theilte ich diese Beobachtung mit. Ob aber damit die oben erwähnte Zwillingsbildung im Zusammenhang stehe, dies kann ich für jetzt nicht behaupten, auch durch keine besondere Erscheinung angezeigt finden.

So wie die Scheelite von Frammont, so lassen auch die Scheelite von Zinnwald die oben erwähnten Zwillinge beobachten, wie ich es in derselben Sammlung sah. Das Ineinandergreifen der beiden zum Zwilling verwachsenen Individuen ist dabei auf den Pyramidenflächen P und $P\infty$ durch eigene Näthe sehr kenntlich dargestellt.

Mathematische Mittheilungen

von

Dr. Richard Dedekind.

I. Ableitung der allgemeinen Form der Kugelfunctionen.

1.

Dieses Problem ist auf verschiedene Arten von Laplace, Jacobi, Dirichlet behandelt; im Folgenden soll ein mehr elementarer Weg eingeschlagen werden. Wir gehen von nachstehender Definition aus: „Unter einer Kugelfunction n^{ter} Ordnung wird jede ganze rationale Function Y der drei Kugelcoordinaten

$$\cos\Theta,\ \sin\Theta\cos\varphi,\ \sin\Theta\sin\varphi$$

verstanden, welche der partiellen Differentialgleichung

$$n(n+1)\sin\Theta\cdot Y+\frac{d}{d\Theta}\left(\sin\Theta\frac{dY}{d\Theta}\right)+\frac{1}{\sin\Theta}\frac{d^2Y}{d\varphi^2}=0 \quad \text{(I)}$$

Genüge leistet." Bekanntlich ist dann sowohl $v = \varrho^n Y$, als auch $v = \varrho^{-(n+1)} Y$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\sin\Theta \cdot \frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^2 \frac{dv}{d\varrho}\right) + \frac{d}{d\Theta}\left(\sin\Theta \frac{dv}{d\Theta}\right) + \frac{1}{\sin\Theta}\frac{d^2 v}{d\varphi^2} = 0, \quad \text{(II)}$$

oder, als Function der drei rechtwinkligen Parallelcoordinaten $\xi = \varrho \cos\Theta$, $\eta = \varrho \sin\Theta \cos\varphi$, $\zeta = \varrho \sin\Theta \sin\varphi$ angesehen, eine Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \frac{d^2 v}{d\eta^2} + \frac{d^2 v}{d\zeta^2} = 0 \,. \quad \text{(III)}$$

Wir wollen indessen lediglich die Gleichung (I) unserer Untersuchung zu Grunde legen.

2.

Da Y eine ganze rationale Function von $\cos\Theta$, $\sin\Theta\cos\varphi$, $\sin\Theta\sin\varphi$, also eine Summe von Gliedern der Form

$$Const \cdot \cos\Theta^{\alpha} \sin\Theta^{\beta+\gamma} \cos\varphi^{\beta} \sin\varphi^{\gamma}$$

sein soll, worin α, β, γ ganze positive Zahlen oder Null sind, eine solche Function aber in Folge der Identität

$$\cos\Theta^2 + (\sin\Theta\cos\varphi)^2 + (\sin\Theta\sin\varphi)^2 = 1$$

auf unendlich viele verschiedene Arten umgeformt werden kann, ohne diesen Charakter zu verlieren, so ist es zweckmässig, zunächst eine **Normalform** festzusetzen, in welche jede solche Function stets, und auch nur auf eine einzige Weise, gebracht werden kann, und welche umgekehrt auch keine andern als solche Functionen enthält.

Zu einer solchen Darstellungsform gelangen wir leicht durch die folgende Bemerkung. Aus den Formeln für die Umwandlung der Producte $2 \sin a \sin b$, $2 \cos a \cos b$, $2 \sin a \cos b$ in eine Summe zweier Cosinus oder Sinus ergiebt sich bekanntlich, dass man stets, je nachdem γ gerade oder ungerade ist,

$$\cos\varphi^\beta \sin\varphi^\gamma = a\cos(\beta+\gamma)\varphi + a_1\cos(\beta+\gamma-2)\varphi + a_2\cos(\beta+\gamma-4)\varphi + \ldots$$

oder

$$\cos\varphi^\beta \sin\varphi^\gamma = b\sin(\beta+\gamma)\varphi + b_1\sin(\beta+\gamma-2)\varphi + b_2\sin(\beta+\gamma-4)\varphi + \ldots$$

setzen kann, worin a, a_1, a_2, ... und b, b_1, b_2 ... bestimmte Zahlcoefficienten bedeuten. Da nun ferner

