Auflösung der Gleichungen des 2., 3. und 4. Grades mit complexen Coefficienten.

Von W. Denzler.

Als ich vor vier Jahren den Entschluss fasste, die analytischen Gesetze in Beziehung auf complexe Zahlen zu untersuchen, wurde mir gar bald die Nothwendigkeit klar, den vieldeutigen Grössen Indices hinzuzufügen. Dadurch allein wurde es möglich, die Rechnung mit vieldeutigen Grössen auf eine solche mit eindeutigen zu reduciren und gesonderte Gleichungen*) herzustellen, die nach meiner Ansicht vorzugsweise geeignet sind, den wissenschaftlichen Anforderungen an analytische Gleichungen ein Genüge zu leisten. Dass man solcher Gleichungen schon bei der Auflösung der Gleichungen bedarf, wenn man nämlich die zusammengehörigen Wurzelwerthe a priori bestimmen will, wird das Folgende zeigen, wodurch die Aufgabe gelöst werden soll, für je eine Gleichung des 2., 3. und 4. Grades einen Ausdruck zu finden, der in allen möglichen Fällen die sämmtlichen Wurzeln sofort in der Form complexer Zahlen auf eine völlig bestimmte Weise gibt:

§. 1.

Vorerst müssen wir uns erlauben, an folgende Erklärungen und Lehrsätze aus Nr. 113—116 der Zürcher-Mittheilungen zu erinnern, wobei wir mit a, b, k, k, einwerthige reelle Zahlen mit i und —i aber die beiden Werthe von $\sqrt{-1}$ andeuten wollen:

---

*) In den Zürcher-Mittheilungen Nr. 113—116 habe ich bereits eine ziemliche Anzahl solcher Gleichungen mitgetheilt.

mod. $(a + b\,i)$ bezeichnet die absolute Zahl, deren Quadrat $= a^2 + b^2$ ist.

arg. $(a + b\,i)$ bezeichnet den einzigen Bogen, der entweder $= \pi$ oder zwischen π und $-\pi$ liegt, dessen Cosinus $= a :$ mod. $(a+bi)$ und dessen Sin. $= b :$ mod. $(a+bi)$.

l r, wo r eine absolute Zahl, bedeutet die reelle Zahl, mit der e oder 2,718 . . . potenzirt, r gibt.

$E^{k+k,i}$ bedeutet die Exponentialreihe $\left[1+k+k,i+\frac{1}{1.2}(k+k,i)^2+\cdots\right]$. Bekanntlich ist $E^{a+bi} \cdot E^{k+k,i} = E^{a+bi+k+k,i}$.

log. $(a + bi) =$ l mod. $(a + bi) + [2\gamma\pi +$ arg. $(a + bi)]i$, wo γ die 0 und jede positive oder negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat.

$_\tau$log. $(a + bi)$, wo τ eindeutig und entweder die 0, oder dann irgend eine positive oder negative ganze Zahl darstellt, bezeichnet denjenigen speciellen Werth von log. $(a + bi)$, der $=$ l mod. $(a + bi) + [2\tau\pi +$ arg. $(a + bi)]i$ ist. $_0$log. r ist somit $=$ lr, wenn r positiv.

$(a + bi)^{k+k,i} = E^{(k+k,i)\log(a+bi)}$.

$_\tau(a + bi)^{k+k,i}$ bedeutet den speciellen Werth $E^{(k+k,i)\,{}_\tau\log.(a+bi)}$ von $E^{(k+k,i)\log.(a+bi)}$. Es ist daher $_0e^{k+k,i} = E^{k+k,i}$ Nach der bereits angeführten Gleichung, welche die Verwandlung von $_\tau$log. $(a + bi)$ in eine Complexe lehrt, lässt sich $(k + k,i)$ log. $(a + bi)$ in eine Complexe verwandeln. Setzen wir diese $= p + qi$, so ist $_0e^p(\cos q + i \sin q) = (a + bi)^{k+k,i}$.

$_\tau\sqrt[k+k,i]{a + bi}$ ist mit der Potenz $_\tau(a + bi)^{\frac{1}{k+k,i}}$ gleichbedeutend. Es ist daher $_0\sqrt{16} = 4 = {}_0\sqrt[3]{64}$ und $_1\sqrt{16} = -4 = {}_1\sqrt[3]{-64}$.

arc. cos a bezeichnet, wenn $a^2 \overline{\gtrless} 1$, den einzigen positiven π nicht übersteigenden Bogen, dessen Cosinus $= a$.

r_b bezeichnet die reelle, jedoch nicht gebrochene Zahl, für welche die Summe $2\pi r_b + b$ entweder $= \pi$, oder dann zu einem Bogen wird, der zwischen π und

$-\pi$ liegt. So ist z. B. $\mathfrak{r}_{-\pi} = 1$, $\mathfrak{r}_{\pi} = 0$, $\mathfrak{r}_{-\frac{1}{4}\pi} = +1$, $\mathfrak{r}_{\arg.(-3+i)+\arg i} = -1$.

$\underset{\smile}{a}$ bedeutet $+1$, wenn a positiv oder 0, dagegen -1, wenn a negativ ist. Es ist z. B. $\arg.(a+bi) = \underset{\smile}{b}\,\mathrm{arc.cos}\,\frac{a}{{}_0\sqrt{a^2+b^2}}$.

§. 2.

Bezeichnen a, b, a_1 und b_1 reelle Zahlen, 0 nicht ausgeschlossen, hingegen i und $-$ i die beiden Werthe von $\sqrt{-1}$ und bedeutet endlich τ eine Zahl, welche 0 und jede positive oder negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat, so folgt aus der Gleichung:

$$x^2 + (a + bi)\,x + a_1 + b_1 i = 0. \qquad 1)$$

die vollkommene Gleichung:

$$\begin{aligned} x = \tfrac{1}{2}\Big[-a + {}_\tau\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2-b^2-4a_1) + \tfrac{1}{2}\,{}_0\sqrt{(a^2-b^2-4a_1)^2 + (2ab-4b_1)^2}}\Big] + \\ + \tfrac{1}{2} i\Big[-b + {}_\tau\sqrt{-\tfrac{1}{2}(a^2-b^2-4a_1) + \tfrac{1}{2}\,{}_0\sqrt{(a^2-b^2-4a_1)^2 + (2ab-4b_1)^2}}\Big] \end{aligned} \qquad 2)$$

d. h. die sämmtlichen Werthe des 2. Theils dieser Gleichung sind Wurzeln von der Gleichung 1) und umgekehrt.

Zur Begründung dieser Behauptung hat man nur zu bedenken, dass wenn man in dem 2. Theil der Gleichung 2) dem τ die 0 und nachher 1 substituirt, 2 Werthe erhalten werden, mit welchen alle übrigen aus andern Substitutionen für τ hervorgehenden Werthe coincidiren, und dass, wie sehr leicht zu finden, die Summe jener 2 Werthe $= -(a + bi)$, die wir mit x_0 und x_1 bezeichnen wollen, hingegen ihr Produkt $= a_1 + b_1 i$, mithin $(x - x_0)(x - x_1) = x^2 + (a + bi)\,x + a_1 + b_1 i$ ist.

