frac{1}{\lg 2}\left[\lg\left(r + 2 + \lg . c\right) - \lg\left(\lg \cdot \frac{W_{s_\varepsilon}}{W_{s_{\varepsilon+1}}}\right)\right]$$

liegt, wo r irgend eine bestimmte positive ganze Zahl ausdrückt, und die vorkommenden Logarithmen Briggische sind;

$\alpha_{t,m}$ sei der $t^{te}$ Coefficient in der $m^{ten}$ Quadratgleichung zu 12), d. h. in derjenigen Gleichung, deren Wurzeln die $(2^m)^{ten}$ Potenzen der Wurzeln zu der Gleichung 12) sind;

$l$ eine vieldeutige Zahl, die 0 und jede positive ganze Zahl zu ihren Werthen hat;

$\Theta$, $\Theta_1$, $\Theta_2$ .... seien unbestimmte Zahlen, die jedoch zwischen 1 und $-1$ liegen und wenn $l$ ohne Ende wächst, gegen 0 convergiren;

alsdann hat man folgende Gleichung:

$$(1+\Theta 10^{-r-2})\left(W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} W_{s_3}^{n_3} \dots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon}\right)^{2^{\varkappa+l}} = (-1)^{s_\varepsilon}\alpha_{s_\varepsilon,\varkappa+l} \quad 13)$$

## II.

Beibehaltend die eingeführte Bezeichnung, nehmen wir überdiess an:

q sei der kleinste der Quotienten, die aus den Divisionen von jedem der $\gamma$ Moduli $W_{s_1}$, $W_{s_2} \dots W_{s_\gamma}$ durch den nächst kleineren hervorgehen;

k die kleinste positive ganze Zahl, die in algebraischem Sinne nicht unter $\frac{1}{\lg 2}[\lg(r+2+\lg c)-\lg(\lg q)]$ liegt;

alsdann bestehen folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r}
(1+\Theta_1 10^{-r-2})\left(W_{s_1}^{n_1}\right)^{2^{k+l}} = (-1)^{s_1}\alpha_{s_1,k+l} \\
(1+\Theta_2 10^{-r-2})\left(W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2}\right)^{2^{k+l}} = (-1)^{s_2}\alpha_{s_2,k+l} \\
(1+\Theta_3 10^{-r-2})\left(W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} W_{s_3}^{n_3}\right)^{2^{k+l}} = (-1)^{s_3}\alpha_{s_3,k+l} \\
| \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\
| \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\
(1+\Theta_{\gamma-1} 10^{-r-2})\left(W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \dots W_{s_{\gamma-1}}^{n_{\gamma-1}}\right)^{2^{k+l}} = (-1)^{s_{\gamma-1}}\alpha_{s_{\gamma-1},k+l} \\
\left(W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \dots W_{s_\gamma}^{n_\gamma}\right)^{2^{k+l}} = (-1)^{s_\gamma}\alpha_{s_\gamma,k+l}
\end{array}\right\} \quad 14)$$

und wenn $\tau_1, \tau_2, \ldots . \tau_\gamma$ Zahlen zwischen $\frac{1000}{999}$ und $-\frac{1000}{999}$ bezeichnen, die alle aber für unendlich gross werdende l gegen 0 convergiren:

$$\left.\begin{aligned}
\left(1+\tau_1 10^{-r-2}\right) W_{s_1} &= \left[(-1)^{n_1} \alpha_{s_1, k+l}\right]^{\frac{1}{n_1 \cdot 2^{k+l}}} \\
\left(1+\tau_2 10^{-r-2}\right) W_{s_2} &= \left[\frac{(-1)^{n_2} \alpha_{s_2, k+l}}{\alpha_{s_1, k+l}}\right]^{\frac{1}{n_2 \cdot 2^{k+l}}} \\
\left(1+\tau_3 10^{-r-3}\right) W_{s_3} &= \left[\frac{(-1)^{n_3} \alpha_{s_3, k+l}}{\alpha_{s_2, k+l}}\right]^{\frac{1}{n_3 \cdot 2^{k+l}}} \\
| \quad\quad | \quad\quad & | \quad\quad | \quad\quad | \\
| \quad\quad | \quad\quad & | \quad\quad | \quad\quad | \\
\left(1+\tau_{\gamma-1} 10^{-r-2}\right) W_{s_{\gamma-1}} &= \left[\frac{(-1)^{n_{\gamma-1}} \alpha_{s_{\gamma-1}, k+l}}{\alpha_{s_{\gamma-2}, k+l}}\right]^{\frac{1}{n_{\gamma-1} 2^{k+l}}} \\
\left(1+\tau_\gamma 10^{-r-2}\right) W_{s_\gamma} &= \left[\frac{(-1)^{n_\gamma} \alpha_{s_\gamma, k+l}}{\alpha_{s_{\gamma-1}, k+l}}\right]^{\frac{1}{n_\gamma \cdot 2^{k+l}}}
\end{aligned}\right\} \quad 15)$$

## III.

Der $s_\varepsilon^{te}$ Coefficient in der $(\varkappa+l)^{ten}$ Quadratgleichung zu 12) hat folgende Eigenschaften:

1) Sein Vorzeichen ist bei jedem Werthe von l constant und immer übereinstimmend mit dem Vorzeichen von $(-1)^{s_\varepsilon}$, mithin der Coefficient selbst nie $= 0$.
2) Das Quadrat des $s_\varepsilon^{ten}$ Coefficienten in der $\varkappa^{ten}$ und jeder höhern Quadratgleichung differirt von dem absoluten Werthe des $s_\varepsilon^{ten}$ Coefficienten in der nächsthöhern Quadratgleichung um eine Zahl, die stets kleiner ist als der mit 0,01342 multiplicirte Stellenwerth des $r^{ten}$ Gliedes in jenem Quadrate, und es ist somit:

$$(1 + 1{,}342\Theta \cdot 10^{-r-2})\, \alpha^2_{s_\varepsilon, \varkappa+l} = (-1)^{s_\varepsilon} \alpha_{s_\varepsilon, \varkappa+l+1}$$

3) Der absolute Werth des doppelten Produktes aus je zweien vom $s_\varepsilon^{\text{ten}}$ Coefficienten in der $\varkappa^{\text{ten}}$ und jeder höhern Quadratgleichung gleichweit abstehenden Coefficienten, z. B. von $2\alpha_{s_\varepsilon - u, \varkappa+l}\, \alpha_{s_\varepsilon + u, \varkappa+l}$ ist mehr als $\frac{(10^{r+2})^u}{1{,}34}$ mal kleiner als das Quadrat des $s_\varepsilon^{\text{ten}}$ Coefficienten in derselben Quadratgleichung, und es ist somit:

$$2\dot{\alpha}_{s_\varepsilon - u, \varkappa+l}\, \dot{\alpha}_{s_\varepsilon + u, \varkappa+l} < 1{,}34(10^{-r-2})^u\, \alpha^2_{s_\varepsilon, \varkappa+l}$$

wo die über $\alpha$ gesetzten Punkte die absoluten Werthe der unter denselben bezeichneten Coefficienten andeuten sollen.

## IV.

Fände man bei der successiven Berechnung der $1^{\text{ten}}$, $2^{\text{ten}}$, etc. Quadratgleichung zu 12), dass schon in der $m^{\text{ten}}$ und jeder höhern Quadratgleichung der Unterschied zwischen dem Quadrate des $s_\varepsilon^{\text{ten}}$ Coefficienten und dem absoluten Werthe des $s_\varepsilon^{\text{ten}}$ Coefficienten in der nächsthöhern Quadratgleichung unter dem Producte aus jenem Quadrate in $(1{,}342\ 10^{-r-2})$ liegt, fände man also, dass

$$(1 + 1{,}342\Theta \,.\, 10^{-r-2})\, \alpha^2_{s_\varepsilon, m+l} = (-1)^{s_\varepsilon} \alpha_{s_\varepsilon, m+l+1}$$

so kann man hieraus schliessen, dass

$$(1 + 1{,}344\Theta \,.\, 10^{-r-2})\left[W^{n_1}_{s_1} W^{n_2}_{s_2} \ldots W^{n_\varepsilon}_{s_\varepsilon}\right]^{2m} = (-1)^{s_\varepsilon} \alpha_{s_\varepsilon, m}$$

und diese Gleichung (wo $\Theta$ zwischen 1 und $-1$) ist auch dann noch richtig, wenn für m irgend eine grössere Zahl, als m ist, gesetzt wird.

## V.

Würde man bei der successiven Berechnung der $1^{\text{ten}}$, $2^{\text{ten}}$, etc. Quadratgleichung zu 12) irgend einen, z. B. den $t^{\text{ten}}$ Coeff. in der $m^{\text{ten}}$ und jeder höhern Quadratgleichung, nämlich $\alpha_{t, m+l}$, im Besitze sämmtlicher 3 unter III. angeführten Eigenschaften finden, wäre also für jeden Werth von $\mathfrak{l}$

$$\alpha) \quad \underbrace{\alpha_{t,m+\mathfrak{l}}} = (-1)^t \; {}^{*})$$

$$\beta) \quad (-1)^t \alpha_{t,m+\mathfrak{l}+1} = (1 + 1{,}342\Theta 10^{-r-2})\, \alpha^2_{t,m+\mathfrak{l}}$$

$$\gamma) \quad 2\dot{\alpha}_{t-u,m+\mathfrak{l}}\, \dot{\alpha}_{t+u,m+\mathfrak{l}} < 1{,}34(10^{-r-2})^u\, \alpha^2_{t,m+\mathfrak{l}}$$

so kann man aus der Anwesenheit dieser 3 Eigenschaften bloss darauf mit Sicherheit schliessen, dass entweder

1) $(1 + 1{,}344\Theta 10^{-r-2})[W_1 W_2 W_3 \ldots W_t]^{2m} = (-1)^t \alpha_{t,m}$, wo $\Theta^2 < 1$

oder, wenn diess nicht der Fall wäre, dass dann jedenfalls folgende Gleichheit Statt fände:

2) $\gamma[W_1 W_2 W_3 \ldots W_t]^{2m} = (-1)^t \alpha_{t,m}$, wo $\gamma < 1 - 1{,}344.10^{-r-2}$

Im ersten dieser 2 Fälle kann t mit einer der $\nu$ Zahlen, $s_1, s_2 \ldots s_\nu$ übereinstimmen, und in diesem Falle nennen wir $\alpha_{t,m}$ einen Coefficienten der ersten Art, aber auch gar wohl verschieden von jeder dieser Zahlen sein, wobei $\alpha_{t,m}$ ein Coefficient der $2^{ten}$ Art heissen soll; während im $2^{ten}$ Falle, in welchem wir $\alpha_{t,m}$ einen Coefficienten der $3^{ten}$ Art nennen, diese Verschiedenheit stets vorhanden sein muss.