$$\sin\Theta^{\beta+\gamma} = (1-\cos\Theta^2)\sin\Theta^{\beta+\gamma-2} = (1-\cos\Theta^2)^2\sin\Theta^{\beta+\gamma-4} = \ldots$$

ist, so leuchtet ein, dass man jedes einzelne Glied einer rationalen ganzen Function von $\cos\Theta$, $\sin\Theta\cos\varphi$, $\sin\Theta\sin\varphi$, und folglich auch die ganze Function selbst in die Form

$$\sum_{s=0}^{s=k} (y_s \cos s\varphi + z_s \sin s\varphi)\sin\Theta^s \qquad (1)$$

bringen kann, wo y_s und z_s rationale ganze Functionen von $\cos\Theta$ sind, und k den grössten Werth von $\beta+\gamma$ bedeutet.

Dass eine rationale ganze Function von $\cos\Theta$, $\sin\Theta\cos\varphi$, $\sin\Theta\sin\varphi$ nur auf eine einzige Weise in diese Form gebracht werden kann, d. h. dass zwei solche Summen von der vorstehenden Form (1) nur dann identisch sein können, wenn die einzelnen Glieder, also auch die Functionen y_s, z_s der einen Summe mit den entsprechenden der andern Summe identisch sind, ist bekannt und lässt sich am kürzesten durch Multiplication mit $\cos s\varphi \,.\, d\varphi$, oder mit $\sin s\varphi \,.\, d\varphi$ und Integration zwischen den Grenzen o und 2π beweisen.

Dass endlich umgekehrt jede solche Summe von der Form (1) auch eine ganze rationale Function von $\cos\Theta$, $\sin\Theta\cos\varphi$, $\sin\Theta\sin\varphi$ ist, folgt unmittelbar aus dem Moivre'schen Satze

$$\sin\Theta^s \cos s\varphi + i \sin\Theta^s \sin s\varphi = (\sin\Theta \cos\varphi + i \sin\Theta \sin\varphi)^s,$$

worin $i = \sqrt{-1}$ ist.

Also ist die Form (1) eine solche oben verlangte Normalform.

3.

Wir haben jetzt die allgemeinste Form der rationalen ganzen Functionen y_s, z_s von $\cos\Theta$ zu suchen, für welche der Ausdruck (1) eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung wird, d. h. der Differentialgleichung (I) genügt. Bezeichnen wir zur Abkürzung $\cos\Theta$, so weit diese Grösse in den Functionen y_s, z_s vorkommt, mit x, so dass also $dx = -\sin\Theta \,.\, d\Theta$, und unterwerfen wir den Ausdruck (1) der Differentialgleichung (I), so erhalten wir (da nach dem Vorhergehenden der Coefficient von $\cos s\varphi$, so wie der von $\sin s\varphi$ in der entstehenden Gleichung für sich $= 0$ sein muss) das Resultat, dass die beiden rationalen ganzen Functionen y_s, z_s von $x = \cos\Theta$ Lösungen der linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung

$$[n(n+1) - s(s+1)]\,u - 2(s+1)\,x\,\frac{du}{dx} + (1-x^2)\,\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad [s]$$

sein müssen. Und umgekehrt leuchtet ein, dass dann der Ausdruck (1) eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung sein wird.

Diese Differentialgleichung [s] wollen wir nun untersuchen, dabei aber auch die Fälle betrachten, in welchen s eine n e g a t i v e ganze Zahl ist, während wir n stets als ganze positive Zahl oder Null voraussetzen. Durch Differentiation der Gleichung [s] erhalten wir

$$[n(n+1) - (s+1)(s+2)]\,\frac{du}{dx} - 2(s+2)\,x\,\frac{d^2u}{dx^2} + (1-x^2)\,\frac{d^3u}{dx^3} = 0,$$

woraus unmittelbar der Satz folgt: Genügt u der Gleichung $[s]$, so genügt $\frac{du}{dx}$ der Gleichung $[s+1]$, und folglich $\frac{d^r u}{dx^r}$ der Gleichung $[s+r]$, wenn r eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet.

Nun finden wir aber für $s = -(n+1)$, dass das allgemeine Integral der Gleichung

$$2nx \frac{du}{dx} + (1 - x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \; [-(n+1)]$$

die Function

$$c\int (x^2 - 1)^n \, dx + c_1$$

ist, folglich ist nach dem eben bewiesenen Satze

$$c \frac{d^{n+s}(x^2 - 1)^n}{dx^{n+s}} = c D^{n+s} (x^2 - 1)^n$$

eine Lösung der Gleichung $[s]$, und zwar ist diese Lösung eine ganze rationale Function von x. Sie gilt für alle ganzen Zahlwerthe von s zwischen $-n$ und $+n$.