Zur Herstellung des Ausdruckes für x, der die Form p + qi hat, wo p und q reell, war die Umformung eines Radikals mit einem complexen Radikanden in eine Complexe nothwendig. Wir fanden hiebei folgende gesonderte Gleichung:

$${}_\tau\sqrt{a+bi} = {}_\tau\sqrt{\tfrac{1}{2}(a + {}_0\sqrt{a^2+b^2})} + \underset{\smile}{b}\, i\, {}_\tau\sqrt{-\tfrac{1}{2}(-a + {}_0\sqrt{a^2+b^2})} \qquad 3)$$

wo a, b, τ und i die im Eingange dieses §. erwähnte Bedeutung haben. Die Richtigkeit dieser Gleichung wird sofort erkannt, wenn sie für irgend einen Werth von τ, z. B. für $t = 0$, bewiesen ist. In diesem Falle findet man zunächst ohne Schwierigkeit, dass

$$\sqrt[0]{\tfrac{1}{2}(a + {}_0\sqrt{a^2+a^2})} + \underset{\smile}{b}\,i\,\sqrt[0]{\tfrac{1}{2}(-a + {}_0\sqrt{a^2+b^2})}$$

quadrirt a + bi gibt, mithin ein Werth von $\sqrt{a+bi}$ ist; und wir zeigen daher nur noch, dass diese Summe den besondern Werth ${}_0\sqrt{a+bi}$ von $\sqrt{a+bi}$ ausdrückt.

Es ist, wenn a + bi nicht $= 0$,

$${}_1\sqrt{a+bi} = E^{\frac{1}{2}\log(a+bi)} = E^{\frac{1}{2}\mathrm{l\,mod.}(a+bi)+\left[\pi+\frac{1}{2}\arg.(a+bi)\right]i}$$

$$= {}_0\sqrt[4]{a^2+b^2}\left[\cos\left[\pi+\tfrac{1}{2}\arg.(a+bi)\right]+i\sin\left[\pi+\tfrac{1}{2}\arg.(a+bi)\right]\right]$$

Ist nun $\cos\left[\pi + \frac{1}{2}\arg.(a+bi)\right] = 0$, so muss nothwendig, da $a^2 + b^2$ nicht 0 und arg. (a + bi), entweder π oder zwischen π und $-\pi$, $b = 0$ und a negativ sein. Aber in diesem Falle ist der Faktor von i in der dem Radikal ${}_1\sqrt{a+bi}$ gleichen Complexen negativ, während der Faktor von i in der in Untersuchung stehenden Summe positiv ist. In jedem andern Falle aber würde der reelle Bestandtheil in der Complexen, die $= {}_1\sqrt{a+bi}$, negativ sein, während der reelle Bestandtheil in der fraglichen Summe positiv ist. Wenn demnach $a^2 + b^2 > 0$, so ist diese Summe zwar ein Werth von $\sqrt{a+bi}$, aber nicht der besondere Werth ${}_1\sqrt{a+bi}$, woraus sich ohne Mühe folgern lässt, dass sie nur den Werth ${}_0\sqrt{a+bi}$ ausdrücken kann. — Sind aber a und b Nullen, so ist jeder der beiden Theile der Gleichung 3) $= 0$.

§. 3.

Ehe wir zur Auflösung der Gleichungen des 3. Grades übergehen können, haben wir folgende Lehrsätze zu beweisen:

A. Bezeichnen a, b, a_1, b_1, k und k_1 reelle Zahlen, 0 nicht nicht ausgeschlossen, τ und τ_1 aber nur positive oder negative ganze Zahlen, 0 inclusive, so hat man die gesonderte Gleichung:

$$_{\tau}(a+bi)^{k+k_{,}i} \cdot {}_{\tau_1}(a_1+b_1 i)^{k+k_{,}i} = {}_{\tau+\tau_1-\mu}[(a+bi)(a_1+b_1 i)]^{k+k_{,}i} \qquad 4)$$

wo $\mu = \mathrm{r}_{\arg(a+bi)+\arg(a_{,}+b_{,}i)}$

jedoch nur in folgenden Fällen:

1) wenn weder $a+bi$ noch $a_{,}+b_{,}i = 0$
2) wenn in dem Falle, da $a+b$ oder $a_{,}+b_{,}i = 0$, k positiv ist.

Ueberdiess ist, wenn weder $a+bi$ noch $a_{,}+b_{,}i = 0$:

$$\mathrm{r}_{\arg(a+bi)+\arg(a_{,}+b_{,}i} =$$
$$-\tfrac{1}{8}[\underbrace{b}+\underbrace{b_1}]\Big([1+\underbrace{-a^2-a_{,}^2}\,\underbrace{a}\,\underbrace{a_{,}}][1-\underbrace{b}\,\underbrace{\underbrace{a}\,\underbrace{b}\,(a^2b_{,}^2-a_{,}^2b^2)}]+[1-\underbrace{a_{,}}][1-\underbrace{a}]\Big) \qquad 5)$$

B. Es ist bei derselben Bedeutung von a und b in jedem Falle

$$\lambda\sqrt[3]{(a+bi)^3} = a+bi, \text{ wo } \lambda = -\mathrm{r}_{3\arg(a+bi)} \qquad 6)$$

und, wenn $a+bi$ nicht $= 0$:

$$-\mathrm{r}_{3\arg(a+bi)} = \underbrace{b}\Big[\tfrac{1}{2}(1+\underbrace{-a})+\tfrac{1}{4}(1-\underbrace{-a})(1-\underbrace{b(3a^2-b^2)\underbrace{b}})\Big] \qquad 7)$$

Beweis zu A.

Nach Definitionen und Lehrsätzen, die theils im §. 1 angeführt, theils allgemein bekannt sind, bestehen, wenn weder $a+bi$ noch $a_1+b_1 i = 0$, folgende Gleicheiten:

$$_{\tau}(a+bi)^{k+k_1 i} \cdot {}_{\tau}(a_1+b_1 i)^{k+k_1 i} =$$
$$= E^{(k+k_1 i)\,[{}_{\tau}\log(a+bi)+{}_{\tau_1}\log(a_1+b_1 i)]} =$$
$$= E^{(k+k_{,}i)\left(l\,\mathrm{mod}\,[(a+bi)(a_{,}+b_{,}i)]+i\,[2(\tau+\tau_{,})\pi+\arg(a_{,}+b_{,}i)]\right)}$$

Ferner ist aus denselben Gründen:

$$_{\tau+\tau_1-\mu}[(a+bi)(a_1+b_1 i)]^{k+k_1 i} =$$
$$= E^{(k+k_{,}i)\left(l\,\mathrm{mod}\,[(a+bi)(a_{,}+b_{,}i)]+i\left[2(\tau+\tau_{,}-\mu)\pi+\arg[(a+bi)(a_{,}-b_{,}i)]\right]\right)}$$

Nun ist der zweite Theil dieser letztern Gleichung gleichwerthig mit dem Ausdrucke 8), da, wie leicht einzusehen,

$\arg\,[(a + bi)\,(a_{,} + b_{,}i)] = \arg\,(a + bi) + \arg\,(a_{,} + b_{,}i) + r_{\arg\,(a + bi) + \arg\,(a_{,} + b_{,}i)}$. Es bleibt somit für den Fall, da weder $a + bi$ noch $a_{,} + b_{,} = 0$, nur noch die Existenz der Gleichung 5) zu zeigen übrig.