Weiss man aber von der Gleichung 12), dass sie nur reelle Wurzeln enthalten kann, so folgt aus der Existenz der 3 erwähnten Eigenschaften des Coefficienten $\alpha_{t,m+\mathfrak{l}}$ in jedem Falle, dass t einer der $\nu$ Zahlen $s_1, s_2 \ldots s_\nu$ gleich ist und wenn t etwa $= s_\varepsilon$, folgende Gleichung:

$$(1 + 1{,}344\Theta 10^{-r-2}) \left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \cdots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon}\right]^{2m} = (-1)^{s_\varepsilon} \alpha_{s_\varepsilon, m}$$

## Beweis zu I. und II.

Setzen wir in den sämmtlichen $\binom{n}{s_\varepsilon}$ Complexionen der $s_\varepsilon{}^{ten}$ Klasse aus den n Elementen $\omega_1^{2\varkappa}, \omega_2^{2\varkappa} \ldots \omega_n^{2\varkappa}$ ohne Wieder-

*) $\underbrace{\alpha_{t,m+\mathfrak{l}}}$ bezeichnet den Quotienten aus $\alpha_{t,m+\mathfrak{l}}$ durch den absoluten Werth von $\alpha_{t,m+\mathfrak{l}}$.

holung, deren Summe mit $(-1)^{s_\varepsilon}$ multiplicirt, bekanntlich den $s_\varepsilon^{\text{ten}}$ Coefficienten in der $\varkappa^{\text{ten}}$ Quadratgleichung zu 12) geben muss, für die Wurzeln ihre Moduli, so wird offenbar die grösste Complexion nach dieser Setzung $= \left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon}\right]^{2^\varkappa}$ sein, und jede der übrigen Complexionen das Product $\left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots \ldots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon - 1} W_{s_{\varepsilon+1}}\right]^{2^\varkappa}$ nicht übersteigen können. Bezeichnet daher $M_{s_\varepsilon, \varkappa}$ die Summe der aus den erwähnten Setzungen hervorgehenden Complexionen, so hat man die Gleichung:

$$M_{s_\varepsilon, \varkappa} = \left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots . W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon}\right]^{2^\varkappa} + \\ + b\left[\binom{n}{s_\varepsilon} - 1\right]\left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon - 1} W_{s_{\varepsilon+1}}\right]^{2^\varkappa}$$

wo b eine positive, die Einheit nicht übersteigende Zahl bezeichnet. Nun ist die Complexion $\left[\omega_{s_1}^{n_1} \omega_{s_2}^{n_2} \ldots \omega_{s_\varepsilon}^{\varepsilon}\right]^{2^\varkappa} =$ $= \left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon}\right]^{2^\varkappa}$, weil in jeder der $\gamma$ Wurzelgruppen die imaginären Wurzeln nur paarweise conjugirt vorkommen können und die allfälligen negativen Wurzeln mit dem Exponenten $2^\varkappa$ versehen erscheinen, ferner ist der absolute Werth des reellen Bestandtheils in jeder der den übrigen Complexionen gleichen Complexen vermöge des Moivre'schen Lehrsatzes gewiss nicht grösser als das Ergebniss der Setzung der Moduli von den Wurzeln an die Stelle der Wurzeln in einer solchen Complexion, und die Summe aller nicht reellen Summanden in jenen Complexen bekanntlich der Null gleich, woraus folgt, dass

$$\alpha_{s_\varepsilon, \varkappa} = (-1)^{s_\varepsilon}\left[\left(W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon}\right)^{2^\varkappa} + \\ + \Theta\left[\binom{n}{s_\varepsilon} - 1\right]\left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon - 1} W_{s_{\varepsilon+1}}\right]^{2^\varkappa}\right] \quad 16)$$

wo $\Theta$ eine unbestimmte Zahl zwischen 1 und $-1$ bedeutet. Nach der eingeführten Bezeichnung ist aber c der grösste Binominalcoefficient in der $n^{ten}$ Potenz eines Binoms, mithin $\binom{n}{s_\varepsilon}-1$ kleiner als c, und es folgt daher aus 16) die Gleichung:

$$\alpha_{s_\varepsilon,\varkappa} = (-1)^{s_\varepsilon}\left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon}\right]^{2^\varkappa}\left[1 + c\Theta\left(\frac{W_{s_{\varepsilon+1}}}{W_{s_\varepsilon}}\right)^{2^\varkappa}\right] \quad 17)$$

wo natürlich $\Theta$ wieder eine unbestimmte Zahl zwischen 1 und $-1$ bezeichnet. Auf ganz gleiche Weise lässt sich begründen, dass

$$\alpha_{s_\varepsilon,\varkappa+\mathfrak{l}} = (-1)^{s_\varepsilon}\left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon}\right]^{2^{\varkappa+\mathfrak{l}}}\left[1 + c\Theta\left(\frac{W_{s_{\varepsilon+1}}}{W_{s_\varepsilon}}\right)^{2^{\varkappa+\mathfrak{l}}}\right] \quad 18)$$

Ist nun

$$\lg(r + 2 + \lg c) - \lg . \left(\lg \frac{W_{s_\varepsilon}}{W_{s_{\varepsilon+1}}}\right) \text{ gleich 0 oder negativ} \quad 19)$$

so muss $\lg(r + 2 + \lg c)$, oder

$$\lg(c \,.\, 10^{r+2}) \lesseqgtr \lg . \lg \frac{W_{s_\varepsilon}}{W_{s_{\varepsilon+1}}}$$

und daher

$$\left[\frac{W_{s_{\varepsilon+1}}}{W_{s_\varepsilon}}\right]^{2^{\varkappa+\mathfrak{l}}} \lesseqgtr \frac{1}{(c \,.\, 10^{r+2})^{2^{\varkappa+\mathfrak{l}}}} \quad 20)$$

woraus mit Zuziehung der Gleichung 18) sofort auf die zu beweisende Gleichung geschlossen werden darf, in welcher dann $\Theta$ beim unendlichen Zunehmen von $\mathfrak{l}$ offenbar die Null zur Grenze hat. Ist aber der Ausdruck 19) positiv, so ist nach der eingeführten Bezeichnung

$$\varkappa \gtreqless \frac{1}{\lg 2} \lg \frac{r + 2 + \lg c}{\lg \frac{W_{s_\varepsilon}}{W_{s_{\varepsilon+1}}}}$$

mithin

$$2^{\varkappa} \overline{\gtrless} \frac{\lg(c \,.\, 10^{r+2})}{\lg .\dfrac{W_{s_\varepsilon}}{W_{s_{\varepsilon+1}}}}$$

und daher

$$\left(\frac{W_{s_{\varepsilon+1}}}{W_{s_\varepsilon}}\right)^{2^{\varkappa+\mathfrak{l}}} \overline{\lessgtr} \frac{1}{(c \,.\, 10^{r+2})^{2^{\mathfrak{l}}}} \qquad 21)$$

Hieraus und aus der Gleichung 18) ergibt sich auch in diesem Falle die Wahrheit des Lehrsatzes I); und da von diesem Lehrsatz die Gleichungen 14) unmittelbare Folgen sind, so bleibt jetzt nur noch der Beweis für die Existenz der Gleichung 15) übrig.

Zum Beweise der 3ten dieser Gleichungen 15) dividiren wir die 3te der Gleichungen 14) durch die 2te derselben, depotenziren dann mit $n_3 . 2^{\varkappa+\mathfrak{l}}$, und erhalten so die Gleichung

$$\left[\frac{1+\Theta_3 10^{-r-2}}{1+\Theta_2 10^{-r-2}}\right]^{\frac{1}{n_3 . 2^{\varkappa+\mathfrak{l}}}} W_{s_3} = \left[\frac{(-1)^{s_3-s_2}\,\alpha_{s_3,\varkappa+\mathfrak{l}}}{\alpha_{s_\varepsilon,\varkappa+\mathfrak{l}}}\right]^{\frac{1}{n_3 . 2^{\varkappa+\mathfrak{l}}}} \qquad 22)$$

Nun ist offenbar

$$\frac{1+\Theta_3 10^{-r-2}}{1+\Theta_2 10^{-r-2}} = 1 + \frac{\dfrac{(\Theta_3-\Theta_2)}{1+\Theta_2 10^{-r-2}}}{10^{r+2}}$$

und $\dfrac{\Theta_3-\Theta_2}{1+\Theta_2 . 10^{-r-2}}$, wenn positiv, sicher nicht über $\dfrac{2}{1-10^{-r-2}}$, welcher Quotient, da r mindestens $= 1$, offenbar $2\dfrac{2}{999}$ zum Maximum hat; woraus, bei dem Umstande, dass $n_3 . 2^{\varkappa+\mathfrak{l}}$ nie kleiner als 2 sein kann, sehr leicht folgt, dass

$$\left[\frac{1+\Theta_3 10^{-r-2}}{1+\Theta_2 10^{-r-2}}\right]^{\frac{1}{n_3 . 2^{\varkappa+\mathfrak{l}}}} = 1 + \frac{1000 \,.\, \Theta}{999 \,.\, 10^{r+2}} \qquad 23)$$

wo $\Theta$ eine Zahl bezeichnet, die jedenfalls zwischen 1 und $-1$ liegt, und die gegen 0 convergirt, wenn $\mathfrak{l}$ ohne Ende wächst. Ist aber $\Theta_3 - \Theta_2$ negativ, dann ist $\dfrac{1+\Theta_3 10^{-r-2}}{1+\Theta_2 10^{-r-2}}$ ein positiver echter Bruch und nicht kleiner als $\frac{1-10^{-r-2}}{1+10^{-r-2}}$ oder $\frac{(1-10^{-r-2})^2}{1+10^{-2r-4}}$, mithin entschieden grösser als $(1-10^{-r-2})^2$, woraus offenbar auch für diesen Fall die Gültigkeit der Gleichung 23) folgt. Beachten wir jetzt noch, dass nur nach der Bedeutung von $s_3$ und $s_2$ die Differenz $s_3 - s_2 = n_2$, so sehen wir sofort, dass die zu beweisende Gleichung eine Folge von der Gleichung 22) ist. Dass die übrigen Gleichungen in 15) sich ebenso beweisen lassen, ist für sich klar.