Jetzt soll noch bewiesen werden, dass für alle ganzen Zahlwerthe von s zwischen o und $+n$ jede rationale ganze Auflösung der Gleichung $[s]$ in der eben gefundenen Form enthalten ist. Denn, wenn y und z irgend zwei von Null verschiedene Lösungen der Gleichung $[s]$ sind, also

$$[n(n+1) - s(s+1)]\, y - 2(s+1)\, x \frac{dy}{dx} + (1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

$$[n(n+1) - s(s+1)]\, z - 2(s+1)\, x \frac{dz}{dx} + (1 - x^2) \frac{d^2 z}{dx^2} = 0$$

ist, so folgt hieraus unmittelbar

$$-2(s+1)\, x \left\{ z \frac{dy}{dx} - y \frac{dz}{dx} \right\} + (1 - x^2) \left\{ z \frac{d^2 y}{dx^2} - y \frac{d^2 z}{dx^2} \right\} = 0,$$

und da

$$z \frac{d^2 y}{d x^2} - y \frac{d^2 z}{d x^2} = \frac{d}{dx} \left\{ z \frac{dy}{dx} - y \frac{dz}{dx} \right\}$$

ist, so erhält man durch Integration

$$z \frac{dy}{dx} - y \frac{dz}{dx} = \frac{Const}{(x^2 - 1)^{s+1}} .$$

Sind nun y und z ganze rationale Functionen von x, und ist s eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots n$, so kann diese Gleichung nur bestehen, wenn $Const = 0$ ist; daraus folgt

$$z \frac{dy}{dx} = y \frac{dz}{dx}, \quad z = Const \,.\, y,$$

was zu beweisen war.

Da auf diese Weise die allgemeinste Form der Functionen y_s, z_s für ein positives $s \leqq n$ gefunden ist, so fragt sich nur noch, ob auch für $s > n$ ganze rationale Lösungen der Gleichung [s] existiren. Nimmt man an, dass r der Grad einer solchen Lösung sei, so erhält man unmittelbar durch Einsetzen in die Differentialgleichung [s] und Vergleichung der Coefficienten von x^r die Gleichung

$$n(n+1) - s(s+1) - 2(s+1)r - r(r-1) = 0$$

oder

$$n(n+1) - (r+s)(r+s+1) = 0,$$

woraus

$$r + s = n \text{ oder } = -(n+1)$$

folgt. Ist daher $s > n$, so würde in beiden Fällen r negativ ausfallen; also existirt keine solche Lösung.

Auf diese Weise haben wir als die allgemeinste Form einer Kugelfunction n^{ter} Ordnung

$$Y = \sum_{s=0}^{s=n} (\alpha_s \cos s\varphi + \beta_s \sin s\varphi)\, D^{n+s}(x^2 - 1)^n \cdot \sin \Theta^s$$

gefunden, in welcher α_s, β_s ganz willkürliche Constanten bedeuten, deren Anzahl $= 2n + 1$ ist, und wo $x = \cos \Theta$ ist.

4.

Obgleich im Vorhergehenden die ursprüngliche Aufgabe ihre vollständige Lösung erhalten hat, so wird es doch nicht unangemessen sein, die schönen Sätze von Jacobi und Andern aus derselben Quelle, aus der Differentialgleichung $[s]$ abzuleiten.

Ist s eine ganze Zahl zwischen o und $+ n$, so folgt aus dem vorigen Artikel, dass

$$D^{n-s}(x^2 - 1)^n$$

eine Lösung der Differentialgleichung $[-s]$ ist; diese ganze Function ist offenbar theilbar durch $(x^2 - 1)^s$; setzen wir daher

$$D^{n-s}(x^2 - 1)^n = (x^2 - 1)^s w$$

und suchen wir die ganze Function w zu bestimmen.

Setzen wir, ganz abgesehen von der dem w beigelegten speciellen Bedeutung, den Ausdruck $(x^2 - 1)^s w$ in die Differentialgleichung $[-s]$ ein, so ergiebt sich, dass w der Gleichung $[s]$ genügen muss, woraus der allgemeine Satz folgt: **Wenn w der Differentialgleichung $[s]$ genügt, so genügt $(x^2 - 1)^s w$ der Differentialgleichung $[-s]$, und umgekehrt.**

Dies auf unsern Fall angewendet (in welchem $0 \gtreqless s \gtreqless + n$) giebt das Resultat, dass die ganze Function

$$w = Const \cdot D^{n+s}(x^2 - 1)^n$$

sein muss.