Von dieser überzeugt man sich sehr leicht auf folgende Weise: Sucht man alle möglichen Fälle auf, in welchen der erste Theil der Gleichung 5) nicht 0, so wird man stets diesen ersten Theil mit dem zweiten von demselben Werthe finden, während der zweite Theil in allen übrigen Fällen $= 0$ ist. Ist z. B. jede der 3 Zahlen b, $b_{,}$ und a negativ, $a_{,}$ positiv und der absolute Werth $\frac{b}{a}$ gleich oder kleiner als derjenige von $\frac{b_{,}}{a_{,}}$, so folgt aus einer äusserst einfachen geometrischen Betrachtung der Gauss'schen Zahlbilder von $a + bi$ und $a_{,} + b_{,}i$, dass in diesem Falle der erste Theil der Gleichung 5) $= + 1$; und diesen Werth gibt auch der zweite Theil, da jetzt $[1 - \underbrace{a_{,}}]\,[1 - \underbrace{a}] = 0$, $\underbrace{b} + \underbrace{b_{,}} = -2$, $1 + \underbrace{-a^2 - a_{,}^2}\,\underbrace{a}\,\underbrace{a_{,}} = 2$, ferner $\underbrace{b} = -1$, $\underbrace{a}\,\underbrace{b} = +1$, $\underbrace{a^2b_{,}^2 - a_{,}^2b^2} = +1$, weil eben dem absoluten Werthe nach $\frac{b}{a} \overline{\overline{<}} \frac{b_{,}}{a_{,}}$, mithin $1 - \underbrace{b}\,\underbrace{\underbrace{a}\,\underbrace{b}\,(a^2b_{,}^2 - a_{,}^2b^2)} = 2$ ist. Wäre aber unter übrigens gleichen Umständen der absolute Werth von $\frac{b}{a}$ grösser als der von $\frac{b_{,}}{a_{,}}$, so würde dieselbe Betrachtung zu dem Werthe 0 für den ersten Theil der 5) führen, und der zweite Theil ebenfalls 0 sein, weil in diesem letztern Falle nicht blos $(1 - \underbrace{a})\,(1 - \underbrace{a_1})$, sondern auch $[1 - \underbrace{b}\,\underbrace{\underbrace{a}\,\underbrace{b}\,(a^2b_1^2 - a_1^2b^2)}] = 0$ wäre. Beide Theile der Gleichung 5) geben ferner sofort den Werth $- 1$, wenn $b = b_{,} = 0$ und a wie $a_{,}$ negativ ist; u. s. f.*)

---

*) Es ist kaum nothwendig noch zu bemerken, dass beim Gebrauch der Gleichung 5) nur dann zu ermitteln ist, ob $a^2b_{,}^2 - a_{,}^2b^2$ positiv oder negativ oder 0 ist, wenn man bereits $\underbrace{b} + \underbrace{b_1}$ und $1 + \underbrace{-a^2 - a_{,}^2}\,\underbrace{a}\,\underbrace{a_1}$ verschieden von 0 fand, und dass alsdann zum Zwecke jener Ermittelung nur die Differenz zwischen dem absoluten Werthe von $ab_{,}$ und dem von $a_{,}b$ auszuwerthen ist, wobei in

Ist nun a + bi oder a, + b,i = 0, so kann von dem Stattfinden der Gleichung 5) wegen der Unbestimmtheit von arg. 0 gar nicht und von der Richtigkeit der Gleichung 4) nur dann die Rede sein, wenn k positiv ist, weil sonst die Gleichung Rechnungsformen enthielte, die keine bestimmte Zahlen mehr darzustellen vermögen, und nur dann in einzelnen besondern Fällen eine bestimmte Bedeutung erhalten, wenn ihre Nachbarwerthe bestimmbar sind. Ist aber, wenn a + bi oder a, + b,i = 0, k positiv, dann ist jeder der beiden Theile der Gleichung 4) = 0 und zwar für jeden beliebig gewählten Werth von μ.

Anmerkung. Wie wir die Gleichung 4) bewiesen haben, genau so lässt sich der folgende allgemeinere Lehrsatz beweisen.

Bezeichnen $a, a_1, a_1 \ldots a_n, b, b_1, b_2 \ldots b_n$ reelle Zahlen, 0 nicht ausgeschlossen, hingegen $\tau, \tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n$ positive oder negative ganze Zahlen, 0 inclusive, so hat man die gesonderte Gleichung:

$$ {}_{\tau}(a+bi)^{k+k,i} \cdot {}_{\tau_1}(a,+b,i)^{k+k,i} \cdots {}_{\tau_n}(a_n+b_ni)^{k+k,i} = $$
$$ = {}_{-\mu+\tau+\tau_1+\cdots\tau_n}[(a+bi)(a,+b,i)\cdots a_n+b_ni]^{k+k,i} \qquad 9) $$

wo $\qquad \mu = \mathbf{r}_{\arg(a+bi)+\arg(a,+b,i)+\cdots\arg(a_n+b_ni)}$.

Diese Gleichung findet immer Statt, wenn keine der Complexen $a + bi \cdots a_n + b_n i$ Null ist. Für den Fall aber, da von diesen n Complexen eine oder beliebig viele Nullen sind, muss k positiv sein, und jeder der beiden Theile der gesonderten Gleichung ist alsdann für jeden beliebig gewählten Werth von μ der Null gleich.

Beweis zu B.

Wenn a + bi = 0, so kann jeder Bogen, der zwischen π und $-\pi$ liegt oder $= \pi$ ist, als ein Werth von arg (a + bi) betrachtet werden und es hat daher $-\mathbf{r}_{3\ \arg\ (a\ +\ bi)}$ in diesem Falle die 3 Werthe 0, — 1 und + 1. Die Gleichung 7)

---

unendlich vielen Fällen ohne wirkliche Ausführung der Multiplication erkannt wird, ob die Differenz zwischen diesen absoluten Werthen positiv oder negativ oder 0 ist, um daraus sogleich auf die zu ermittelnde Eigenschaft von $a^2b,^2 - a,^2b^2$ zu schliessen.

existirt daher für diesen Fall nicht, wohl aber die Gleichung 6), da $\tau\sqrt[3]{(a+bi)^3}$, wenn $a + bi = 0$, für jeden Werth von τ gleich 0 ist.