## Beweis zu III.

Setzen wir in den sämmtlichen Complexionen, deren Summe $= \alpha_{s_\varepsilon - u, \varkappa}$ für die Wurzeln ihre Moduli und bezeichnen die aus diesen Setzungen hervorgehende Summe mit $M_{s_\varepsilon - u, \varkappa}$: so können wir uns alle Complexionen in $M_{s_\varepsilon - u, \varkappa}$ in zwei Gruppen denken, von welchen die erste alle aus den Elementen $W_1^{2^\varkappa}, W_2^{2^\varkappa} \ldots . W_{s_\varepsilon}^{2^\varkappa}$ gebildeten Complexionen, und die zweite alle übrigen Complexionen enthält. Nun ist die Zahl der Complexionen in der ersten Gruppe $= \binom{s_\varepsilon}{s_\varepsilon - u}$ und jede derselben gewiss nicht grösser als $W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots . W_{s_a}^{n_a} W_{s_{a+1}}^{s_\varepsilon - u - s_a}$, wenn $s_\varepsilon - u$ zwischen $s_a$ und $s_{a+1}$ liegt oder $= s_a$ ist. Ferner kann keine Complexion in der zweiten Gruppe das Produkt

$$\left(W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots . W_{s_a}^{n_a} W_{s_{a+1}}^{s_\varepsilon - u - s_a - 1} W_{s_\varepsilon + 1}\right)^{2^\varkappa}$$

wenn $s_\varepsilon - u$ zwischen $s_a$ und $s_{a+1}$, und wenn $s_\varepsilon - u = s_a$ keine Complexion, das Produkt $\left(W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots . W_{s_a}^{n_a - 1} W_{s_\varepsilon + 1}\right)^{2^\varkappa}$ übersteigen. Hieraus folgt, dass im ersten dieser beiden Fälle

$$M_{s_\varepsilon - u, \varkappa} \lesseqgtr \binom{s_\varepsilon}{s_\varepsilon - u}\left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots . W_{s_a}^{n_a} W_{s_{a+1}}^{s_\varepsilon - u - s_a}\right]^{2^\varkappa} +$$

$$+ \left[\binom{n}{s_\varepsilon - u} - \binom{s_\varepsilon}{s_\varepsilon - u}\right]\left[W_{s_1}^{n_1} \ldots W_{s_a}^{n_a} W_{s_{a+1}}^{s_\varepsilon - u - s_a - 1} W_{s_\varepsilon + 1}\right]^{2^\varkappa} \quad 24)$$

mithin auch

$$M_{s_\varepsilon - u, \varkappa} \gtreqless \binom{s_\varepsilon}{s_\varepsilon - u}\left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_a}^{n_a} W_{s_{a+1}}^{s_\varepsilon - u - s_a}\right]^{2^\varkappa} \times$$

$$\left[1 + \frac{\binom{n}{s_\varepsilon - u} - \binom{s_\varepsilon}{s_\varepsilon - u}}{\binom{s_\varepsilon}{s_\varepsilon - u}}\left(\frac{W_{s_\varepsilon + 1}}{W_{s_{a+1}}}\right)^{2^\varkappa}\right] \quad 25)$$

Aber in dem ersten jener zwei Fälle ist a höchstens $= \varepsilon - 1$, mithin der Divisor $W_{s_{a+1}}$ entweder $= W_{s_\varepsilon}$ oder dann jedenfalls grösser als $W_{s_\varepsilon}$; erwägen wir ferner, dass nach der Relation 20) und 21) $\left[\frac{W_{s_\varepsilon + 1}}{W_{s_\varepsilon}}\right]^{2^\varkappa} \gtreqless \frac{10^{-r-2}}{c}$ und c nur nach seiner Bedeutung grösser als $\frac{\binom{n}{s_\varepsilon - u} - \binom{s_\varepsilon}{s_\varepsilon - u}}{\binom{s_\varepsilon}{s_\varepsilon - u}}$, dass überdiess $M_{s_\varepsilon - u, \varkappa}$ nicht unter dem absoluten Werth der reellen Zahl $\alpha_{s_\varepsilon - u, \varkappa}$ liegen kann, so findet man aus 25) sehr leicht folgende Relation, wo $\dot{\alpha}'_{s_\varepsilon - u, \varkappa}$ den absoluten Werth von $\alpha_{s_\varepsilon - u, \varkappa}$ bezeichnet

$$\dot{\alpha}_{s_\varepsilon - u, \varkappa} < \binom{s_\varepsilon}{u}\left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_a}^{n_a} W_{s_{a+1}}^{s_\varepsilon - u - s_a}\right]^{2^\varkappa}\left(1 + \frac{1}{10^{r+2}}\right) \quad 26)$$

und zu dieser Relation gelangt man auf dieselbe Weise auch im zweiten jener Fälle.

Bringen wir jetzt die $\binom{n}{s_\varepsilon + u}$ Complexionen in $M_{s_\varepsilon + u, \varkappa}$ in 2 Gruppen, von welchen die erste, sämmtliche Complexionen, in welchen das Produkt der $s_\varepsilon$ ersten Elemente $= \left(W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon}\right)^{2^\varkappa}$ ist, und die zweite alle übrigen Complexionen enthält, so finden wir, dass die Zahl der Complexionen in der ersten Gruppe $= \binom{s_\nu - s_\varepsilon}{u}$ und jede derselben die Complexion

$$\left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon} \ldots W_{s_b}^{n_b} W_{s_{b+1}}^{s_\varepsilon + u - s_b}\right]^{2^\varkappa}$$

nicht übersteigen kann, wenn $s_\varepsilon + u$ zwischen $s_b$ und $s_{b+1}$ oder gleich $s_b$ ist; dass ferner jede Complexion der zweiten Gruppe nicht grösser als das Produkt

$$\left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \dots W_{s_{\varepsilon-1}}^{n_{\varepsilon-1}} \dots W_{s_\mathfrak{h}}^{n_\mathfrak{h}} W_{s_{\mathfrak{h}+1}}^{s_\varepsilon + u - s_\mathfrak{h}} W_{s_{\varepsilon+1}}\right]^{2^\varkappa}$$

sein kann, woraus folgt, dass

$$M_{s_\varepsilon + u, \varkappa} \lesseqgtr \binom{s_\nu - s_\varepsilon}{u} \left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \dots W_{s_{\varepsilon-1}}^{n_{\varepsilon-1}} W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon} \dots W_{s_\mathfrak{h}}^{n_\mathfrak{h}} W_{s_{\mathfrak{h}+1}}^{s_\varepsilon + u - s_\mathfrak{h}}\right]^{2^\varkappa} +$$

$$\left[\binom{n}{s_\varepsilon + u} - \binom{s_\nu - s_\varepsilon}{u}\right]\left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \dots W_{s_{\varepsilon-1}}^{n_{\varepsilon-1}} W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon - 1} \dots W_{s_\mathfrak{h}}^{n_\mathfrak{h}} W_{s_{\mathfrak{h}+1}}^{s_\varepsilon + u - s_\mathfrak{h}} W_{s_{\varepsilon+1}}\right]^{2^\varkappa}$$

und aus dieser Beziehung ergibt sich ganz ähnlich wie aus 24) die 26), dass

$$\dot{\alpha}_{s_\varepsilon + u, \varkappa} \lesseqgtr \binom{s_\nu - s_\varepsilon}{u} \left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \dots W_{s_\mathfrak{h}}^{n_\mathfrak{h}} W_{s_{\mathfrak{h}+1}}^{s_\varepsilon + u - s_\mathfrak{h}}\right]^{2^\varkappa} (1 + 10^{-r-2}) \quad 27)$$

wo $\dot{\alpha}_{s_\varepsilon + u, \varkappa}$ den absoluten Werth der reellen Zahl $\alpha_{s_\varepsilon + u, \varkappa}$ bezeichnet.

Aus den Relationen 26) und 27) und der früher bewiesenen Gleichung

$$\alpha^2_{s_\varepsilon, \varkappa} = (1 + \Theta 10^{-r-2})^2 \left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \dots W_{s_a}^{n_a} \dots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon}\right]^{2^{\varkappa+1}}$$

ergibt sich sofort:

$$\frac{\dot{\alpha}_{s_\varepsilon - u, \varkappa} \, \dot{\alpha}_{s_\varepsilon + u, \varkappa}}{\alpha^2_{s_\varepsilon, \varkappa}} < \left(\frac{1 + 10^{-r-2}}{1 - 10^{-r-2}}\right)^2 \binom{s_\varepsilon}{u} \binom{s_\gamma - s_\varepsilon}{u} \times$$

$$\frac{\left[W_{s_1}^{n_1} \dots W_{s_a}^{n_a} W_{s_{a+1}}^{s_\varepsilon - u - s_a}\right]^{2^\varkappa} \left[W_{s_1}^{n_1} \dots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon} \dots W_{s_\mathfrak{h}}^{n_\mathfrak{h}} W_{s_{\mathfrak{h}+1}}^{s_\varepsilon + u - s_\mathfrak{h}}\right]^{2^\varkappa}}{\left[W_{s_1}^{n_1} \dots W_{s_a}^{n_a} \dots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon}\right]^{2^\varkappa} \left[W_{s_1}^{n_1} \dots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon}\right]^{2^\varkappa}}$$

$$< 1{,}00401 \binom{s_\varepsilon}{u} \binom{s_\nu - s_\varepsilon}{u} \left[\frac{W_{s_\varepsilon + 1}^{n_\varepsilon + 1} W_{s_\varepsilon + 2}^{n_\varepsilon + 2} \dots W_{s_\mathfrak{h}}^{n_\mathfrak{h}} W_{s_\mathfrak{h} + 1}^{s_\varepsilon + u - s_\mathfrak{h}}}{W_{s_{a+1}}^{s_{a+1} - s_\varepsilon + u} W_{s_{a+2}}^{n_{a+2}} \dots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon}}\right]^{2^\varkappa}$$