Setzt man dies in die vorige Gleichung ein, so erhält man durch Vergleichung der Coefficienten von x^{n+s} auf beiden Seiten, den Satz von **Jacobi**:

$$D^{n-s}(x^2-1)^n = \frac{\Pi(n-s)}{\Pi(n+s)}(x^2-1)^s D^{n+s}(x^2-1)^n,$$

der zwar nur für $0 \leqq s \leqq n$ bewiesen ist, dessen Richtigkeit aber unmittelbar auf das ganze Intervall $-n \lesseqgtr s \lesseqgtr +n$ übertragen werden kann.

Durch wiederholte theilweise Integration findet man leicht, dass

$$\int_{-1}^{+1} D^m(x^2-1)^m D^n(x^2-1)^n dx = (-1)^s \int_{-1}^{+1} D^{m-s}(x^2-1)^m . D^{n+s}(x^2-1)^n . dx$$

$$= (-1)^m \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^m D^{n+m}(x^2-1)^n \cdot dx.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\int_{-1}^{+1} D^m(x^2-1)^m D^n(x^2-1)^n dx = 0,$$

wenn $m > n$, und folglich auch, da die linke Seite symmetrisch in Bezug auf m und n ist, wenn $m < n$. Ist aber $m = n$, so folgt

$$\int_{-1}^{+1} [D^n(x^2-1)^n]^2 dx = \Pi(2n) \cdot \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n dx;$$

da nun

$$\int (1-x^2)^n dx = \frac{x(1-x^2)^n}{2n+1} + \frac{2n}{2n+1}\int (1-x^2)^{n-1} dx,$$

so ist

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n dx = \frac{2n}{2n+1}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{n-1} dx = \frac{2n(2n-2)\ldots 4 . 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5 . 3} . 2,$$

folglich

$$\int_{-1}^{+1} [D^n(x^2-1)^n]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \cdot [2^n \Pi(n)]^2.$$

Wir bedürfen endlich noch des Werthes von $D^{n+s}(x^2-1)^n$ für $x = 1$, den wir mit h_s bezeichnen wollen. Da $D^{n+s}(x^2-1)^n$ der Differentialgleichung $[s]$ genügt, so ergiebt sich

$$[n(n+1)-s(s+1)]\,h_s - 2(s+1)\,h_{s+1} = 0,$$

also

$$h_s = \frac{2(s+1)}{(n-s)(n+s+1)}\,h_{s+1} = \frac{\Pi(n+s)}{\Pi(n-s)}\cdot\frac{2^n\,\Pi(n)}{2^s\,\Pi(s)},$$

da $h_n = \Pi(2n)$ ist.

5.

Nehmen wir auf einer mit einem Radius = 1 beschriebenen Kugelfläche einen bestimmten Punct p als Pol eines Polarcoordinatensystems, indem wir mit Θ die Polardistanz $p\mu$ irgend eines Punctes μ der Kugelfläche, mit φ den Winkel bezeichnen, den der Meridian $p\mu$ mit einem festen Meridian bildet, so kann jede Function $f(\Theta, \varphi)$ von Θ, φ innerhalb der Grenzen $0 < \Theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$, als Function des Ortes eines Punctes μ auf dieser Kugelfläche angesehen werden. Es sei nun σ ein beliebig begrenzter Theil dieser Kugelfläche, ds ein unendlich kleines Element seiner Begrenzung, N die in ds nach innen errichtete sphärische Normale; ferner mögen Y, Z zwei Functionen von Θ, φ sein, welche nebst ihren ersten partiellen Derivirten innerhalb des Gebietes σ endlich und stetig sind. Dann findet man

$$\iint\left\{\frac{d}{d\Theta}\left(Z\sin\Theta\,\frac{dY}{d\Theta}\right)+\frac{d}{d\varphi}\left(Z\cdot\frac{1}{\sin\Theta}\,\frac{dY}{d\varphi}\right)\right\}d\Theta\,d\varphi = -\int Z\,\frac{dY}{dN}\,.ds,$$

worin das Doppelintegral linker Hand über alle Werthe Θ, φ auszudehnen ist, denen Puncte innerhalb σ entsprechen, während rechts die Integration sich über die ganze Begrenzung s von σ erstreckt, und $\frac{dY}{dN}$ die in der Richtung der nach innen errichteten Normale N genommene Derivirte von Y bedeutet. Um sich von der Richtigkeit dieses Satzes zu überzeugen, braucht man nur an jedem der beiden Theile links eine Integration auszuführen.