Ist aber $a + bi$ nicht $= 0$, so bestehen folgende Gleichungen:

$$\tau\sqrt[3]{(a+bi)^3} = E^{\frac{1}{3}\tau\log (a+bi)^3} =$$

$$= E^{\frac{1}{3}\left(l\ \text{mod.}\ [(a+bi)^3] + 2\tau\pi i + i\arg[(a+bi)^3]\right)}$$

$$= E^{l\,\text{mod.}(a+bi) + \frac{1}{3}i[2\tau\pi + 2\pi r_{3\arg(a+bi)} + 3\arg(a+bi)]}$$

$$= \text{mod.}(a+bi) \cdot E^{i\arg(a+bi)} \cdot E^{\frac{2}{3}\pi i\left[\tau + r_{3\arg(a+bi)}\right]}$$

$$= (a+bi) \cdot E^{\frac{2}{3}\pi i\left[\tau + r_{3\arg(a+bi)}\right]}$$

Dieser letztere Ausdruck, den wir für $\tau\sqrt[3]{(a+bi)^3}$ fanden, ist, wenn $\tau = -r_{3\arg(a+bi)}$, offenbar $= a + bi$; und es bleibt somit nur noch die Prüfung der Gleichung 7) übrig, und zwar blos für den Fall, da $a + bi$ nicht 0. Suchen wir zu diesem Behufe alle möglichen Fälle auf, in welchen, wenn $a^2 + b^2 > 0$, $r_{3\arg(a+bi)}$ nicht $= 0$, so finden wir in jedem dieser Fälle den ersten Theil von 7) mit dem zweiten Theil übereinstimmend, während in allen übrigen Fällen der zweite Theil wie der erste sich auf 0 zurückzieht. So ist z. B., wenn a positiv, b positiv und $\frac{b}{a} > {}_0\sqrt{3}$, mithin $3a^2 - b^2$ negativ, $\arg(a+bi)$ positiv und über $\frac{\pi}{3}$, daher $-r_{3\arg(a+bi)} = +1$. Aber auch der zweite Theil der 7) ist in diesem Falle, wie man sogleich sieht, $= +1$.

§. 4.

Bezeichnen wieder a, b, a_1 und b_1 reelle Zahlen, 0 nicht ausgeschlossen, hingegen i und $-i$ die beiden Werthe von $\sqrt{-1}$ und bedeutet endlich τ eine Zahl, welche 0 und jede positive oder negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat, so folgt aus der Gleichung

$$x^3 + (a + bi)\,x + a_{,} + b_{,}i = 0. \qquad 10)$$

die vollkommene Gleichung

$$\left.\begin{aligned}
x = {}_0\sqrt[6]{\tfrac{1}{4}(\alpha_,^2+\beta_,^2)}\,\cos\left[\tfrac{2}{3}(\gamma-\tau)\pi+\tfrac{1}{3}\underset{\smile}{\beta_,}\,\text{arc.}\cos\frac{\alpha_,}{{}_0\sqrt{\alpha_,^2+\beta_,^2}}\right]+ \\
+\,{}_0\sqrt[6]{\tfrac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2)}\,\cos\left[\tfrac{2}{3}\,\tau\pi+\tfrac{1}{3}\underset{\smile}{\beta}\,\text{arc.}\cos\frac{\beta}{{}_0\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right]+ \\
+\,i\left[{}_0\sqrt[6]{\tfrac{1}{4}(\alpha_,^2+\beta_,^2)}\sin\left[\tfrac{2}{3}(\gamma-\tau)\pi+\tfrac{1}{3}\underset{\smile}{\beta_,}\,\text{arc.}\cos\frac{\alpha_,}{{}_0\sqrt{\alpha_,^2+\beta_,^2}}\right]+\right. \\
\left.+\,{}_0\sqrt[6]{\tfrac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2)}\,\sin\left[\tfrac{2}{3}\,\tau\pi+\tfrac{1}{3}\underset{\smile}{\beta}\,\text{arc.}\cos\frac{\beta}{{}_0\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right]\right]
\end{aligned}\right\}\quad 11)$$

wo die Bedeutung von α, β, $\alpha_,$, β_1 und γ aus folgenden Gleichungen hervorgeht:

$$\begin{aligned}
\gamma = -\tfrac{1}{8}[\underset{\smile}{\beta}+\underset{\smile}{\beta_1}]\Big[[1+\underbrace{-\alpha^2-\alpha_,^2}\underset{\smile}{\alpha}\,\underset{\smile}{\alpha_,}][1\underset{\smile}{-\beta}\,\underbrace{\underset{\smile}{\alpha}\,\underset{\smile}{\beta}(\alpha^2\beta_,^2-\alpha_,^2\beta^2)}]+[1-\underset{\smile}{\alpha_,}][1-\underset{\smile}{\alpha}]\Big]+ \\
+\,\underset{\smile}{-b}\left[\tfrac{1}{2}[1+\underset{\smile}{a}]+\tfrac{1}{4}[1-\underset{\smile}{a}]\,[1-\underbrace{b\,(b^2-3a^2)}\,\underset{\smile}{-b}]\right]
\end{aligned}\quad 12)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha = -a_, + s && \alpha_, = -a_, - s \\
&\beta = -b_, + \underset{\smile}{q}\,d && \beta_, = -b_, - \underset{\smile}{q}\,d \\
&s = {}_0\sqrt{\tfrac{1}{2}p + {}_0\sqrt{p^2+q^2}} && d = {}_0\sqrt{-\tfrac{1}{2}p + {}_0\sqrt{p^2+q^2}} \\
&\quad p = a_,^2 - b_,^2 + \tfrac{4}{27}a^3 - \tfrac{4}{9}\,a\,b^2 \\
&\quad q = 2a_,b_, + \tfrac{4}{9}a^2b - \tfrac{4}{27}\,b^3
\end{aligned}\right\}\quad 13)$$

Zur Bestimmung von γ kann man sich auch in jedem Falle folgender Gleichung bedienen:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma = {}^{r}[\underset{\smile}{\beta}\,\text{arc.}\cos\frac{\alpha}{{}_0\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+\underset{\smile}{\beta_,}\,\text{arc.}\cos\frac{\alpha_,}{{}_0\sqrt{\alpha_,^2+\beta_,^2}}]+ \\
\underset{\smile}{-b}\left[\tfrac{1}{2}[1+\underset{\smile}{a}]+\tfrac{1}{4}[1-\underset{\smile}{a}]\,[1-\underbrace{b(b^2-3a^2)}\,\underset{\smile}{-b}]\right]
\end{aligned}\right\}\quad 14)$$

Setzt man in der den zweiten Theil der Gleichung 11) bildenden Complexen 0, dann 1 und endlich — 1 für τ, so erhält man sofort 3 völlig bestimmte complexe Zahlen, mit welchen alle übrigen aus andern Substitutionen für τ hervorgehenden

Werthe coincidiren; und diese 3 complexen Zahlen sind die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung 10).

Beweis.

I.

