den Pyrit auf den Gedanken geführt wurde, dass die ursprünglichen Krystalle Pyrrhotin gewesen seien, ist eine naheliegende Vermuthung, wenn auch die Grösse der Krystalle auffallend erschien, sobald man jedoch die körnige Beschaffenheit des Innern berücksichtigt, die zahlreichen Lücken, welche der Gestalt der kleinen Pyritkryställchen erkennen lassen und den beigemengten Galenit, so scheint mir der geschilderte Vorgang der wahrscheinlichere, zumal zur Umwandlung des Pyrrhotin in Pyrit nicht allein die Aufnahme von doppelt so viel Schwefel, sondern auch der Abgang von viel Eisen nothwendig ist.

Mathematische Mittheilungen

von

Dr. Richard Dedekind.

III. Ueber die Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

In den meisten Lehrbüchern findet man die Sätze über die sogenannten zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten in folgender Weise aufgestellt: „Ist a die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A, b die eines zweiten B, so ist $a + b$ die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B, und ab die Wahrscheinlichkeit, dass A und B eintritt. Man überzeugt sich aber leicht, dass von diesen beiden Sätzen immer höchstens einer richtig sein kann, und dass auch in unzähligen Fällen beide falsch sind. Dies findet seinen Grund darin, den Pyrit auf den Gedanken geführt wurde, dass die ursprünglichen Krystalle Pyrrhotin gewesen seien, ist eine naheliegende Vermuthung, wenn auch die Grösse der Krystalle auffallend erschien, sobald man jedoch die körnige Beschaffenheit des Innern berücksichtigt, die zahlreichen Lücken, welche der Gestalt der kleinen Pyritkryställchen erkennen lassen und den beigemengten Galenit, so scheint mir der geschilderte Vorgang der wahrscheinlichere, zumal zur Umwandlung des Pyrrhotin in Pyrit nicht allein die Aufnahme von doppelt so viel Schwefel, sondern auch der Abgang von viel Eisen nothwendig ist.

Mathematische Mittheilungen

von

Dr. Richard Dedekind.

III. Ueber die Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

In den meisten Lehrbüchern findet man die Sätze über die sogenannten zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten in folgender Weise aufgestellt: „Ist a die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A, b die eines zweiten B, so ist $a + b$ die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B, und ab die Wahrscheinlichkeit, dass A und B eintritt. Man überzeugt sich aber leicht, dass von diesen beiden Sätzen immer höchstens einer richtig sein kann, und dass auch in unzähligen Fällen beide falsch sind. Dies findet seinen Grund darin, dass die Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses durchaus nicht allein von den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse, sondern ausserdem noch von der gegenseitigen Beziehung derselben zu einander abhängt. Die so häufig vorkommende Vernachlässigung dieses Umstandes mag die nachfolgende Darstellung eines so elementaren Gegenstandes entschuldigen, auf welche in einer spätern Mittheilung Bezug genommen wird.

1.

Bei der ursprünglichen Begriffsbestimmung der mathematischen Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A muss man immer von der Voraussetzung ausgehen, dass sich gewisse Elementarfälle aufzählen lassen, welche die doppelte Bedingung erfüllen, erstens, dass einer, aber auch nur einer von ihnen eintreten muss; zweitens, dass wir keinen Grund haben, das Eintreten eines dieser Fälle eher zu erwarten als das eines andern. Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, und ist p die Anzahl derjenigen dieser Fälle, in welchen A eintritt, q die Anzahl der übrigen, so ist der Bruch $\frac{p}{p+q}$ das Mass für die Wahrscheinlichkeit, mit welcher wir das Eintreten des Ereignisses A erwarten. Ist dagegen eine der beiden Bedingungen nicht zu erfüllen, so bleibt eine genaue Schätzung der Wahrscheinlichkeit von A unmöglich.

Handelt es sich nun um Eintreten oder Nichteintreten von zwei Ereignissen A und B (deren Identität nicht ausgeschlossen ist), so denken wir uns die sämmtlichen Elementarfälle in vier Gruppen zerlegt; es sei nämlich die Anzahl aller Elementarfälle, in welchen

1) A und B eintritt, gleich m,
2) A allein eintritt, gleich p,
3) B allein eintritt, gleich q,
4) weder A noch B eintritt, gleich n.