Andererseits ist aber

$$\frac{d}{d\Theta}\left(Z \sin\Theta \frac{dY}{d\Theta}\right) + \frac{d}{d\varphi}\left(Z \frac{1}{\sin\Theta}\frac{dY}{d\varphi}\right) =$$

$$Z\left\{\frac{d}{d\Theta}\left(\sin\Theta\frac{dY}{d\Theta}\right) + \frac{1}{\sin\Theta}\frac{d^2Y}{d\varphi^2}\right\} + \sin\Theta\frac{dZ}{d\Theta}\frac{dY}{d\Theta} + \frac{1}{\sin\Theta}\frac{dZ}{d\varphi}\frac{dY}{d\varphi};$$

ist daher Y eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung, also

$$\frac{d}{d\Theta}\left(\sin\Theta\frac{dY}{d\Theta}\right) + \frac{1}{\sin\Theta}\frac{d^2Y}{d\varphi^2} = -\,n(n+1)\sin\Theta\cdot Y,$$

so erhalten wir folgenden Satz:

$$n(n+1)\int ZY d\sigma - \int\left\{\frac{dZ}{d\Theta}\frac{dY}{d\Theta} + \frac{1}{\sin\Theta^2}\frac{dZ}{d\varphi}\frac{dY}{d\varphi}\right\}d\sigma = \int Z\frac{dY}{dN}ds. \quad \text{(IV)}$$

worin $d\sigma = \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi$ ein unendlich kleines Element von σ bedeutet, und die Integrationen links über σ, rechts über die Begrenzung s von σ auszudehnen sind. Für $Z = 1$ erhalten wir das Resultat

$$n(n+1)\int Y d\sigma = \int\frac{dY}{dN}ds, \qquad \text{(V)}$$

und diese Gleichung ist nur als eine Transformation der Fundamentalgleichung (I) anzusehen, welche sich umgekehrt wieder aus (V) ableiten lässt, sobald man für σ das von zwei unendlich nahen Parallelkreisen (Θ und $\Theta + d\Theta$) und zwei unendlich nahen Meridianen (φ und $\varphi + d\varphi$) begrenzte Flächenelement $d\sigma = \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi$ wählt. Diese Gleichung (V) spricht aber eine, von dem zufällig gewählten Polarcoordinatensystem (Θ, φ) ganz unabhängige, geometrische Eigenschaft der Ortsfunction Y aus; nimmt man daher ein beliebiges anderes Polarcoordinatensystem, d. h. einen neuen Pol p' und einen neuen Anfangsmeridian, und bezeichnet mit ω die neue Polardistanz $p'\mu$, mit ψ den Winkel, den der Meridian $p'\mu$ mit dem neuen Anfangsmeridian bildet, so muss Y, als Function der neuen Coordinaten ω, ψ, der partiellen Differentialgleichung

$$n(n+1)\sin\omega \,.\, Y + \frac{d}{d\omega}\left(\sin\omega \cdot \frac{dY}{d\omega}\right) + \frac{1}{\sin\omega}\frac{d^2Y}{d\psi^2} = 0 \qquad \text{(VI)}$$

Genüge leisten. Ferner ist aus der Theorie der Transformation orthogonaler Coordinaten bekannt, dass jede der drei Grössen

$$\cos\Theta,\ \sin\Theta\cos\varphi,\ \sin\Theta\sin\varphi$$

eine homogene lineare Function der drei Grössen

$$\cos\omega,\ \sin\omega\cos\psi,\ \sin\omega\sin\psi$$

ist (und umgekehrt). Also ist Y auch eine ganze rationale Function dieser drei letzten Grössen. Wir sehen also, dass die ursprünglich aufgestellte Definition einer Kugelfunction ganz unabhängig ist von dem zu Grunde gelegten Coordinatensystem. Bezeichnen wir daher zur Abkürzung $\cos\omega$ mit λ, so findet stets eine Identität von folgender Form Statt:

$$Y = \sum_0^n (\alpha_s \cos s\varphi + \beta_s \sin s\varphi)\sin\Theta^s \cdot D^{n+s}(x^2-1)^n$$

$$= \sum_0^n (a_s \cos s\psi + b_s \sin s\psi)\sin\omega^s \cdot D^{n+s}(\lambda^2-1)^n .$$

6.