Der Kürze wegen setzen wir:

$$\left.\begin{array}{ll} \sqrt[6]{\tfrac{1}{4}(\alpha_{,}^2+\beta_{,}^2)}_0 = M' & \tfrac{2}{3}(\gamma-\tau)\pi + \tfrac{1}{3}\underset{\smile}{\beta_{,}}\,\text{arc.}\cos\dfrac{\alpha_1}{{}_0\sqrt{a_{,}^2+\beta_{,}^2}} = A'_\tau \\ \sqrt[6]{\tfrac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2)}_0 = M & \tfrac{2}{3}\tau\pi + \tfrac{1}{3}\underset{\smile}{\beta}\,\text{arc.}\cos\dfrac{\alpha}{{}_0\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = A_\tau \end{array}\right\} \quad 15)$$

ferner den zweiten Theil der Gleichung 11), nämlich:

$$M'\cos A'_\tau + M\cos A_\tau + i\,(M^1\sin A'_\tau + M\sin A_\tau) = x_\tau \qquad 16)$$

endlich

$$E^{\frac{2}{3}\pi i} \text{ oder } \tfrac{1}{2}\,(-1 + i\,{}_0\sqrt{3}) = \omega, \text{ mithin } E^{-\frac{2}{3}\pi i}$$
$$\text{oder } \tfrac{1}{2}\,(-1 - i\,{}_0\sqrt{3}) = \omega^2 \qquad 17)$$

und begründen nun folgende Behauptungen: Ist x_ν, das ist die aus der Complexen x_τ durch Setzung des ν für τ entstehende Complexe, wo ν irgend eine positive oder negative ganze Zahl oder 0 bedeutet, ein vollkommen beliebig gewählter Werth von x_τ, so wird jeder der übrigen Werthe von x_τ entweder mit x_ν oder $x_{\nu+1}$ oder $x_{\nu-1}$ übereinstimmen, und es ist dabei statt:

$$x_{\nu+1} = M^1(\cos A'_\nu + i\sin A'_\nu)\,\omega^2 + M(\cos A_\nu + i\sin A_\nu)\,\omega \qquad 18)$$

$$x_{\nu-1} = M'(\cos A'_\nu + i\sin A'_\nu)\,\omega + M(\cos A_\nu + i\sin A_\nu)\,\omega^2 \qquad 19)$$

Vorerst bemerken wir, dass jeder Werth von x_τ sich offenbar entweder durch $x_{\nu+3m}$ oder $x_{\nu+3m-1}$, oder $x_{\nu+3m+1}$, wo m eine positive oder negative ganze Zahl oder 0, ausdrücken lässt. Nun ist nach dem Vorhergehenden leicht einzusehen, dass wenigstens dann, wenn weder $\alpha^2+\beta^2$ noch $\alpha_{,}^2+\beta_{,}^2 = 0$, folgende Gleichungen bestehen:

$$x_{\nu+3m-1} = M' E^{\frac{2}{3}(\gamma-\nu-3m+1)\pi i + \frac{1}{3} i \arg(\alpha_, + \beta_, i)} +$$

$$+ M E^{\frac{2}{3}(\nu+3m-1)\pi i + \frac{1}{3} i \arg(\alpha+\beta i)}$$

$$= M' E^{\frac{2}{3}[\gamma-(\nu-1)]\pi i + \frac{1}{3} i \arg(\alpha_, + \beta_, i)} \cdot E^{-2m\pi i} +$$

$$+ M E^{\frac{2}{3}(\nu-1)\pi i + \frac{1}{3} i \arg(\alpha+\beta i)} E^{2m\pi i}$$

Bekanntlich ist aber $E^{-2m\pi i} = E^{2m\pi i} = 1$ und mithin

$x_{\nu+3m-1} = x_{\nu-1}$. Ferner findet man:

$$x_{\nu-1} = M' E^{\frac{2}{3}(\gamma-\nu)\pi i + \frac{1}{3} i \arg(\alpha_1 + \beta_1 i)} E^{+\frac{2}{3}\pi i} +$$

$$+ M E^{\frac{2}{3}\nu\pi i + \frac{1}{3} i \arg(\alpha+\beta i)} \cdot E^{-\frac{2}{3}\pi i}$$

$$= M' (\cos A'_\nu + i \sin A'_\nu)\,\omega + M(\cos A_\nu + i \sin A_\nu)\,\omega^2$$

Wie wir nun gezeigt haben, dass $x_{\nu+3m-1} = x_{\nu-1} =$ dem zweiten Theil der Gleichung 19), genau so lässt sich beweisen, dass $x_{\nu+3m+1} = x_{\nu+1} =$ dem zweiten Theil der Gleichung 18), und $x_{\nu+3m} = x_\nu$ ist, und damit sind unsere Behauptungen wenigstens für den Fall gerechtfertigt, da $\alpha^2 + \beta^2$ und $\alpha_,^2 + \beta_,^2$ nicht Nullen sind.

Der vorstehende Beweis ist aber auch noch für den Fall vollkommen zulässig, da von den 2 Summen $\alpha^2 + \beta^2$ und $\alpha_,^2 + \beta_,^2$ eine oder beide Nullen sind. Ist z. B. $\alpha_,^2 + \beta_,^2 = 0$, so fassen wir den Ausdruck $\underset{\smile}{\beta}$ arc. cos $\frac{\alpha_,}{{}_0\sqrt{\alpha_,^2 + \beta_,^2}}$ oder den gleichbedeutenden $\arg(\alpha_, + \beta_, i)$ als Darstellung einer unendlich vieldeutigen Grösse auf, die π und jeden Bogen zwischen π und $-\pi$ zu ihren Werthen hat. Aber bei dieser Auffassung ist $M' \sin A'_\tau$ sowohl als auch $M' \sin A'_\tau$ für jeden Werth von τ und γ dennoch nur eindeutig und $= 0$, weil M' in diesem Falle $= 0$ ist, und die Gleichungen unsers Beweises verlieren somit ihre Gültigkeit nicht, wenn von den 2 Summen $\alpha_,^2 + \beta_,^2$ und $\alpha^2 + \beta^2$

nur eine oder jede gleich 0 wäre. Im letztern Falle würden übrigens sämmtliche Werthe von x_τ, sowie auch die zweiten Theile der Gleichung 18) und 19) $= 0$ sein, und unsere Behauptungen keines Beweises bedürfen.

II.