Hier ist nun der Dividend des Grundfaktors der $(2^\varkappa)^{\text{ten}}$ Potenz ein Produkt aus $(n_{\varepsilon+1} + n_{\varepsilon+2} + \dots n_\mathfrak{h} + s_\varepsilon + u - s_\mathfrak{h})$ oder nach der Bedeutung von $s_\varepsilon$ und $s_\mathfrak{h}$, nach welcher $s_\mathfrak{h} - s_\varepsilon = n_{\varepsilon+1} + n_{\varepsilon+2} \dots n_\mathfrak{h}$, ein Produkt aus u Faktoren, von welchen der grösste $= W s_{\varepsilon+1}$, und der Divisor nach der Bedeutung von $s_\varepsilon$ und $s_{a+1}$ ebenfalls ein Produkt aus u Faktoren, von welchen aber der kleinste $= W s_\varepsilon$ ist, woraus offenbar folgt, dass

$$\frac{\dot{\alpha}_{s_\varepsilon - u, \varkappa} \cdot \dot{\alpha}_{s_\varepsilon + u, \varkappa}}{\dot{\alpha}^2_{s_\varepsilon, \varkappa}} < 1{,}00401 \binom{s_\varepsilon}{u} \binom{s_\nu - s_\varepsilon}{u} \left[\frac{W s_{\varepsilon+1}}{W s_\varepsilon}\right]^{2^\varkappa . u} \qquad 28)$$

Da nun nach den Relationen 20 und 21)

$$\left[\frac{W s_{\varepsilon} + 1}{W s_\varepsilon}\right]^{2^\varkappa} \leqq \frac{10^{-r-2}}{c}$$

so folgt aus 28), dass

$$2\dot{\alpha}_{s_\varepsilon - u, \varkappa}\, \dot{\alpha}_{s_\varepsilon + u, \varkappa} < 2{,}00802 \,.\, \frac{\binom{s_\varepsilon}{u}\binom{s_\nu - s_\varepsilon}{u}}{(10^{r+2}c)^u}\, \dot{\alpha}^2_{s_\varepsilon, \varkappa} \qquad 29)$$

Nun findet man sehr leicht, dass für $u = 1$ der Quotient $\dfrac{\binom{s_\varepsilon}{u}\binom{n - s_\varepsilon}{u}}{c^u}$ immer unter $\dfrac{2}{3}$ liegt, diess ist aber auch der Fall für jeden andern Werth von u, denn, da bekanntlich:

$$\binom{m+p}{\gamma} = \binom{m}{\gamma} + \binom{m}{\gamma - 1}\binom{p}{1} + \binom{m}{\gamma - 2}\binom{p}{2} \cdots \binom{p}{\gamma}$$

so ist $\binom{s_\varepsilon}{u}\binom{n - s_\varepsilon}{u} < \binom{n}{2u}$ und da $\binom{n}{2u}$ den Binomialcoefficienten c nicht übersteigen kann, so ist auch $\binom{s_\varepsilon}{u}\binom{n - s_\varepsilon}{u} < c$ und mithin jener Quotient immer kleiner als $c^{-(u-1)}$, was für $u > 1$ immer kleiner als $\dfrac{2}{3}$ ist. Aus der Relation 29) folgt daher auch:

$$2\dot{\alpha}_{s_\varepsilon - u, \varkappa}\, \dot{\alpha}_{s_\varepsilon + u, \varkappa} < 1{,}34 \,.\, (10^{-r-2})^u\, \alpha^2_{s_\varepsilon, \varkappa} \qquad 30)$$

und diese Beziehung findet nach ihrer Ableitung offenbar nur um so mehr statt, wenn durchgehends irgend eine Zahl über $\varkappa$ für $\varkappa$ gesetzt wird, und es ist daher auch

$$2\dot{\alpha}_{s_\varepsilon - u, \varkappa + \iota}\, \dot{\alpha}_{s_\varepsilon + u, \varkappa + \iota} < 1{,}34\, (10^{-r-2})^u\, \alpha^2_{s_\varepsilon, \varkappa + \iota} \qquad 31)$$

Setzen wir jetzt in dieser Relation successive 1, 2, 3 .... für u und addiren die so erhaltenen Ungleichheiten, so ergibt sich, da r doch wenigstens 1 ist, sofort, dass

$$2\dot{\alpha}_{s_\varepsilon-1,\varkappa+\mathfrak{l}}\,\dot{\alpha}_{s_\varepsilon+1,\varkappa+\mathfrak{l}} + 2\dot{\alpha}_{s_\varepsilon-2,\varkappa+\mathfrak{l}}\,\dot{\alpha}_{s_\varepsilon+2,\varkappa+\mathfrak{l}} + \cdots$$
$$\cdots < 1{,}34134134\ldots 10^{-r-2}\cdot\alpha^2_{s_\varepsilon,\varkappa+\mathfrak{l}} \qquad 32)$$

Nun ist der erste Theil dieser Ungleichheit nach §. 2 gerade die Summe der absoluten Werthe sämmtlicher Summanden, deren Summe zu $\alpha^2_{s_\varepsilon,\varkappa+\mathfrak{l}}$ addirt das Produkt $(-1)^{s_\varepsilon}.\alpha_{s_\varepsilon,\varkappa+\mathfrak{l}+1}$ gibt, woraus mit Beachtung von 32) folgt:

$$(-1)^{s_\varepsilon}\,\alpha_{s_\varepsilon,\varkappa+\mathfrak{l}+1} = [1 + 1{,}342\Theta\,.\,10^{-r-2}]\;\alpha^2_{s_\varepsilon,\varkappa+\mathfrak{l}} \qquad 33)$$

## Anmerkung.

Für die Anwendung der Lehrsätze I) und II) ist es natürlich von der grössten Wichtigkeit, den $s_1^{\text{ten}}$, $s_2^{\text{ten}}$ .... Coefficienten zu erkennen, und dazu gibt der eben erwiesene Lehrsatz ein sehr wichtiges, wenn auch keineswegs hinreichendes Mittel. Bei dem Gebrauche dieses Mittels darf man sich aber ja nicht etwa verleiten lassen aus der Anwesenheit der $2^{\text{ten}}$ Eigenschaft allein, oder der $1^{\text{ten}}$ und $2^{\text{ten}}$ auf die der $3^{\text{ten}}$ zu schliessen.

Hat man z. B. die Gleichung

$$x^6 - 19x^5 + 81x^4 + 81x^3 + 81x^2 + 80x + 100 = 0 \qquad 34)$$

deren Wurzeln 10, 10, $\cos\frac{2}{5}\pi \pm i\sin\frac{2}{5}\pi$, $\cos\frac{4}{5}\pi \pm i\sin\frac{4}{5}\pi$ sind, so ist in diesem besondern Falle $\nu = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $s_1 = 2$, $s_2 = 6$, $c = \binom{6}{3} = 20$, $q = 10$, mithin für $r = 4$

$$\frac{1}{\lg 2}\,[\lg(r + 2 + \lg c) - \lg(\lg q)] < 3$$

daher $k = 3$. Bildet man nun die $3^{\text{te}}$ Quadratgleichung zu 34), so werden nach dem Lehrsatze II) die Moduli 10 und 1 bis zur $5^{\text{ten}}$ Stelle aus den Coefficienten $\alpha_{2,3}$ und $\alpha_{6,3}$ erhalten, und man wird diese Coefficienten mit den sämmtlichen in unserm

Lehrsatz angeführten Eigenschaften ausgestattet finden; man wird aber auch $\alpha_{3,3}$ und $\alpha_{5,3}$ als Coefficienten erkennen, welchen die 2[te], nicht aber auch zugleich die 1[te] und 3[te] jener 3 Eigenschaften zukömmt; ferner wird man den Coefficienten $\alpha_{4,3}$ im Besitze von der 1[ten] und 2[ten], aber nicht von der 3[ten] Eigenschaft sehen. In diesem Beispiel würde man freilich, wenn man bei der Anwendung des Lehrsatzes II) $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{4,3}$ und $\alpha_{5,3}$ als Coefficienten ansehen würde, die in der Reihe der Coefficienten $\alpha_{s_1,3}$, $\alpha_{s_2,3}$ .... erscheinen, und hiebei auf die Vorzeichen gar nicht achtete, zu einem nicht unrichtigen Resultate gelangen; und es könnte desswegen die Vermuthung Platz greifen, dass doch nur das Vorhandensein der 2[ten] Eigenschaft zur Verwendbarkeit der Coefficienten genüge. Dass diese Vermuthung durchaus ungegründet ist, erkennen wir an der Gleichung:

$$x^8 - 202x^7 + 10400x^6 - 20000x^5 + 0 \,.\, x^4 - 32x^3 + 6464x^2 - 332800x + 640000 = 0 \qquad 35)$$

deren Wurzeln

$$100,\ 100,\ 2,\ 2,\ 2(\cos \tfrac{2}{5}\pi \pm i \sin \tfrac{2}{5}\pi),\ 2(\cos \tfrac{4}{5}\pi \pm i \sin \tfrac{4}{5}\pi)$$

sind. Hier ist $\nu = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 6$, $s_1 = 2$, $s_2 = 8$, $c = \binom{8}{4} = 70$, $q = 50$, mithin für $r = 9$

$$\frac{1}{\lg 2}\,[\lg(r + 2 + \lg c) - \lg \,.\, (\lg q)] < 3$$

somit $k = 3$. Bildet man daher die 3[te] Quadratgleichung, so werden die Coefficienten $\alpha_{2,3}$ und $\alpha_{8,3}$ die Moduli 100 und 2 bis zur 10[ten] Stelle genau geben und man wird diese Coefficienten mit den sämmtlichen erwähnten 3 Eigenschaften versehen finden. Man wird aber auch zugleich bemerken können, dass dem Coefficienten $\alpha_{5,3}$, ja sogar schon dem Coefficienten $\alpha_{5,0}$ die 1[te] und 2[te] jener 3 Eigenschaften ohne die 3[te] zukommt. Würde man nun diesen Coefficienten in die Reihe der Coefficienten $\alpha_{s_1,3}$, $\alpha_{s_2,3}$ ..... versetzen, und hierauf den Lehrsatz II) anwenden, so erhielte man für die Moduli der Wurzeln zu 35) Zahlen, die eben keineswegs Moduli dieser Wurzeln sind.