Jeder Elementarfall gehört jedenfalls einer, aber auch nur einer dieser vier Gruppen an, so dass $m + p + q + n$ die Anzahl aller Elementarfälle ist. Zufolge der vorhergehenden Definition ist dann

$$a = \frac{m + p}{m + p + q + n} \text{ die Wahrscheinlichkeit von } A;$$
$$b = \frac{m + q}{m + p + q + n} \text{ die Wahrscheinlichkeit von } B.$$

Man sieht nun, dass die Wahrscheinlichkeit eines von dem Eintreten oder Nichteintreten von A und B abhängigen Ereignisses im Allgemeinen von den drei Verhältnissen zwischen den vier Zahlen m, p, q, n abhängt, also durch alleinige Angabe der zwei Zahlen a, b noch nicht vollständig bestimmt ist. Es muss daher noch eine dritte Zahl, ein Element gegeben sein, welches dazu dient, die Art des Zusammenhanges zwischen den beiden Ereignissen A und B zu charakterisiren. Im Allgemeinen wird nämlich das Eintreten eines dieser beiden Ereignisse die Wahrscheinlichkeit des andern abändern. Tritt z. B. das Ereigniss B ein, so ist die Wahrscheinlichkeit von A — da dann die Fälle der zweiten und vierten Gruppe ausgeschlossen sind — jetzt

$$\alpha = \frac{m}{m + q};$$

und ähnlich ist die, durch die Gewissheit von A modificirte Wahrscheinlichkeit von B

$$\beta = \frac{m}{m + p}.$$

Ist nun ausser a und b noch eine der beiden modificirten Wahrscheinlichkeiten α, β gegeben, so lässt sich die Wahrscheinlichkeit eines jeden aus A und B zusammengesetzten Ereignisses bestimmen. Zunächst muss zwischen den vier Zahlen a, b, α, β, welche nur von den Verhältnissen zwischen m, p, q, n abhängen, eine Relation bestehen; eliminirt man m, p, q, n, so erhält man

1) $$a\beta = b\alpha$$

und zwar ist der gemeinschaftliche Werth dieser beiden Producte gleich

$$\frac{m}{m+p+q+n} = \omega;$$

also gleich der Wahrscheinlichkeit, dass A und B eintreten. Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, dass A allein eintritt, gleich

2) $$\frac{p}{m+p+q+n} = a - b\alpha = a(1-\beta) = a - \omega;$$

ebenso ist

3) $$\frac{q}{m+p+q+n} = b(1-\alpha) = b - a\beta = b - \omega\ ,$$

die Wahrscheinlichkeit, dass B allein eintritt; und

4) $$\frac{n}{m+p+q+n} = 1-a-b+b\alpha = 1-a-b+a\beta = 1-a-b+\omega$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass weder A noch B eintritt.

Ferner ist:

5) $$\frac{m+n}{m+p+q+n} = 1-a-b+2\omega$$

die Wahrscheinlichkeit, dass keines der beiden Ereignisse A, B allein eintritt;

6) $$\frac{m+p+q}{m+p+q+n} = a+b-b\alpha = a+b-a\beta = a+b-\omega$$

die, dass **mindestens eins** der beiden Ereignisse eintritt;

$$7)\quad \frac{p+q+n}{m+p+q+n} = 1 - b\alpha = 1 - a\beta = 1 - \omega$$

die, dass **höchstens eins** der beiden Ereignisse eintritt;

$$8)\quad \frac{m+q+n}{m+p+q+n} = 1 - a + b\alpha = 1 - a(1-\beta) = 1 - a + \omega$$

die, dass A **nicht allein** eintritt; und endlich ist

$$9)\quad \frac{m+p+n}{m+p+q+n} = 1 - b(1-\alpha) = 1 - b + a\beta = 1 - b + \omega$$

die Wahrscheinlichkeit, dass B **nicht allein** eintritt.

