V. Zur Theorie der Maxima und Minima.

In den Elementen der Differentialrechnung wird folgender Satz bewiesen:

„Sind innerhalb eines gewissen Werthengebietes der unabhängigen Variabeln x, y, z, .. die partiellen Derivirten erster Ordnung

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \ldots$$

einer Function u dieser Variabeln überall endlich und stetig, so kann ein Maximum oder Minimum von u nur da eintreten, wo diese Derivirten sämmtlich verschwinden.“

Hat nämlich z. B. $\frac{du}{dx}$ einen von Null verschiedenen Werth, so erleidet u, wenn man der Variabeln x zwei beliebig kleine Aenderungen von entgegengesetzten Vorzeichen giebt, ebenfalls Aenderungen von entgegengesetzten Vorzeichen, so dass der entsprechende Werth von u weder ein Maximum noch ein Minimum sein kann.

Man bedient sich dieses Satzes, um die Stellen x, y, z, ... aufzusuchen, wo die Function eiu Maximum oder Minimum wird; aber dies kann auch an solchen Stellen eintreten, wo die partiellen Derivirten unstetig werden, und zwar bietet sich dieser Fall häufig in ganz einfachen Aufgaben dar, wofür das folgende Beispiel einen Beleg geben mag, bei welchem diese Erscheinung bis jetzt unbeachtet geblieben ist.

Aufgabe: Es sind drei Puncte m_1, m_2, m_3 gegeben; es soll ein vierter Punct m gefunden werden, für welchen die Summe der absoluten Distanzen mm_1, mm_2, mm_3 so klein wie möglich ausfällt.

Auflösung. Man nehme willkürlich im Raume ein rechtwinkliges Coordinatensystem, nenne x, y, z die Coordinaten des gesuchten Punctes m, und r_1, r_2, r_3 die absoluten Werthe seiner Distanzen von den drei gegebenen Puncten m_1, m_2, m_3; so dass

$$u = r_1 + r_2 + r_3$$

die Function von x, y, z ist, deren Minnimumwerth bestimmt werden soll. Verfährt man nun nach der gewöhnlichen Regel, so hat man

$$\frac{dr_1}{dx} + \frac{dr_2}{dx} + \frac{dr_3}{dx} = 0, \qquad \frac{dr_1}{dy} + \frac{dr_2}{dy} + \frac{dr_3}{dy} = 0,$$
$$\frac{dr_1}{dz} + \frac{dr_2}{dz} + \frac{dr_3}{dz} = 0$$

zu setzen. Da man aber die Axen mit jeder beliebigen Richtung h zusammenfallen lassen kann, so lassen sich diese drei Gleichungen in die einzige

$$\cos(p_1h) + \cos(p_2h) + \cos(p_3h) = 0$$

zusammenfassen, in welcher p_1, p_2, p_3 die vom Punct m nach m_1, m_2, m_3 laufenden Richtungen, und (p_1h), (p_2h), (p_3h) die Winkel bedeuten, welche dieselben mit der willkürlichen Richtung h einschliessen.

Nimmt man h senkrecht auf p_2 und p_3, so folgt, dass h auch senkrecht auf p_1 ist, dass also die drei Richtungen p_1, p_2, p_3 und folglich auch die vier Puncte m, m_1, m_2, m_3 in einer Ebene liegen, was sich ohnehin erwarten liess.

Lässt man ferner h successive mit p_1, p_2, p_3 zusammenfallen, so erhält man

$$1 + \cos(p_2p_1) + \cos(p_3p_1) = 0,$$
$$\cos(p_1p_2) + 1 + \cos(p_3p_2) = 0,$$
$$\cos(p_1p_3) + \cos(p_2p_3) + 1 = 0,$$

woraus

$$\cos(p_2p_3) = \cos(p_3p_1) = \cos(p_1p_2) = -\frac{1}{2}$$

$$(p_2p_3) = (p_3p_1) = (p_1p_2) = 120^\circ$$

folgt.

Man erhält daher die bekannte Antwort, dass der Punct m in der Ebene der drei Puncte m_1, m_2, m_3 so zu construiren ist, dass je zwei der drei Richtungen mm_1, mm_2, mm_3 einen Winkel von 120° mit einander bilden. Diese Construction ist auch stets möglich, und liefert einen vollständig bestimmten Punct m, sobald keiner der drei Winkel des Dreiecks $m_1m_2m_3$ grösser ist als 120°.