Wir bemerken schliesslich noch, dass der Coefficient $\alpha_{4,m}$ für jeden Werth von m gleich 0 ist.

Beweis zu IV.

Bezeichnen wir der Kürze wegen durch einen Punkt über einem Buchstaben den absoluten Werth der durch diesen Buchstaben vorgestellten reellen Zahl, so hat man nach der Voraussetzung die Gleichung:

$$\alpha^2_{s_\varepsilon,m} = \frac{\dot{\alpha}_{s_\varepsilon,m+1}}{1 + 1{,}342\Theta \,.\, 10^{-r-2}}$$

Nun ist $\dfrac{1}{1 + 1{,}342\Theta \,.\, 10^{-r-2}}$ zwischen

$$1 + \frac{\dfrac{1{,}342}{1 - 1{,}342\; 10^{-r-2}}}{10^{r+2}} \text{ und } 1 - \frac{\dfrac{1{,}342}{1 + 1{,}342 . 10^{-r-2}}}{10^{r+2}}$$

mithin auch, da r wenigstens $= 1$ ist, zwischen den Grenzen: $1 + 1{,}344\; 10^{-r-2}$ und $1 - 1{,}344\; 10^{-r-2}$. Bezeichnen wir nun mit $\zeta_1$, $\zeta_2$, $\zeta_3$ .... Zahlen, die zwischen den eben erwähnten Grenzen liegen, so ergeben sich aus der vorausgesetzten Gleichung, die auch für jede Zahl über m anstatt m gilt, folgende Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha^2_{s_\varepsilon,m} = \zeta_1\, \dot{\alpha}_{s_\varepsilon,m+1} \\
\alpha^2_{s_\varepsilon,m+1} = \zeta_2\, \dot{\alpha}_{s_\varepsilon,m+2} \\
\alpha^2_{s_\varepsilon,m+2} = \zeta_3\, \dot{\alpha}_{s_\varepsilon,m+3} \\
\quad | \qquad | \qquad | \qquad | \\
\quad | \qquad | \qquad | \qquad | \\
\alpha^2_{s_\varepsilon,\varkappa-2} = \zeta_{\varkappa-1-m}\, \dot{\alpha}_{s_\varepsilon,\varkappa-1} \\
\alpha^2_{s_\varepsilon,\varkappa-1} = \zeta_{\;-m}\, \dot{\alpha}_{s_\varepsilon,\varkappa}
\end{array}\right\} \qquad 36)$$

Depotenziren wir nun die zweite dieser Gleichungen mit 2, die dritte mit $2^2$, die vierte mit $2^3$ u. s. f., endlich die $(\varkappa - m)^{te}$ mit $2^{\varkappa-m-1}$, und multipliziren die so erhaltenen Gleichungen miteinander, so gelangen wir zu folgender Gleichung:

$$\alpha^2_{s_\varepsilon,m} = \zeta_1 \cdot \zeta_2^{\frac{1}{2}} \cdot \zeta_3^{\frac{1}{2^2}} \cdot \zeta_4^{\frac{1}{2^3}} \cdot \ldots \cdot \zeta_{\varkappa-m}^{\frac{1}{2^{\varkappa-1-m}}} \cdot \dot{\alpha}_{s_\varepsilon,\varkappa}^{\frac{1}{2^{\varkappa-1-m}}} \qquad 37)$$

Nun ist nach dem Lehrsatz I.

$$\alpha_{s_\varepsilon,\varkappa} = (1 + \Theta\, 10^{-r-2}) \left(W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon}\right)^{2^\varkappa}$$

und der Betrag des Produktes aus den $(\varkappa-m)$ ersten Faktoren in 37) zwischen dem Produkt, das aus der Setzung des grössten der Grundfaktoren für jeden Grundfaktor, und dem Produkt, das aus der Setzung des kleinsten Grundfaktors hervorgeht, mithin gleich dem Produkt, das durch Setzung von $\zeta_0$ für jeden Grundfaktor entsteht, wenn $\zeta_0$ eine zwischen dem grössten und kleinsten jener Grundfaktoren liegende Zahl bezeichnet, und es folgt daher aus 37):

$$\alpha_{s_\varepsilon,m} = \zeta_0^{\frac{2^{\varkappa-m}-1}{2^{\varkappa-m}}} (1 + \Theta 10^{-r-2})^{\frac{1}{2^{\varkappa-m}}} \left(W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon}\right)^{2^m}$$

Das Produkt der zwei ersten Faktoren im zweiten Theil dieser Gleichung wird nun offenbar durch Setzung von $(1 + 1{,}344 10^{-r-2})$ für $\zeta_0$ und $(1 + \Theta 10^{-r-2})$ vermehrt, hingegen durch die Substitution von $(1 - 1{,}344\, 10^{-r-2})$ gewiss vermindert, woraus folgt, dass nur die Setzung einer zwischen $(1+1{,}344.10^{-r-2})$ u. $(1-1{,}344.10^{-r-2})$ liegenden Zahl für jede der zwei Zahlen $\zeta_0$ und $(1 + \Theta 10^{-r-2})$ keine Werthänderung bewirkt, und man hat daher auch folgende Gleichung:

$$\alpha_{s_\varepsilon,m} = \left(1 + \frac{1{,}344\, \Theta_0}{10^{r+2}}\right) \left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon}\right]^{2^m}$$

wo $\Theta_0$ eine zwischen 1 und $-1$ liegende Zahl bezeichnet. Aus der Ableitung dieser Gleichung folgt offenbar ihre Richtigkeit auch für den Fall, wo für m eine zwischen m und $\varkappa$ liegende Zahl gesetzt wird.

Anmerkung. Dass die Gleichung 12) schon weit früher als in der $\varkappa^{\text{ten}}$ Quadratgleichung sämmtliche Coefficienten geben kann, welche die im Lehrsatze III. angeführten Eigenschaften besitzen, beweist die Gleichung

$$x^4 - 3x^3 + 0x^2 - 8x + 24 = 0$$

deren Wurzeln 3, 2, $2(\cos\frac{2}{3}\pi \pm i \sin\frac{2}{3}\pi)$ sind. Hier haben schon in der ersten Quadratgleichung die Coefficienten $\alpha_{1,1}$ und

$\alpha_{4,1}$ genau den Charakter, welche die Coefficienten $\alpha_{s_1,k}$, $\alpha_{s_2,k}$ . . ., besitzen; ja sogar die Coefficienten $\alpha_{1,0}$ und $\alpha_{4,0}$ haben diese Eigenschaft, so dass sich schon aus diesen die Moduli absolut genau berechnen lassen.

### Beweis zu V.

Aus der Voraussetzung unsers Lehrsatzes kann man, wie es im vorhergehenden Beweise geschah, auf die Gleichungen 36) desselben Beweises schliessen, wenn nämlich durchgehends t für $s_\varepsilon$ und die vorderhand unbestimmte Summe $m + z$ für $\varkappa$ gesetzt wird. Nehmen wir nun an, es sei

$$\alpha_{t,m} = g(W_1 W_2 \ldots W_t)^{2^m} \tag{38}$$

und bezeichnen wir mit p das Produkt $(W_1 W_2 \ldots W_t)$, so gelangen wir aus den in der angegebenen Weise veränderten Gleichungen 36) mit Beachtung der 38) sehr leicht zu folgenden Gleichungen:

$$\alpha_{t,m+1} = \frac{g^2 p^{2^{m+1}}}{\zeta_1}$$

$$\alpha_{t,m+2} = \frac{g^{2^2} p^{2^{m+2}}}{\zeta_1^2 \cdot \zeta_2}$$

$$\alpha_{t,m+3} = \frac{g^{2^3} p^{2^{m+3}}}{\zeta_1^{2^2} \zeta_2^2 \zeta_3}$$

$$\begin{array}{ccc} | & | & | \\ | & | & | \end{array}$$

$$\alpha_{t,m+z} = \frac{g^{2^z} p^{2^{m+z}}}{\zeta_1^{2^{z-1}} \zeta_2^{2^{z-2}} \cdots \zeta_{z-1}^2 \zeta_z}$$

Nun erhalten wir ein dem Divisor dieses letztern Quotienten gleiches Produkt gewiss dadurch, dass für jede der Zahlen $\zeta_1$, $\zeta_2 \ldots \zeta_z$ in diesem Produkt eine gewisse zwischen $(1 + 1{,}344\, 10^{-r-2})$ und $(1 - 1{,}344\, 10^{-r-2})$ liegende Zahl $\zeta_0$ setzen. Diese Setzung führt dann zu der Gleichung

$$\alpha_{t,m+z} = \frac{g^{2^z} p^{2^{m+z}}}{\zeta_0^{2^z-1}} = \left(\frac{g}{\zeta_0}\right)^{2^z} \zeta_0\, p^{2^{m+z}} \tag{39}$$

Aber aus der Bedeutung von $\dot{\alpha}_{t,m+z}$ folgt sehr leicht, dass

$$\dot{\alpha}_{t,m+z} = \Theta\binom{n}{t}\, p^{2^{m+z}} \qquad (\text{wo } \Theta \text{ zwischen 0 und 1}) \qquad 40)$$

Vergleichen wir nun die in 40) und 39) angegebenen Ausdrücke für $\dot{\alpha}_{t,m+z}$, so finden wir sofort, dass, wenn g die Zahl $\zeta_0$ übersteigen könnte, es immer einen Werth von z gäbe, bei welchem $\left(\frac{g}{\xi}\right)^{2^z} \zeta_0$ weit grösser als $\Theta\binom{n}{t}$ wäre, was natürlich nicht sein kann. Wir sehen also, dass, wenn g nicht innerhalb der Grenzen $(1 + 1{,}344.10^{-r-2})$ und $(1 - 1{,}344\ 10^{-r-2})$ liegt, dieses g sicher nicht über der obern Grenze, mithin unter der untern Grenze liegen muss.