Wir benutzen die Resultate des vorigen Artikels, um folgende Aufgabe zu lösen: **Die allgemeinste Form einer Kugelfunction n^{ter} Ordnung**

$$P = \sum_{0}^{n} (\alpha_s \cos s\varphi + \beta_s \sin s\varphi) \sin \Theta^s \cdot D^{n+s}(x^2 - 1)^n,$$

zu finden, welche auf jedem einzelnen eines Systems von Parallelkreisen von gegebener Lage einen constanten Werth hat.

Die Lage des Systems von Parallelkreisen ist durch die Lage des Pols p' derselben gegeben; bezeichnen wir die Coordinaten Θ, φ von p' mit Θ', φ' und nehmen wir p' zum Pol eines neuen Polarsystems ω, ψ; so ist

$$\cos \omega = \cos \Theta \cos \Theta' + \sin \Theta \sin \Theta' \cos(\varphi - \varphi') = \lambda.$$

Da nun die Kugelfunction P lediglich von ω, nicht aber von ψ abhängen soll, so ist (nach der Endformel des vorigen Artikels)

$$P = Const \cdot D^n (\lambda^2 - 1)^n.$$

Es bleibt also noch die Aufgabe zu lösen, die Coefficienten α_s, β_s in der Identität

$$D^n (\lambda^2 - 1)^n = \sum_{0}^{n} (\alpha_s \cos s\varphi + \beta_s \sin s\varphi) \sin \Theta^s \, D^{n+s}(x^2 - 1)^n$$

als Functionen von Θ', φ' zu bestimmen. Da nun die linke Seite eine ganze rationale Function von

$$\lambda = \cos \omega = \cos \Theta \cos \Theta' + \sin \Theta \sin \Theta' \cos(\varphi - \varphi'),$$

also symmetrisch in Bezug auf Θ, φ und Θ', φ', und folglich auch in Bezug auf Θ', φ' eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung ist, so sieht man voraus, dass

$$D^n (\lambda^2-1)^n = \sum_{0}^{n} \gamma_s \sin \Theta^s \, D^{n+s}(x^2-1)^n . \sin \Theta'^s . \, D^{n+s}(x'^2-1)^n . \cos s(\varphi-\varphi')$$

sein muss, worin γ_s absolute Zahlencoefficienten bedeuten, welche allein noch zu bestimmen bleiben, und wo $x' = \cos \Theta'$ gesetzt ist.

7.

Statt diese Aufgabe durch die Bemerkung anzugreifen, dass die beiden partiellen Derivirten dieser Kugelfunction nach Θ, und nach Θ' genommen, sich verhalten müssen, wie $\frac{d\lambda}{d\Theta}$ und $\frac{d\lambda}{d\Theta'}$, wodurch man ebenfalls zum Ziele kommen würde, schlagen wir einen andern Weg ein, indem wir zunächst mit den uns zu Gebote stehenden Hülfsmitteln den bekannten Satz beweisen, dass, wenn $Y = f(\Theta, \varphi)$ eine beliebige Kugelfunction n^{ter} Ordnung bedeutet,

$$\int Y\, D^n (\lambda^2 - 1)^n \cdot d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} \cdot 2^n\, \Pi(n) \cdot Y'$$

ist, worin die Integration links über die ganze Kugelfläche auszudehnen, und $Y' = f(\Theta', \varphi')$ ist.

Zu dem Zwecke denken wir uns Y als Function von ω, ψ in die Form

$$Y = \sum_0^n (a_s \cos s\psi + b_s \sin s\psi) \sin \omega^s \cdot D^{n+s}(\lambda^2 - 1)^n$$

entwickelt, und zerlegen die Kugelfläche diesen Coordinaten ω, ψ gemäss in unendlich kleine Elemente $d\sigma = \sin \omega\, d\omega\, d\psi$, so erhalten wir

$$\int Y\, D^n (\lambda^2 - 1)^n\, d\sigma = \int_0^\pi D^n (\lambda^2 - 1)^n \sin \omega\, d\,\omega \int_0^{2\pi} Y d\psi$$

$$= \int_0^\pi D^n (\lambda^2 - 1)^n \sin \omega\, d\,\omega \cdot 2\pi \cdot a_0 \cdot D^n (\lambda^2 - 1)^n$$

$$= 2\pi\, a_0 \int_{-1}^{+1} [D^n (\lambda^2 - 1)^n]^2\, d\lambda = \frac{4\pi}{2n+1} \cdot [2^n\, \Pi(n)]^2 \cdot a_0\,.$$

Setzen wir aber in der obigen Form für Y die Variabele $\omega = 0$, also $\lambda = 1$, so wird $Y = f(\Theta', \varphi') = Y'$, und folglich (Art. 4.)

$$Y' = a_0 \cdot [D^n (\lambda^2 - 1)^n]_{\lambda = 1} = a_0 h_0 = a_0 \cdot 2^n \Pi(n).$$

Wir erhalten daher

$$\int YD^n (\lambda^2 - 1)^n d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} \cdot 2^n \Pi(n) \cdot Y';$$

was zu beweisen war.