Um die Bedeutung von α, β noch anschaulicher zu machen, mögen hier noch folgende Bemerkungen Platz finden. Man sagt, zwei Ereignisse A und B schliessen einander aus, wenn das Eintreten des einen das des andern unmöglich macht; der arithmetische Ausdruck dafür ist

$$\alpha = o,\ \beta = o,\ \omega = o;$$

(vorausgesetzt, dass a und b nicht selbst $= o$ sind); dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eins der beiden Ereignisse eintritt, d. h. dass wirklich eins eintritt,

$$= a + b.$$

Man sagt ferner, zwei Ereignisse sind von einander unabhängig, wenn das Eintreten des einen durchaus keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit des andern ausübt, d. h. wenn

$$\alpha = a,\ \beta = b,\ \omega = ab$$

ist; in diesem Falle ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eins der beiden Ereigniss eintritt,

$$= a + b - ab.$$

Und umgekehrt sieht man, dass der erste der beiden zu Anfang erwähnten Sätze nur dann richtig ist, wenn die beiden Ereignisse einander ausschliessen, und der zweite nur dann, wenn sie von einander unabhängig sind; und nur dann sind beide Sätze zu gleicher Zeit richtig, wenn mindestens eins der beiden Ereignisse unmöglich ist.

Ist ferner $\alpha = 1$, so zieht das Eintreten von B das von A als nothwendige Folge nach sich, und dann ist $b = a\beta \lesseqgtr a$. Ist ausserdem $\beta = 1$, so ist $a = b$, und die beiden Ereignisse sind gewissermassen identisch; aber es ist wohl zu bemerken, dass nicht umgekehrt aus $a = b$ diese Identität der Ereignisse folgt.

2.

Es hat nun keine Schwierigkeit, diese Sätze auf Combinationen von mehr als zwei Ereignissen auszudehnen; sind z. B. $W_1, W_2, \ldots W_n$ Ereignisse, von denen je zwei einander auschliessen, und sind w_1, $w_2, \ldots w_n$ ihre Wahrscheinlichkeiten, so ist die Summe

$$w_1 + w_2 + \cdot \cdot + w_n$$

die Wahrscheinlichkeit, dass eins dieser Ereignisse eintritt, wovon man sich leicht durch den Schluss von n auf $(n + 1)$ überzeugt.

Man kann sich dieses Satzes häufig bedienen, um die Wahrscheinlichkeit a eines Ereignisses A zu bestimmen, ohne auf die Aufzählung der einzelnen gleich möglichen Elementarfälle zurückzugehen. Gesetzt, man habe verschiedene einander ausschliessende Eventualitäten $B_1, B_2, \ldots B_n$, in welchen das Ereigniss A eintreten kann, in so erschöpfender Weise aufgestellt, dass das Eintreten von A unter keiner andern Eventualität möglich ist. Es sei b die Wahrscheinlichkeit, dass die Eventualität B_r eintritt, und α_r sei die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn B_r eintritt, auch A eintritt. Dann ist

$$a = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdot \cdot + b_n\alpha_n ;$$

denn irgend ein Glied $b_r\alpha_r = w_r$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses W_r, dass gleichzeitig B_r und A eintritt, und das Ereigniss A ist identisch mit demjenigen, dass von diesen n einander ausschliessenden Ereignissen $W_1 \ldots W_n$ irgend eins eintritt.

Umgekehrt kann man nun auch, wenn das Ereigniss A wirklich eingetreten ist, die Wahrscheinlichkeit a posteriori bestimmen, dass dies in Folge der Eventualität B_r geschehen ist; denn diese Wahrscheinlichkeit β_r ist nichts Anderes, als die durch die Gewissheit von A modificirte Wahrscheinlichkeit von B_r, so dass

$$a\beta_r = b_r\alpha_r, \text{ also } \beta_r = \frac{b_r\alpha_r}{b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdot \cdot + b_n\alpha_n},$$

und die hieraus sich ergebende Gleichung

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdot \cdot + \beta_n = 1$$

ist nur ein Ausdruck für unsere ursprüngliche Annahme, dass das Eintreten von A nur unter einer der Eventualitäten B_1, B_2, . . B_n und auch unter keiner andern möglich ist. Von diesem Satze über die Wahrscheinlichkeit a posteriori wird in einer folgenden Mittheilung Gebrauch gemacht werden.