Dass t bei dem im Lehrsatz vorausgesetzten Coefficienten $\dot{\alpha}_{t,m}$ einer der Zahlen $s_1, s_2 \ldots s_\nu$ gleich sein kann, ist nach dem Vorhergehenden für sich klar, dass aber t auch verschieden von jeder dieser $\nu$ Zahlen und zugleich $\dot{\alpha}_{t,m}$ dem Werthe nach zwischen $(1 + 1{,}344\ 10^{-r-2})\, p^{2^m}$ und $(1 - 1{,}344\ 10^{-r-2})\, p^{2^m}$ sein kann, zeigt folgende Gleichung:

$$x^8 - 21x^7 + 120x^6 - 100x^5 + 0.x^4 - x^3 + 21x^2 - 120x + 100 = 0 \qquad 41)$$

In dieser Gleichung, deren Wurzeln

$$10,\ 10,\ 1,\ 1,\ \cos\tfrac{2}{5}\pi \pm i \sin\tfrac{2}{5}\pi \text{ und } \cos\tfrac{4}{5}\pi \pm i \sin\tfrac{4}{5}\pi$$

sind, ist $\nu = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = n_\nu = 6$, $s_1 = 2$ und $s_2 = s_\nu = 8$, und für $r = 12$ wird $k = 4$, da

$$3 < \frac{1}{\lg 2}\left[\lg\left[14 + \lg\left(\tfrac{8}{4}\right)\right] - \lg . \lg . 10\right] < 4$$

Bildet man nun die 4^te^ Quadratgleichung zu 41), so zeigt sich, dass der 3^te^ und 7^te^ Coefficient zwischen den oben erwähnten 2 Grenzen liegt, und sämmtliche von $\dot{\alpha}_{t,m}$ vorausgesetzte Eigenschaften besitzt, jedoch 3 und 7 verschieden von $s_1$ und $s_2$ oder 2 und 8 sind. Man sieht sogar, dass jetzt $\alpha_{3,0}$, d. i. der 3^te^ Coefficient in 41) selbst alle diese Eigenschaften besitzt, und zudem nicht bloss zwischen jenen 2 Grenzen liegt, sondern genau $= (W_1\ W_2\ W_3)^{2^0}$ oder $= 10 . 10 . 1$ ist, und diese vollkommene Genauigkeit in allen Quadratgleichungen zu 41) beibehält.

Diese Gleichung 41) zeigt auch, dass es Coefficienten geben kann, die die 1[te] und 2[te] der von $\alpha_{t,m}$ vorausgesetzten Eigenschaften allein besitzen. Es ist nämlich in Beziehung auf diese Gleichung für jeden Werth von m, 0 nicht ausgenommen, $\alpha_{5,m}$ negativ und

$$(-1)^5\,\alpha_{5,m+1} \mp \alpha^2_{5,m}$$

Dass endlich $\alpha_{t,m}$ bei seinen vorausgesetzten 3 Eigenschaften dem absoluten Werthe nach unter $(1-1{,}344\,.\,10^{-r-2})\,p^{2^m}$ liegen kann, beweist der 3[te] Coefficient in der Gleichung

$$x^4 - 3x^3 + 0\,.\,x^2 - 8x + 24 = 0 \qquad 42)$$

deren Wurzeln 3, 2 und $-1 \pm i\sqrt{3}$ sind. Hier ist für jeden Werth von m, 0 nicht ausgeschlossen: $\underbrace{\alpha_{3,m}}$ $= (-1)^3$, $(-1)^3\,\alpha_{3,m+1} = \alpha^2_{3,m}$, $2\alpha_{3-u,m}\,\alpha_{3+u,m} = 0$ und $\alpha_{3,m} = (2^3)^{2^m}$ also kleiner als $(1-1{,}344.10^{-r-2})\,(W_1W_2W_3)^{2^m}$ oder $(1-1{,}344\,10^{-r-2})$ $(3\,.\,2\,.\,2)^{2^m}$.

Der vorausgesetzte Coefficient $\alpha_{t,m}$ kann übrigens nie dem absoluten Werthe nach unter $(1-1{,}344\,10^{-r-2})\,p^{2^m}$ liegen, wenn die sämmtlichen Wurzeln reell sind, was sich auf folgende Weise zeigen lässt: Es sei $n_{\varepsilon+1} > 1$ und $\beta$ zwischen $s_\varepsilon$ und $s_{\varepsilon+1}$, und jede der Wurzeln in der Gleichung 12) reell. Nun denken wir uns die sämmtlichen Complexionen, deren Summe $= \alpha_{\beta,m}$ in 2 Gruppen, von welchen die erste alle die der Complexionen $\left[W^{n_1}_{s_1}\,W^{n_2}_{s_2}\,\ldots\,W^{n_\varepsilon}_{s_\varepsilon}\,W^{\beta-s_\varepsilon}_{s_{\varepsilon+1}}\right]^{2^m}$ an Werth gleichen enthält, deren Anzahl $\doteq \binom{n_{\varepsilon+1}}{\beta-s_\varepsilon}$ und die 2[te] alle übrigen $\left[\binom{n}{\beta} - \binom{n_{\varepsilon+1}}{\beta-s_\varepsilon}\right]$ Complexionen in sich fasst. Jede dieser übrigen Complexionen wird, wenn $W_{s_a}$ der grösste der Moduli $W_{s_1}$, $W_{s_2}$, $W_{s_3}$ .... ist, der mit $W_{s_{\varepsilon+2}}$ multiplicirt ein Produkt unter $W^2_{s_{\varepsilon+1}}$ gibt, das Produkt

$$\left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \dots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon} W_{s_{\varepsilon+1}}^{\beta-s_\varepsilon} \times \frac{W_{s_\varepsilon+1}}{W_{s_\varepsilon}}\right]^{2^m}$$

wenn $a < \varepsilon + 1$, hingegen das Produkt

$$\left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \dots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon} W_{s_{\varepsilon+1}}^{\beta-s_\varepsilon} \times \frac{W_{s_{\varepsilon+2}}}{W_{s_{\varepsilon+1}}}\right]^{2^m}$$

wenn $a = \varepsilon + 1$, nicht überschreiten können. Hieraus folgt:

$$\alpha_{\beta,m} = \binom{n_{\varepsilon+1}}{\beta-s_\varepsilon}\left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \dots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon} W_{s_{\varepsilon+1}}^{\beta-s_\varepsilon}\right]^{2^m} +$$

$$\Theta\left[\binom{n}{\beta} - \binom{n_{\varepsilon+1}}{\beta-s_\varepsilon}\right]\left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \dots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon} W_{s_{\varepsilon+1}}^{\beta-s_\varepsilon} \cdot \frac{W_{s_{\varepsilon+1}}}{W_{s_\varepsilon}}\right]^{2^m}$$

wenn $a < 1 + \varepsilon$ und $\Theta$ zwischen 0 und 1, dagegen findet man:

$$\alpha_{\beta,m} = \binom{n_{\varepsilon+1}}{\beta-s_\varepsilon}\left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \dots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon} W_{s_{\varepsilon+1}}^{\beta-s_\varepsilon}\right]^{2^m} +$$

$$\Theta\left[\binom{n}{\beta} - \binom{n_{\varepsilon+1}}{\beta-s_\varepsilon}\right]\left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \dots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon} W_{s_{\varepsilon+1}}^{\beta-s_\varepsilon} \frac{W_{s_{\varepsilon+2}}}{W_{s_{\varepsilon+1}}}\right]^{2^m}$$

wenn $a = 1 + \varepsilon$ und $\Theta$ dieselbe Bedeutung hat:
Bedenkt man nun, dass bloss nach der Bedeutung von c der

Quotient $\dfrac{\binom{n}{\beta} - \binom{n_{\varepsilon+1}}{\beta-s_\varepsilon}}{\binom{n_{\varepsilon+1}}{\beta-s_\varepsilon}} < c$ und nach der Bedeutung von q

jeder der 2 Quotienten $\dfrac{W_{s_\varepsilon}}{W_{s_{\varepsilon+1}}}$ und $\dfrac{W_{s_{\varepsilon+1}}}{W_{s_{\varepsilon+2}}} \gtreqless q$, so findet man ohne Mühe, dass

$$\alpha_{\beta,m} = \binom{n_{\varepsilon+1}}{\beta-s_\varepsilon}\left[W_{s_1}^{n_1} W_{s_2}^{n_2} \dots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon} W_{s_{\varepsilon+1}}^{\beta-s_\varepsilon}\right]^{2^m}\left(1 + \frac{c\Theta}{q^{2^m}}\right) \quad 43)$$

Da nun $\Theta$ eine positive Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet, so wird aus dieser Gleichung sogleich klar, dass mit Ausnahme der Coefficienten $\alpha_{s_1,m}$, $\alpha_{s_2,m}$ .... $\alpha_{s_\nu,m}$ jeder der übrigen Coefficienten in der $m^{ten}$ Quadratgleichung zu 12), z. B. der $\beta^{te}$ nie unter das $\binom{n_{\varepsilon+1}}{\beta-s_\varepsilon}$ fache der $(2^m)^{ten}$ Potenz des Produktes

$(W_1\, W_2\, \ldots\, W_\beta)$ herabzugehen vermag, wenn nämlich die Gleichung 12) nur reelle Wurzeln hat.