Wir zeigen jetzt das Stattfinden folgender Gleichungen:

$$[M'(\cos A_0' + i \sin A_0')]^3 + [M(\cos A_0 + i \sin A_0)]^3 = -(a, + b, i) \qquad 20)$$

$$M'(\cos A_0' + i \sin A_0') \times M(\cos A_0 + i \sin A_0) += -\tfrac{1}{3}(a + bi) \qquad 21)$$

Es ist zunächst, wenn $\alpha,^2 + \beta,^2 > 0$:

$$[M'(\cos A_0' + i \sin A_0')]^3 = \left[{}_0\sqrt[6]{\tfrac{1}{4}(\alpha,^2 + \beta,^2)} E^{\frac{2}{3}\gamma\pi i + \frac{1}{3} i \arg(\alpha, + \beta, i)} \right]^3$$

$$= \tfrac{1}{2}\, {}_0\sqrt{\alpha,^2 + \beta,^2} \cdot E^{2\gamma\pi i + i \arg(\alpha, + \beta, i)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, {}_0\sqrt{\alpha,^2 + \beta,^2}\; E^{i \arg(\alpha, + \beta, i)}$$

$$= \tfrac{1}{2}(\alpha, + \beta, i)$$

Die Gleichung

$$[M'(\cos A_0' + i \sin A_0')]^3 = \tfrac{1}{2}(\alpha, + \beta, i) \qquad 22)$$

findet auch dann noch statt, wenn $\alpha,^2 + \beta,^2 = 0$, mithin $\alpha, = \beta, = 0$ ist; denn in diesem Falle ist M, oder ${}_0\sqrt{\tfrac{1}{4}(\alpha,^2 + \beta,^2)} = 0$ und daher der erste Theil der Gleichung $= 0$, während der zweite Theil offenbar ebenfalls $= 0$ ist. Auf ganz gleiche Weise finden wir, dass in jedem Falle:

$$[M(\cos A_0 + i \sin A_0)]^3 = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta i) \qquad 23)$$

Aus den beiden Gleichungen 22) und 23) folgt, dass der erste Theil der Gleichung 20), sei nun $\alpha,^2 + \beta,^2 \overline{\gtrless} 0$ und $\alpha^2 + \beta^2 \overline{\gtrless} 0$, mit $\frac{1}{3}[\alpha + \alpha, + (\beta + \beta,) i]$ übereinstimmt, und dieses Produkt ist nach den Gleichungen 13), welche die Bedeutung von α_1, β_1, α und β geben $= -(a, + b,i)$.

Beweisend die Gleichung 21) betrachten wir zuerst den Fall, da $\alpha,^2 + \beta,^2 = 0$, mithin $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ ist. In diesem Falle ist nach den Gleichungen 13) $s = -a,$, $\underset{\smile}{q}\, d = -b,$, mithin vermöge der Bedeutung von s und d

$$p + {}_0\sqrt{p^2 + q^2} = 2a,^2 \text{ und } -p + {}_0\sqrt{p^2 + q^2} = 2b,^2$$

Aus diesen 2 Gleichungen ergibt sich sehr leicht, dass $p = a,^2 - b,^2$ und $q^2 = 4a,^2 b,^2$ ist. Ich behaupte nun, dass immer $q = 2a,b,$ ist. Diess findet offenbar statt, wenn $a,b, = 0$. Ist aber weder $a,$ noch $b, = 0$, so bedenke man, dass $s = -a,$, mithin, da s nach seiner in 13) angegebenen Bedeutung nur positiv sein kann, $a,$ nothwenig negativ sein muss; dass ferner, weil $\underset{\smile}{q}\, d = -b,$ und d wieder nur nach seiner Bedeutung positiv ist, $b,$ positiv sein muss; wenn q negativ, hingegen negativ, wenn q positiv ist. Hieraus folgt offenbar, dass q nicht $= -2a,b,$ sein kann, weil sonst bei dem Umstande, dass $a,$ negativ, q und $b,$ beide zugleich positiv oder zugleich negativ wären, was nach dem Bewiesenen unmöglich ist. Da nun $q^2 = 4\,a,^2 b,^2$ und q nicht $= -2a,b,$ sein kann, so muss q auch in dem Falle, wo $a,b,$ nicht 0, $= 2a,b,$ sein. Sehen wir jetzt auf diejenigen der Gleichungen 13), durch welche die Bedeutung von p und q festgesetzt wird, und beachten, dass nach dem Bewiesenen $p = a,^2 - b,^2$ und $q = 2a,b,$, so finden wir sogleich, dass $\frac{4}{27}a^3 - \frac{4}{9}ab^2 = 0 = \frac{4}{9}a^2b - \frac{4}{27}b^3$, mithin $a^3 = 3ab^2$ und $3a^2b = b^3$, dass daher auch $3a^3b = 9ab^3$ und $3a^3b = ab^3$ ist.

Diese 2 letztern Gleichungen zeigen sofort, dass wenigstens eine der zwei Zahlen a und $b = 0$ sein muss. Ist diess aber der Fall, so beweisen die Gleichungen: $3a^2b = b^3$ und $a^3 = 3a^2b$, dass a und b zugleich Nullen sind. Wie wir nun gezeigt haben, dass $a = b = 0$ sein muss, wenn $\alpha,^2 + \beta,^2 = 0$ ist, genau so lässt sich darthun, dass a und b ebenfalls Nullen sein müssen, wenn $\alpha^2 + \beta^2 = 0$; woraus offenbar folgt, dass die Gleichung 21), wo $M' = {}_0\sqrt[6]{\frac{1}{4}(\alpha,^2+\beta,^2)}$ und $M = \sqrt[6]{\frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2)}$, existirt, wenn von den 2 Summen $\alpha,^2 + \beta,^2$ und $\alpha^2 + \beta^2$ eine oder jede $= 0$ ist.

Wenn nun weder $\alpha_,^2 + \beta_,^2$ noch $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ ist, dann lässt sich die Existenz der Gleichung 21) wie folgt beweisen. Es ist

$$M' (\cos A_0' + i \sin A_0') = \sqrt[6]{\tfrac{1}{4}(\alpha_,^2+\beta_,^2)}\ E^{\frac{2}{3}\gamma\pi i + \frac{1}{3} i \beta_, \text{arc.cos} \frac{\alpha_,}{{}_0\sqrt{\alpha_,^2+\beta_,^2}}}$$

$$= {}_0\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}\ E^{\frac{1}{3}[l\ {}_0\sqrt{\alpha_,^2+\beta_,^2} + 2\gamma\pi i + i \arg(\alpha_, + \beta_, i)]}$$

$$= {}_0\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}\ E^{\frac{1}{3}[l \bmod.(\alpha_, + \beta_, i) + i(2\gamma\pi + \arg(\alpha_, + \beta_, i))]}$$

$$= {}_0\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} \cdot E^{\frac{1}{3}\gamma \log(\alpha_, + \beta_, i)} = {}_0\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} \cdot {}_\gamma(\alpha_, + \beta_, i)^{\frac{1}{3}}$$

Ebenso findet man:

$$M(\cos A_0 + i \sin A_0) = {}_0\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} \cdot {}_0(\alpha_, + \beta_, i)^{\frac{1}{3}}$$

Es ist demnach:

$$M'(\cos A_0' + i \sin A_0') \times M(\cos A_0 + i \sin A_0) =$$

$$= {}_0\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}\ {}_\gamma(\alpha_, + \beta_, i)^{\frac{1}{3}} \cdot {}_0(\alpha + \beta i)^{\frac{1}{3}} \tag{24}$$