Dieser Satz bildet die Ergänzung zu dem andern Satze, dass, über die ganze Kugelfläche ausgedehnt,

$$\int ZY d\sigma = 0$$

ist, wenn Z und Y Kugelfunctionen von verschiedenen Ordnungen bedeuten. Dieses folgt unmittelbar aus der Gleichung (IV), wenn man bedenkt, dass in diesem Falle das dort stehende Integral rechts wegfällt, und dass das zweite Integral links symmetrisch in Bezug auf Y und Z ist; denn daraus folgt

$$n(n+1)\int ZY d\sigma = \int \left\{ \frac{dZ}{d\Theta}\frac{dY}{d\Theta} + \frac{1}{\sin\Theta^2}\frac{dZ}{d\varphi}\frac{dY}{d\varphi} \right\} d\sigma = m(m+1)\int ZY d\sigma,$$

wenn m die Ordnung der Kugelfunction Z ist. Wenn nun m und n verschieden sind, so ergiebt sich unmittelbar der zuletzt aufgestellte Satz.

8.

Wir können nun leicht die Coefficienten γ_s in der Entwicklung von $D^n (\lambda^2 - 1)^n$ in Art. 6. bestimmen, nach einem von Dirichlet angegebenen Verfahren. Setzen wir nämlich in dem ersten Satz des vorigen Artikels die specielle Function

$$Y = \cos s\varphi \cdot \sin\Theta^s \cdot D^{n+s}(x^2 - 1)^n,$$

also

$$Y' = \cos s\varphi' \cdot \sin\Theta'^s \cdot D^{n+s}(x'^2 - 1)^n,$$

ein, so wird, wenn wir die Entwicklung von $D^n (\lambda^2 - 1)^n$ substituiren, die Kugelfläche, dem Polarsystem Θ, φ

gemäss, in unendlich kleine Elemente $d\sigma = \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi$ zerlegen, nnd die Variabeln $x = \cos\Theta$ einführen,

$$\int Y D^n(\lambda^2-1)^n d\sigma = \gamma_s \sin\Theta'^s D^{n+s}(x'^2-1)^n . \cos s\varphi' . \frac{2\pi}{2n+1} . \frac{\Pi(n+s)}{\Pi(n-s)} [2^n \Pi(n)]^2$$

für ein von Null verschiedenes s, während für $s = 0$ der doppelte Werth zu nehmen ist. Da nun dies Resultat mit

$$\frac{4\pi}{2n+1} 2^n \Pi(n)\, Y' = \frac{4\pi}{2n+1} . 2^n \Pi(n) . \cos s\varphi' . \sin\Theta'^s D^{n+s}(x'^2-1)^n$$

identisch sein muss, so folgt, wenn s von Null verschieden,

$$\gamma_s = 2 . \frac{1}{2^n \Pi(n)} . \frac{\Pi(n-s)}{\Pi(n+s)}$$

dagegen

$$\gamma_0 = \frac{1}{2^n \Pi n} .$$

Folglich ist

$$D^n (\lambda^2 - 1)^n =$$

$$\frac{2}{2^n \Pi(n)} \sum_0^n \frac{\Pi(n-s)}{\Pi(n+s)} . \sin\Theta^s D^{n+s}(x^2-1)^n . \sin\Theta'^s D^{n+s}(x'^2-1)^n . \cos s(\varphi-\varphi'),$$

worin aber für $s = 0$ das entsprechende Glied auf die Hälfte zu reduciren ist; diesen Uebelstand vermeidet man in der Form

$$D^n (\lambda^2 - 1)^n =$$

$$\frac{1}{2^n \Pi(n)} . \sum_{-n}^{+n} \frac{\Pi(n-s)}{\Pi(n+s)} \sin\Theta^s D^{n+s}(x^2-1)^n . \sin\Theta'^s D^{n+s}(x'^2-1)^n . \cos s(\varphi-\varphi'),$$

die man leicht aus der vorhergehenden ableitet.

9.

Zum Schluss wollen wir noch den Zusammenhang der letzten Untersuchung mit gewissen Reihenentwicklungen bemerken.