Wir sehen aus dieser Gleichung zugleich, dass nicht bloss die Coefficienten $\alpha_{s_1,k}$, $\alpha_{s_2,k}$ .... $\alpha_{s_\nu,k}$ in der $k^{ten}$ Quadratgleichung eine vollkommen bestimmte Deutung zulassen, sondern auch alle übrigen Coefficienten. So findet man z. B. aus 43), da $\frac{c}{q^{2^k}} < \frac{1}{10^{r+2}}$ den $\beta^{ten}$ Coefficienten in der $k^{ten}$ Quadratgleichung, wenn $\beta$ zwischen $s_\varepsilon$ und $s_{\varepsilon+1}$, mithin $n_{\varepsilon+1} > 1$, und $\Theta$ eine unbestimmte zwischen 0 und 1 liegende Zahl bezeichnet:

$$\alpha_{\beta,k} = \binom{n_{\varepsilon+1}}{\beta - s_\varepsilon} \left[ W_{s_1}^{n_1}\, W_{s_2}^{n_2} \ldots W_{s_\varepsilon}^{n_\varepsilon} W_{s_{\varepsilon+1}}^{\beta - s_\varepsilon} \right]^{2^k} \left(1 + \frac{\Theta}{10^{r+2}}\right)$$

## §. 4. Lehrsatz.

Sind die Moduli sämmtlicher n reellen und imaginären Wurzeln der Gleichung 12) einander gleich und $= W_1$, so ist

$$W_1 = \sqrt[n]{\underset{\smile}{\alpha}_n\, \alpha_n} \; {}^{*)}$$

und die Gleichung

$$x^n + \frac{\alpha_1}{W_1} x^{n-1} + \frac{\alpha_2}{W_1^2} x^{n-2} + \ldots . \frac{\alpha_{n-1}}{W_1^{n-1}} x + \underset{\smile}{x}_n = 0$$

wo der Kürze wegen $W_1$ für $\sqrt[n]{\underset{\smile}{\alpha}_n\, \alpha_n}$ gesetzt wurde, jedenfalls eine reciproke Gleichung, deren Auflösung sich bekanntlich ganz allgemein auf die einer Gleichung, höchstens vom $\left(\frac{n}{2}\right)^{ten}$ Grade, wenn n gerade; und höchstens vom $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{ten}$ Grade, wenn n ungerade, reduciren lässt; und es können alsdann die aus diesen Reductionen entstehenden Gleichungen nur reelle Wurzeln enthalten.

*) $\underset{\smile}{\alpha}_n$ bezeichnet den Quotienten aus $\alpha_n$ durch den absoluten Werth von $\alpha_n$.

### Beweis.

Es ist bekanntlich, wenn $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ die Wurzeln der Gleichung 12) sind, $\alpha_n = (-1)^n \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n$. Sind nun m dieser n Wurzeln reell und negativ, so ist, wie man leicht findet, $\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n = (-1)^m W_1^n$, mithin $\alpha_n = (-1)^{m+n} W_1^n$, und daher $(-1)^{m+n} \alpha_n = W_1^n$. Da nun $W_1^n$ eine positive Zahl, so ist auch $(-1)^{m+n} \alpha_n$ positiv und daher gleich $\underset{\smile}{\alpha_n}\, \alpha_n$. Hieraus folgt, dass $\underset{\smile}{\alpha_n}\, \alpha_n = W_1^n$ und somit die zu beweisende Gleichung Statt findet.

Setzen wir zur Begründung der $2^{ten}$ Behauptung in die Gleichung 26) $x\sqrt[n]{\underset{\smile}{\alpha_n}\, \alpha_n}$ für x und dividiren hierauf auf beiden Seiten durch $\left[\sqrt[n]{\underset{\smile}{\alpha_n}\, \alpha_n}\right]^n$ oder $\underset{\smile}{\alpha_n}\, \alpha_n$, so erhalten wir, wenn wir der Kürze wegen $W_1$ statt $\sqrt[n]{\alpha_a\, \alpha_n}$ setzen, folgende Gleichung:

$$x^n + \frac{\alpha_1}{W_1} x^{n-1} + \frac{\alpha_2}{W_1^2} x^{n-2} + \ldots \frac{\alpha_{n-1}}{W_1^{n-1}} x + \underset{\smile}{\alpha_n} = 0 \qquad 44)$$

Ist nun der Modulus von jeder der reellen und imaginären Wurzeln $= W_1$, und sind die Zahlen, mit welchen $W_1$ multiplicirt die Wurzeln der Gleichung 12) geben: $a_1, a_2, \ldots a_n$, so sind offenbar diese letztern Zahlen zugleich die Wurzeln der Gleichung 44) und entweder gleich $+1$, oder gleich $-1$, oder conjugirte Paare von imaginären Wurzeln, deren Mudulus gleich 1 ist. Bringen wir nun, voraussetzend, dass unter den Wurzeln $a_1, a_2, \ldots a_n$ wenigstens 2 gleich 1, wenigstens 2 gleich $-1$, und überdiess imaginäre Wurzeln sich befinden, von den sämmtlichen n Differenzen $x - a_1$, $x - a_2$, $\ldots$ $x - a_n$ alle diejenigen Paare in eine Gruppe, deren Subtrahenden conjugirte imaginäre Wurzeln sind, dann alle Paare, bei welchen der Subtrahend $= 1$ ist, in eine $2^{te}$ Gruppe, ferner alle Paare, deren Subtrahend $= -1$, in eine $3^{te}$ Gruppe, so wird nach der Bildung aller dieser Gruppen entweder

1) keine Differenz mehr übrig bleiben, oder
2) die Differenz $x - 1$, oder
3) die Differenz $x - (-1)$ übrig sein, oder es bleiben
4) noch die zwei Differenzen $x - 1$ und $x - (-1)$ uneingetheilt übrig.

Bildet man nun in jeder der drei Gruppen das Produkt aus den beiden Differenzen von jedem Paar, so erhält man in jeder dieser Gruppen quadratische Faktoren von der Form $x^2 + bx + 1$; multiplicirt man hierauf alle quadratischen Faktoren in diesen drei Gruppen successive miteinander, so wird man bei jeder dieser Multiplikationen ein Polynom von der Form

$$x^{2m} + b_1 x^{2m-1} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot b_1 x^2 + 1 \qquad 45)$$

bei dem die Coefficienten an den Enden und gleich weit von den Enden mit einem quadratischen Faktor von der Form $x^2 + bx + 1$ zu multipliziren haben, wodurch man wieder ein Produkt von derselben Form und mit derselben Eigenschaft der Coefficienten erhält. Tritt also der erste der erwähnten vier Fälle ein, so wird das Produkt sämmtlicher n Differenzen ein Polynom von der Form 45) sein.

Im zweiten Falle aber wird man zur Bildung des Produktes aller n Differenzen zuletzt ein Polynom von der Form 45) und mit derselben Eigenschaft der Coefficienten mit $x - 1$ multipliciren, wodurch man ein Polynom von folgender Form erhält:

$$x^{2m+1} + c_1 x^{2m} + c_2 x^{2m-1} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot - c_2 x^2 - c_1 x - 1. \qquad 46)$$

wo die Coefficienten an den Enden und gleich weit von den Enden dem absoluten Werthe nach einander gleich, aber entgegengesetzt sind.

Im dritten Falle ist zur Herstellung des Produktes aller n Differenzen zuletzt ein Polynom von der Form 45) mit $x + 1$ zu multipliciren. Das Ergebniss dieser Multiplication ist ein Polynom von folgender Form

$$x^{2m+1} + c_1 x^{2m} + c_2 x^{2m-1} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot c_2 x^2 + c_1 x + 1 \qquad 47)$$

wo wieder die Coefficienten an den Enden und gleichweit von den Enden absolut gleich sind.

Im vierten Falle hat man, um das Produkt aller n Differenzen zu erhalten, schliesslich ein Polynom von der Form 45) mit $x^2 - 1$ zu multipliciren, wodurch man ein Polynom der Form

$$x^{2m+2} + p_1 x^{2m+1} + p_2 x^{2m} + \ldots 0.x^{m+1} + \ldots - p_2 x^2 - p_1 x - 1 \quad 48)$$

erhält, wo die Coefficienten an den Enden und gleichweit von den Enden dem absoluten Werthe nach gleich, aber einander entgegengesetzt sind und der mittlere Coefficient jedenfalls $= 0$ ist.

Der vorstehende Beweis ist offenbar auch dann noch zulässig, wenn von den drei im Eingange erwähnten Gruppen eine oder zwei keine Differenzen enthielte. Würden aber für keine dieser drei Gruppen Paare von Differenzen vorhanden sein, dann wäre die Behauptung des Lehrsatzes für sich klar.

Bedenken wir endlich, dass das Produkt aller dieser Differenzen mit dem ersten Theil von 44) congruiren muss, so wird nach dem Gesagten die Gleichung 44) eine reciproke sein, die im ersten der angeführten Fälle sich auf eine Gleichung vom $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Grade, im zweiten und dritten auf eine vom $\frac{n-1}{2}^{\text{ten}}$ Grade, im vierten Falle auf eine Gleichung vom $\frac{n-2}{2}^{\text{ten}}$ Grade reduciren lässt, und jede aus dieser Reduction entspringende Gleichung wird dann, da die Summe aus einer Complexen mit dem Modulus 1 und ihrem reciproken Werth reell ist, gewiss nur reelle Wurzeln enthalten können.

## §. 5.

Kennt man von einer gegebenen Gleichung 12), für welche man die Moduli der Wurzeln bis zu irgend einem Gliede, z. B. bis zum $(r+1)^{\text{ten}}$ Gliede herab bestimmen will, die Grenze q, unter welcher kein Quotient aus einem der Moduli durch den nächst kleinern liegt; kennt man ferner die Anzahl ($\nu$) der verschiedenen Moduli und überdiess die Zahlen $n_1, n_2 \ldots\ldots n_\nu$, welche beziehungsweise ausdrücken, wie viel mal jedes Glied in der Reihe der $\nu$ verschiedenen Moduli als Modulus bei den sämmtlichen Wurzeln der Gleichung 12) erscheint, so wird man zur Herstellung der verlangten Näherungswerthe der $\nu$ verschiedenen Moduli, wenn $\nu > 1$, aus den Zahlen q, r und n vorerst die positive ganze Zahl k berechnen, die an $\frac{1}{\lg 2}[\lg(r+2+\lg c)-\lg(\lg q)]$ zunächst liegt, aber nicht kleiner ist als dieser Ausdruck, hierauf nach §. 2 die erste der gegebenen Gleichung 12) zugehörige Quadratgleichung bilden, dann zu der so erhaltenen Gleichung wieder die erste Quadratgleichung, also die zweite Quadratgleichung zu 12), und so fortfahren, bis man endlich zur $k^{ten}$ Quadratgleichung zu 12) gelangt ist; alsdann ergeben sich aus dem $n_1^{ten}$, $(n_1+n_2)^{ten}$, $(n_1+n_2+n_3)^{ten} \cdot \cdot \cdot \cdot n^{ten}$ Coefficienten dieser $k^{ten}$ Quadratgleichung die verlangten Näherungswerthe sämmtlicher $\nu$ Moduli durch Anwendung der Gleichungen 15). Ist aber $\nu = 1$, dann ist die Herstellung von Quadratgleichungen erfolglos, und jeder der n Moduli zu den Wurzeln der Gleichung 12) nach §. 4 absolut genau gleich der $n^{ten}$ Wurzel aus dem absoluten Werth von $\alpha_n$.