Ein Beispiel, welches zugleich zu einer weitern Bemerkung Veranlassung geben wird, mag das Bisherige erläutern. Es seien 16 Urnen in quadratischer Anordnung aufgestellt, so dass sie 4 Verticalreihen ($x = 1, 2, 3, 4$) und 4 Horizontalreihen ($y = 1, 2, 3, 4$) von je 4 Urnen bilden; die einzelnen Urnen können dann durch Angabe der Verticalreihe x und der Horizontalreihe y, in denen sie sich finden, von einander unterschieden werden. In jeder Urne seien 10 Kugeln enthalten, von denen so viele weiss sind,

	1	2	3	4	x
1	(10)	(8)	(1)	(1)	
2	(8)	(8)	(6)	(6)	
3	(1)	(6)	(2)	(1)	
4	(1)	(6)	(1)	(2)	
y					

wie die in Klammern gesetzte Zahl angiebt (also enthält z. B. die Urne ($x = 1$, $y = 1$) nur weisse Kugeln, die Urne ($x = 4$, $y = 3$) enthält eine weisse und neun schwarze Kugeln). Wir nehmen an, dass der Zug ebensowohl aus der einen wie aus jeder andern Urne geschehen kann; dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine weisse Kugel gezogen wird

$$a = \Sigma b_{x,\,y} a_{x,\,y} = \frac{1}{16} \Sigma a_{x,\,y} = \frac{7}{16},$$

wo $b_{x,\,y}$ die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{16}$ bedeutet, dass der Zug aus der Urne (x, y) geschehen wird, und $a_{x,\,y}$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Zug, wenn er aus der Urne (x, y) geschieht, eine weisse Kugel geben wird.

Nun sei umgekehrt eine weisse Kugel gezogen, ohne dass man die Urne kennt, aus welcher sie gezogen ist. Dann ist die Wahrscheinlichkeit a posteriori, dass dieser Zug aus der Urne (x, y) geschehen ist,

$$\beta_{x,\,y} = \frac{b_{x,\,y}\,\alpha_{x,\,y}}{\Sigma b_{x,\,y}\,\alpha_{x,\,y}} = \frac{\alpha_{x,\,y}}{\Sigma \alpha_{x,\,y}} = \frac{\alpha_{x,\,y}}{7}.$$

Am wahrscheinlichsten ist es daher, dass der Zug aus der Urne (1, 1) geschehen ist; d. h. also, das wahrscheinlichste System der beiden Unbekannten x, y ist das System $x = 1$, $y = 1$.

Man findet nun häufig die ganz unrichtige Ansicht, dass der Werth einer unbekannten Grösse, der ihr in dem wahrscheinlichsten System von mehreren Unbekannten zukommt, zugleich auch ihr wahrscheinlichster Werth sein müsse. Dass dem nicht so ist, lehrt recht augenfällig das vorliegende Beispiel, denn wir finden für die Wahrscheinlichkeit, dass der Zug aus der ersten, zweiten, dritten, vierten Verticalreihe geschehen ist, d. h. dass x den Werth 1, 2, 3, 4 hat, resp. den Werth

$$\frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{7};$$

und dieselben Zahlen drücken auch (in Folge der Symmetrie des obigen Schema) die Wahrscheinlichkeiten aus, dass die Unbekannte y den Werth 1, 2, 3, 4 hat. Wir finden also, dass der wahrscheinlichste Werth von x gleich 2, der von y gleich 2 ist; und doch haben wir vorher gesehen, dass das wahrscheinlichste Werthsystem der beiden Unbekannten das System $x = 1$, $y = 1$ ist. Die Wichtigkeit dieser Bemerkung wird in einer spätern Mittheilung sich herausstellen.

Ganz ähnlich verhält es sich, wenn die Werthe der unbekannten Grössen ein Gebiet stetig erfüllen. Ist z. B.

$$\frac{1}{2\pi}(x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Abscisse eines unbekannten Punctes in dem unendlich kleinen Intervall zwischen x und $x + dx$, und dass seine Ordinate zugleich zwischen y und $y + dy$ liegt, so findet man

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}}(2x^2 + 3)e^{-x^2}dx$$

als Wahrscheinlichkeit, dass seine Abscisse zwischen x und $x + dx$ liegt, und ebenso

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}}(6y^2 + 1)e^{-y^2}dy$$

als Wahrscheinlichkeit, dass seine Ordinate zwischen y und $y + dy$ liegt. Die erste Wahrscheinlichkeit wird ein Maximum für die beiden Systeme

$$x = 0, \quad y = \pm 1;$$

die zweite für den Werth

$$x = 0;$$

die dritte für die beiden Werthe

$$y = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

In diesem Falle stimmt das System der beiden wahrscheinlichsten Werthe zwar sehr nahe, aber doch nicht vollständig mit dem wahrscheinlichsten Werthsystem überein.