Bezeichnet r die Entfernung eines Punctes, dessen rechtwinklige Coordinaten

$$\xi = \varrho \cos \Theta, \ \eta = \varrho \sin \Theta \cos \varphi, \ \zeta = \varrho \sin \Theta \sin \varphi$$

sind, von einem festen Puncte, so genügt bekanntlich die Function $v = \frac{1}{r}$ der partiellen Differentialgleichung (III) und folglich auch der Gleichung (II). Nehmen wir als festen Punct einen Punct der mit dem Radius = 1 beschriebenen Kugelfläche, dessen Coordinaten

$$\xi' = \cos \Theta', \ \eta' = \sin \Theta' \cos \varphi', \ \zeta' = \sin \Theta' \sin \varphi'$$

sind, so ist

$$r^2 = 1 - 2\lambda\varrho + \varrho^2,$$

worin

$$\lambda = \cos \omega = \cos \Theta \cos \Theta' + \sin \Theta \sin \Theta' \cos (\varphi - \varphi').$$

Entwickelt man daher $\frac{1}{r}$ in eine unendliche Reihe:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda\varrho + \varrho^2}} = \sum_0^\infty P_n(\lambda) \cdot \varrho^n, \text{ für } \varrho < 1$$

worin $P_n(\lambda)$ eine rationale ganze Function von λ bezeichnet, so ist

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{\varrho}}{\sqrt{1 - 2\lambda \frac{1}{\varrho} + \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2}} = \sum_0^\infty \frac{P_n(\lambda)}{\varrho^{n+1}} \text{ für } \varrho < 1$$

und $P_n(\lambda)$ ist eine rationale ganze Function von $\cos \Theta$, $\sin \Theta \cos \varphi$, $\sin \Theta \sin \varphi$, welche der partiellen Differentialgleichung (I) Genüge leistet, folglich eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung ist. Da sie aber die Variabeln Θ, φ nur in der Form $\lambda = \cos \omega$ enthält, so ist (nach Art. 6.)

$$P_n(\lambda) = Const \cdot D^n(\lambda^2 - 1)^n = k_n \, D^n(\lambda^2 - 1)^n,$$

worin nur noch die Constante k_n zu bestimmen ist; diese ergiebt sich für $\lambda = 1$; denn man erhält

$$P_n(1) = k_n \cdot h_0 = 2^n \, \Pi(n) \cdot k_n \,.$$

Andererseits ist $P_n(1)$ der Coefficient von ϱ^n in der Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\varrho + \varrho^2}} = \frac{1}{1-\varrho} = \sum_0^\infty \varrho^n,$$

also

$$P_n(1) = 1\,, \text{ folglich } k_n = \frac{1}{2^n \, \Pi(n)}\,, \text{ und}$$

$$P_n(\lambda) = \frac{D^n (\lambda^2 - 1)^n}{2^n \, \Pi(n)}\,.$$

Mit Hülfe dieses Satzes kann man die vorletzte Gleichung des vorigen Artikels auch so schreiben:

$$P_n(\lambda) = 2 \sum_0^n \frac{\Pi(n-s)}{\Pi(n+s)} \cdot \sin\Theta^s \, D^s \, P_n(x) \,.\, \sin\Theta'^s \, D^s \, P_n(x') \,.\, \cos s(\varphi - \varphi'),$$

worin nur das $s = 0$ entsprechende Glied auf die Hälfte zu reduciren ist. Ferner nimmt der Satz des Art. 7. die Gestalt

$$\int Y P_n(\lambda) \cdot d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} \cdot Y'$$

an, in welcher er gewöhnlich geschrieben wird. Als specieller Fall desselben ist bemerkenswerth

$$\int P_n(\lambda) \, P_n(\mu) \cdot d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} \cdot P_n(\nu)\,,$$

worin

$$\begin{aligned}
\lambda &= \cos\omega = \cos\Theta \cos\Theta' + \sin\Theta \sin\Theta' \cos(\varphi - \varphi') \\
\mu &= \cos\omega' = \cos\Theta \cos\Theta'' + \sin\Theta \sin\Theta'' \cos(\varphi - \varphi'') \\
\nu &= \cos\omega'' = \cos\Theta' \cos\Theta'' + \sin\Theta' \sin\Theta'' \cos(\varphi' - \varphi'')
\end{aligned}$$

die Cosinus der drei Seiten eines sphärischen Dreiecks sind, dessen drei Ecken die beiden festen Puncte (Θ', φ'), (Θ'', φ'') und der bewegliche Punct (Θ, φ) sind.

[Zürich, Februar 1859.]