Ist aber einer der drei Winkel des Dreiecks $m_1m_2m_3$ grösser als 120°, so wird diese Construction unausführbar; es giebt dann keinen Punct m von der Beschaffenheit, dass je zwei der drei Richtungen mm_1, mm_2, mm_3 einen Winkel von 120° bilden; es giebt also keinen Punct m, für welchen die partiellen Derivirten der Function u gleichzeitig verschwinden. Andererseits leuchtet aber aus dem Begriff der Function u, welche stets positiv ist und für unendlich entfernte Puncte unendlich wächst, unmittelbar ein, dass sie irgendwo in endlicher Entfernung doch einen Minimumwerth haben muss. Wir müssen daraus schliessen, dass dieser Minimumwerth an einer solchen Stelle eintritt, wo die partiellen Derivirten von u unstetig werden. Da nun die Derivirten der absoluten Distanz eines beliebigen Punctes von einem festen Puncte nur in diesem letztern selbst unstetig werden, und u eine Summe von drei solchen absoluten Distanzen ist, so werden die Derivirten nur in den drei gegebenen Puncten m_1, m_2, m_3 unstetig; es muss daher der gesuchte Punct m mit einem dieser drei Puncte zusammenfallen. Da endlich für den Fall, dass der Dreieckswinkel bei m_1 um unendlich wenig kleiner als 120° ist, die frühere Construction den gesuchten Punkt m unendlich nahe bei m_1 liefert, und auch, wenn dieser Winkel = 180° ist, der gesuchte Punct offenbar mit m_1 zusammenfällt, so wird es daher so gut wie gewiss, dass auch für alle Werthe des Winkels zwischen 120° und 180° die Spitze desselben der gesuchte Punct ist.

Dies bestätigt sich analytisch, wenn man die unendlich kleine Aenderung der Function u untersucht für den Fall, dass der variable Punct m sich unendlich wenig von dem Puncte m_1 entfernt. Zieht man nämlich vom Punct m_1 aus eine beliebige Richtung h, welche mit m_1m_2 und m_1m_3 die Winkel α und β einschliesst, so ist die in dieser Richtung h genommene Derivirte der Function u gleich

$$1 - \cos\alpha - \cos\beta = 1 - 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

bezeichnet man ferner mit Θ den Winkel zwischen den Richtungen m_1m_2 und m_1m_3, von dem wir annehmen, dass er zwischen 120° und 180° liegt, so folgt aus den bekannten Eigenschaften

$$\alpha+\beta+\Theta \leqq 360^\circ, \quad \alpha+\beta \geqq \Theta,$$

der drei Winkel zwischen drei Richtungen, dass

$$120^\circ \geqq \frac{\alpha+\beta}{2} \geqq 60^\circ,$$

also

$$-\frac{1}{2} \leqq \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \leqq +\frac{1}{2},$$

dass also der absolute Werth von $2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ein echter Bruch ist. Mithin ist die obige Derivirte stets positiv, und folglich **wächst** u von dem Puncte m_1 aus nach allen Richtungen hin, was zu beweisen war.

Da der absolute Werth der Differenz $\alpha - \beta \leqq \Theta$, also $cos\, \frac{\alpha - \beta}{2}$ positiv ist, so kann die obige Derivirte nur dann den Werth Null haben, wenn

$$cos\, \frac{\alpha - \beta}{2} = 1\,; \quad cos\, \frac{\alpha + \beta}{2} = +\frac{1}{2}$$

ist, d. h. wenn

$$\alpha = \beta = 60^\circ \text{ und folglich auch } \Theta = 120^\circ,$$

also h die Halbirungsrichtung zwischen $m_1 m_2$ und $m_1 m_3$ ist. Aber in diesem Fall überzeugt man sich leicht, dass die zweite in derselben Richtung genommene Derivirte einen **positiven** Werth hat.

Notizen.

Ueber die Witterung in Zürich in den Jahren 1856 bis 1859. Da mir nach meiner Uebersiedlung nach Zürich die nöthigen Localien fehlten, um meteorologische Instrumente zweckmässig placiren zu können, so veranlasste ich, um bis zur Herstellung einer neuen Sternwarte wenigstens nicht ganz unthätig für Meteorologie zu sein, meine Schwester ein regelmässiges Protokoll über die Witterung auf folgende Weise zu führen: Jeder Tag erhielt eine der Nummern 1, 2, 3, 4, und zwar

1 wenn er ganz schön war;

2 wenn der Himmel zum Theil oder ganz bewölkt war, aber doch kein Niederschlag erfolgte;