Nun hat man nach §. 3. A) folgende Gleichung:

$${}_\gamma(\alpha_, + \beta_, i)^{\frac{1}{3}} \cdot {}_0(\alpha + \beta i)^{\frac{1}{3}} = {}_{\gamma\text{-}\mu}[(\alpha_, + \beta_, i)(\alpha + \beta i)]^{\frac{1}{3}} \tag{25}$$

wo
$$\mu = {}^\gamma\!\arg(\alpha_, + \beta_, i) + \arg(\alpha + \beta i) \tag{26}$$

und nach den Gleichungen 13), welche die Bedeutung von $\alpha_,$, $\beta_,$, α, β, s und d geben:

$$(\alpha_, + \beta_, i)(\alpha + \beta i) = [-a_, - b_, i - (s + \underset{\smile}{q}d)i][-a_, - b_, i + (s + \underset{\smile}{q}d)i]$$

$$= (a_, + b_, i)^2 - (s^2 - d^2 + 2\underset{\smile}{q}dsi)$$

$$= (a_, + b_, i)^2 - (p + 2\underset{\smile}{q}i\ {}_0\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2}) = (a_, + b_, i)^2 - (p + qi)$$

Da nun $(a_, + b_, i)^2 + \frac{4}{27}(a + bi)^3$ nur nach der in 13) enthaltenen Bedeutung von p und q, mit $p + qi$ übereinstimmt, so ist $(\alpha_, + \beta_, i)(\alpha + \beta i) = \frac{4}{27}(-a - bi)^3$, und man darf daher aus der Gleichung 25) auf folgende schliessen:

$$ {}_{\gamma}(\alpha_{,} + \beta_{,}\mathrm{i})^{\frac{1}{3}} \cdot {}_{0}(\alpha + \beta\mathrm{i})^{\frac{1}{3}} = {}_{\gamma-\mu}\left[\tfrac{4}{27}(-\mathrm{a} - \mathrm{bi})^{3}\right]^{\frac{1}{3}} \qquad 27) $$

Nach §. 3. A) ist aber

$$ {}_{0}\left(\tfrac{4}{27}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot {}_{\gamma-\mu}[(-\mathrm{a}-\mathrm{bi})^{3}]^{\frac{1}{3}} = {}_{\gamma-\mu-\mu_{,}}\left[\tfrac{4}{27}(-\mathrm{a}-\mathrm{bi})^{3}\right]^{\frac{1}{3}} $$

wo $$ \mu_{,} = {}^{\mathrm{r}}\arg\tfrac{4}{27} + \arg[(-\mathrm{a}-\mathrm{bi})^{3}] $$

Bedenken wir nun, dass $\arg\frac{4}{27} = 0$ und $\arg[(-\mathrm{a}-\mathrm{bi})^{3}] = \pi$ oder zwischen π und $-\pi$ und jedenfalls eindeutig ist, weil vermöge der Gleichung 27) und der Voraussetzung, nach welcher weder $\alpha_{,} + \beta_{,}\mathrm{i}$ noch $\alpha + \beta\mathrm{i} = 0$ ist, $-\mathrm{a} - \mathrm{bi}$ gewiss nicht Null sein kann, so folgt hieraus offenbar, dass $\mu_{,} = 0$ ist, und wir dürfen desswegen für die Gleichung 27) folgende setzen:

$$ {}_{\gamma}(\alpha_{,} + \beta_{,}\mathrm{i})^{\frac{1}{3}} \cdot {}_{0}(\alpha + \beta\mathrm{i})^{\frac{1}{3}} = {}_{0}\sqrt[3]{\tfrac{4}{27}} \cdot {}_{\gamma-\mu}[(-\mathrm{a}-\mathrm{bi})^{3}]^{\frac{1}{3}} \qquad 28) $$

Nun ist nach einem bekannten Lehrsatz ${}^{\mathrm{r}}\arg(\alpha+\beta\mathrm{i}) + \arg(\alpha_{,}+\beta_{,}\mathrm{i})$ einerseits $= {}^{\mathrm{r}}\underset{\smile}{\beta}\,\mathrm{arc.\,cos}\,\dfrac{\alpha}{{}_{0}\sqrt{\alpha^{2}+\beta^{2}}} + \underset{\smile}{\beta_{,}}\,\mathrm{arc.\,cos}\,\dfrac{\alpha_{,}}{{}_{0}\sqrt{\alpha_{,}^{2}+\beta_{,}^{2}}}$, und anderseits nach der Gleichung 5) in §. 3:

$$ = -\tfrac{1}{8}(\underset{\smile}{\beta} + \underset{\smile}{\beta_{,}})[(1+\underbrace{-\alpha_{,}^{2}-\alpha^{2}}\underbrace{\alpha\alpha_{,}})(1-\underset{\smile}{\beta}\,\underset{\smile}{\alpha\beta}\underbrace{(\alpha^{2}\beta_{,}^{2}-\alpha_{,}^{2}\beta^{2})}) + (1-\underset{\smile}{\alpha})(1-\underset{\smile}{\alpha_{,}})] $$

woraus mit Zuziehung der Gleichungen 12) und 14) und der Bedeutung von μ sehr leicht folgt, dass

$$ \gamma - \mu = -\underset{\smile}{\mathrm{b}}\left[\tfrac{1}{2}[1+\underset{\smile}{\mathrm{a}}] + \tfrac{1}{4}[1-\underset{\smile}{\mathrm{a}}][1-\underbrace{\mathrm{b}(\mathrm{b}^{2}-3\mathrm{a}^{2})}-\underset{\smile}{\mathrm{b}}]\right] $$

Der zweite Theil dieser Gleichung ist, da eben $-\mathrm{a}-\mathrm{bi}$ in dem zu untersuchenden Falle nicht 0 sein kann, in Folge der Gleichung 7) in §. 3 $= -\,\mathrm{r}_{\arg(-\mathrm{a}-\mathrm{bi})}$ und es folgt daher aus der Gleichung 28) nach Anwendung der Gleichung 6) in §. 3, dass

$$ {}_{\gamma}(\alpha_{,} + \beta_{,}\mathrm{i})^{\frac{1}{3}} \cdot {}_{0}(\alpha + \beta\mathrm{i})^{\frac{1}{3}} = {}_{0}\sqrt[3]{\tfrac{4}{27}}\,(-\mathrm{a}-\mathrm{bi}) $$

Führt man nun den zweiten Theil dieser Gleichung in die Gleichung 24) ein, und setzt $\frac{1}{3}$ für ${}_{0}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot {}_{0}\sqrt[3]{\frac{4}{27}}$, so erhält man die Gleichung 21), die zu beweisen war.

III.