Wenn man also die Zahlen q, $\nu$ und $n_1, n_2 \ldots n_\nu$ für die Gleichuug 12) kennt, so hat man eine vollkommen bestimmte von vergeblichen Versuchen völlig freie Auflösung der Aufgabe, die Moduli sämmtlicher Wurzeln der vorgelegten Gleichung 12) mit jedem ganz beliebigen Grade der Genauigkeit zu berechnen, wobei jedoch in allen den Fällen, wo q nahe an 1 liegt, sehr ermüdende und bedeutenden Zeitaufwand fordernde Rechnungen auszuführen sind; so dass für diese Fälle ein einfacheres Verfahren sehr wünschenswerth erscheint. Wir werden später bei der Discussion der Frage, wie sich aus irgend einem Näherungswerth einer Wurzel ein genauerer ermitteln lassen, auf diese Fälle zurückkommen.

Kennt man aber keine der Zahlen q, $\nu$, $n_1$, $n_2 \ldots n_\nu$, dann ist die Berechnung der Moduli nicht immer in demselben Masse bestimmt, wie wenn alle die erwähnten Zahlen oder einige derselben bekannt sind. In diesem Falle, wo man von den Wurzeln der Gleichung 12) nichts weiss, wird man die Ermittlung der Moduli von den Wurzeln dieser Gleichung mit der

Untersuchung beginnen, ob nicht etwa sämmtliche Moduli einander gleich seien, in welchem Falle ja die Quadrirung der Wurzeln ganz nutzlos wäre. Zu diesem Zwecke setzen wir $x\sqrt[n]{\alpha_n \alpha_n}$ für x in die Gleichung 26) und dividiren hernach auf beiden Seiten die aus dieser Setzung hervorgegangene Gleichung durch $\alpha_n \alpha_n$. Ist alsdann die so erhaltene Gleichung keine reciproke, so sind vermöge des Lehrsatzes in §. 4 die Moduli der Wurzeln von 11) sicher ungleich; ist sie aber reciprok, so lässt sich zwar keineswegs hieraus auf die Gleichheit aller Moduli mit Sicherheit schliessen, hingegen hat man dann den bedeutenden Vortheil erlangt, die reciproke Gleichung und mithin auch die Gleichung 12) auf einen höchstens halb so hohen Grad herabsetzen zu können. Auf die aus dieser Reduktion entsprechende Gleichung kann dann diese Untersuchung in gleicher Weise Statt finden u. s. f. Zuletzt wird man entweder zu einer nicht reciproken Gleichung gelangen, bei der dann die Moduli der Wurzeln nothwendig ungleich sein müssen, und deren Auflösung auch die der ursprünglich vorgelegten Gleichung 12) möglich macht, oder zuletzt eine Gleichung vom 2ten Grade erhalten, in welchem Falle sich dann sämmtliche Wurzeln der Gleichung 12) ohne Schwierigkeit bestimmen lassen. Will man z. B. die Moduli der Wurzeln von der Gleichung

$$x^8 - 35x^7 + 408x^6 - 2205x^5 + 8478x^4 - 19845x^3 + 33048x^2 - 25515x + 6561 = 0 \qquad 49)$$

bestimmen, so setze man vorerst $x_1\sqrt[8]{6561}$ oder $3x_1$ für x, dadurch erhält man:

$$x_1^8 - \frac{35}{3}x_1^7 + \frac{136}{3}x_1^6 - \frac{245}{3}x_1^5 + \frac{314}{3}x_1^4 - \frac{245}{3}x_1^3 + \frac{136}{3}x_1^2 - \frac{35}{3}x_1 + 1 = 0 \qquad 50)$$

Dividirt man nun auf beiden Seiten durch $x_1^4$, was, da $x_1$ offenbar nicht 0 sein kann, geschehen darf, und zieht die Glieder mit gleichhohen Potenzen von $x_1$ und $\frac{1}{x_1}$ zusammen, setzt hierauf $x_1 + \frac{1}{x_1} = y$, mithin $x_1^4 + x_1^{-4} = y^4 - 4y^2 + 2$, $x_1^3 + x_1^{-3} = y^3 - 3y$, $x_1^2 + x_1^{-2} = y^2 - 2$; so gelangt man zu folgender Gleichung:

$$y^4 - \frac{35}{3}y^3 + \frac{124}{3}y^2 - \frac{140}{3}y + 16 = 0 \qquad 51)$$

Setzt man nun, um wieder zu untersuchen, ob die Moduli der Wurzeln dieser letztern Gleichung einander gleich sind, $y_1\sqrt[n]{16}$ oder $2y_1$ für $y$, so erhält man:

$$y_1^4 - \frac{35}{6}y_1^3 + \frac{31}{3}y_1^2 - \frac{35}{6}y_1 + 1 = 0 \qquad 52)$$

und aus dieser letztern Gleichung findet man ganz ähnlich, wie vorhin, wenn $y_1 + \frac{1}{y_1} = z$ gesetzt wird

$$z^2 - \frac{35}{6}z + \frac{25}{3} = 0$$

Diese Gleichung hat nun die Zahlen $3\frac{1}{3}$ und $2\frac{1}{2}$ zu Wurzeln, mithin sind $3$, $\frac{1}{3}$, $2$, $\frac{1}{2}$ die Wurzeln von 52), und $6$, $\frac{2}{3}$, $4$, $1$ die Wurzeln von 51). Setzt man nun in die Gleichung $x_1 + \frac{1}{x_1} = y$ zuerst 6, dann $\frac{2}{3}$, 4 und 1, so ergibt sich, dass $3 \pm \sqrt{8}$, $\frac{1 \pm 2i\sqrt{2}}{3}$, $2 \pm \sqrt{3}$ und $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ die Wurzeln von 50), und die Ergebnisse der Multiplicationen dieser 4 Zahlen mit 3 die Wurzeln von 49) sind.

Ein 2tes Beispiel entnehmen wir dem Berl. astr. Jahrb. v. 1841, pag. 336, welches eine ausführliche Untersuchung der Græffe'schen Methode enthält, nämlich:

$$x^4 + 4{,}002x^3 + 14{,}0180x^2 + 20{,}03802x + 25{,}07005 = 0 \qquad 53)$$

Setzen wir in dieser $x = y\sqrt[4]{25{,}07005}$, und dividiren hierauf durch 25,07005, so finden wir

$$y^4 + 1{,}78849728105\,y^3 + 2{,}7996823886\,y^2 + 1{,}7884977809\,y + 1 = 0 \qquad 54)$$

Diese letztere Gleichung zeigt sogleich, dass nicht alle Moduli der Wurzeln von 53) genau gleich gross sind. Da aber diese

Gleichung sehr nahezu eine reciproke ist und eine geringe Verschiedenheit unter den erwähnten Moduln vermuthen lässt, so würde vorläufig wenigstens das Quadriren der Wurzeln nicht rathsam sein, und wir ziehen es daher vor, die Gleichung 54) als eine reciproke zu behandeln, zu deren Wurzeln die Wurzeln der Gleichung

$$y^4 + 1{,}7884975y^3 + 2{,}7996823886y^2 + 1{,}7884975y + 1 = 0 \qquad 55)$$

ziemlich genaue Näherungswerthe sind. Aus dieser Gleichung schliessen wir genau so, wie aus 50) auf 51), auf folgende Gleichung:

$$z^2 + 1{,}7884975\,z + 0{,}7996823886 = 0 \qquad 56)$$

wo $z = y + \frac{1}{y}$. Durch Auflösung der Gleichung 56) finden wir

$$z = -0{,}89424875 \pm i\sqrt{0{,}0000015620}$$
$$z = -0{,}89424875 \pm 0{,}00124972\,i$$

Da nun $z = y + \frac{1}{y}$ und z zweiwerthig ist, so hat y 4 Werthe, von welchen 2 die reciproken Werthe der übrigen sind; und 2 solche Werthe finden wir durch Auflösung der Gleichung

$$y^2 + (0{,}89424875 + 0{,}00124972i)\,y + 1 = 0.$$

Diese Gleichung gibt:

$$y = -0{,}447124375 + 0{,}0006249i \pm \sqrt{6{,}447124375 + 0{,}0012498i)^2 - 1}$$
$$= -0{,}447124375 + 0{,}0006249i \pm \sqrt{-0{,}8000813551 + 0{,}000558316043i}$$
$$= -0{,}447124375 + 0{,}0006249i \pm (0{,}00031225 + 0{,}8944727232i)$$
$$y = -0{,}447436625 + 0{,}8950976\,i$$
$$= -0{,}446812125 - 0{,}8938478\,i$$

Multipliciren wir diese 2 zu einander reciproken Werthe von y mit $\sqrt[4]{25{,}07005} = 2{,}2376327$, so erhalten wir: $-1{,}001198822 + 2{,}0028994\,i$ und $-0{,}999801421 - 2{,}0001030\,i$, und diese 2 Complexen sind mit ihren conjugirten Werthen als Näheruugswerthe von den Wurzeln der Gleichung 53) zu betrachten, deren genaue Werthe nach dem Berl. astr. Jahrb. f. 1841, pag. 338 die Complexen $-1{,}001 \pm 2{,}003i$ und $-1{,}000 \pm 2{,}000i$ sind. Wie diese Näherungswerthe zur Herstellung von genauern Werthen benutzt werden können, werden wir in der Folge zu zeigen Gelegenheit haben.

(Fortsetzung folgt.)