Zum Zwecke einer einfachern Bezeichnung setzen wir jetzt:

$$M'(\cos A'_\nu + i \sin A'_\nu) = P'_\nu \quad \text{und} \quad M(\cos A_\nu + i \sin A_\nu) = P_\nu$$

mithin: $$x_\nu = P'_\nu + P_\nu$$

und beweisen folgende Gleichheiten:

$$P'_0 + P_0 + P'_0\omega + P_0\omega^2 + P'_0\omega^2 + P_0\omega = 0 \qquad 29)$$

$$(P'_0 + P_0)(P'_0\omega + P_0\omega^2) + (P'_0 + P_0)(P'_0\omega^2 + P_0\omega) +$$
$$+ (P'_0\omega + P_0\omega^2)(P'_0\omega^2 + P_0\omega) = a + bi \qquad 30)$$

$$(P'_0 + P_0)(P'_0\omega + P_0\omega^2)(P'_0\omega^2 + P_0\omega) = -(a_, + b_,i) \qquad 31)$$

Den ersten Theil der Gleichung 29) findet man sofort $= (P'_0 + P_0)(1 + \omega + \omega^2)$, mithin $= 0$, da, wie leicht einzusehen, $1 + \omega + \omega^2 = 0$ ist.

Den ersten Theil der Gleichung 30) findet man durch Ausführung der Multiplikationen gleich $(\omega + \omega^2 + \omega^3)(P'^2_0 + P^2_0) + (2\omega + \omega^4 + 3\omega^2) P'_0 P_0$. Da nun $\omega^4 = \omega$ und $\omega + \omega^2 = -1$, so zeigt sich dieser erste Theil von 30) $= -3P'_0 P_0$, was nach der bewiesenen Gleichung 21) $= a + bi$ ist.

Berechnen wir endlich auf gleiche Weise den ersten Theil der Gleichung 31), so finden wir diesen gleich der Summe $P'^3_0 + P^3_0$, die nach der Gleichung 20) mit $-(a_, + b_,i)$ übereinstimmt.

IV.

Aus den Gleichungen 29), 30) und 31) ergibt sich sehr leicht, dass

$$[x - (P'_0 + P_0)][x - (P'_0\omega + P_0\omega^2)][x - (P'_0\omega^2 + P_0\omega)] =$$
$$= x^3 + (a + bi)x + a_, + b_,i \qquad 32)$$

Nun weiss man aus I., dass wenn x_ν irgend ein Werth von x_τ ist, alle übrigen Werthe von x_τ entweder mit $x_{\nu+1}$ oder $x_{\nu-1}$ coincidiren, und dass $x_{\nu+1} = P'_\nu\omega^2 + P_\nu\omega$, $x_{\nu-1} = P'_0\omega + P_0\omega^2$ ist. Hieraus folgt, dass, da $P'_0 + P_0$ oder x_0 ein Werth von x_τ, alle übrigen Werthe von x_τ entweder mit $x_1 = P'_0\omega^2 + P_0\omega$ oder mit $x_{-1} = P'_0\omega + P_0\omega^2$ übereinstimmen müsssen. Da nun x_0, x_1, x_{-1} einerseits die sämmtlichen Werthe von x_τ, und anderseits nach der Gleichung 32) die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung 10) sind, so folgt hieraus die Wahrheit der Behauptungen unsers Lehrsatzes.

Anmerkung. Die Fälle, in welchen entweder nur eine der zwei Summen $\alpha_,^2 + \beta_,^2$ und $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, oder jede $= 0$ ist, können nur dann eintreten, wenn $a = b = 0$ ist, da nach dem bereits Bewiesenen $a = b = 0$ sein muss, wenn $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, und auch dann, wenn $\alpha_,^2 + \beta_,^2 = 0$ vorausgesetzt wird.

Ist nun $a = b = 0$

und $a_,$ positiv,	so ist	$\alpha_, = -2a$,	$\beta_, = -2b$,	$\alpha = 0$	$\beta = 0$
„ $a_,$ negativ,	„ „	$\alpha_, = 0$	$\beta_, = 0$	$\alpha = -2a$,	$\beta = -2b$,
„ $a_, = 0$ u. $b_, = 0$,	„ „	$\alpha_, = 0$	$\beta_, = 0$	$\alpha = 0$	$\beta = 0$
„ $a_, = 0$ u. $b_,$ pos.,	„ „	$\alpha_, = 0$	$\beta_, = -2b$,	$\alpha = 0$	$\beta = 0$
„ $a_, = 0$ u. $b_,$ neg.,	„ „	$\alpha_, = 0$	$\beta_, = 0$	$\alpha = 0$	$\beta = -2b$,

Man findet nämlich sehr leicht, wenn $a = b = 0$, dass $s = {}_0\sqrt{a_,^2} = \underbrace{a_,}\, a_,$, $d = {}_0\sqrt{b_,^2} = \underbrace{b_,}\, b_,$, $q = 2a_,b_,$; mithin $\alpha_, = -a_, - \underbrace{a_,}\, a_,$, $\beta_, = -b_, - \underbrace{a_,b_,}\, \underbrace{b_,}\, b_,$, $\alpha = -a_, + \underbrace{a_,}\, a_,$, $\beta = -b_, + \underbrace{a_,b_,}\, \underbrace{b_,}\, b_,$ ist. Ausser den angegebenen 5 Fällen gibt es offenbar keine mehr, in welchen $\alpha_,^2 + \beta_,^2$ oder $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ wäre. In allen diesen Fällen wird nach der Gleichung 12) $\gamma = 1$, während die Gleichung 14) mit Ausnahme des zweiten Falles das γ immer unbestimmt lässt und im zweiten Falle nur dann eine bestimmte Zahl und zwar 1 gibt, wenn $a_,$ negativ und $b_, = 0$ ist. Diess beweist aber keineswegs die Unzulässigkeit der Gleichung 14) für einige Fälle, denn im dritten Falle ist x_τ immer $= 0$ und völlig unabhängig von γ, so dass man in diesem Falle in 11) für γ jede positive oder negative ganze Zahl oder 0 setzen darf. Diese Unabhängigkeit findet aber auch in den übrigen 4 Fällen statt; denn nach 11) ist im 1^{ten} u. 4^{ten} Falle $x_\tau = {}_0\sqrt[6]{a_,^2 + b_,^2}\,E^{\frac{1}{3}\,i[2(\gamma-\tau)\pi + \arg(-a_,-b_,i)]}$

„ 2^{ten} „ 5^{ten} „ $x_\tau = {}_0\sqrt[6]{a_,^2 + b_,^2}\,E^{\frac{1}{3}\,i[2\tau\pi + \arg(-a_,-b_,i)]}$

Nun bedeutet τ die 0 und jede posisive oder negative ganze Zahl; und dasselbe bedeutet $\gamma-\tau$, wie man auch γ annehmen mag, woraus sogleich folgt, dass x_τ nicht bloss im zweiten und fünften, sondern auch im ersten und vierten Falle seine Abhängigkeit von γ verliert, und somit auch die beiden Ausdrücke für x_τ vollkommen gleichbedeutend sind. Wir bemerken nur noch, dass jeder dieser Ausdrücke auch

$$= E^{\frac{1}{3}[l\,{}_0\sqrt{a_,^2+b_,^2}+2\tau\pi i+i\arg(-a_,-b_,i)]} = {}_\tau(-a_,-b_,i)^{\frac{1}{3}} = {}_\tau\sqrt[3]{-a_,-b_,i}\,,$$

also jeden der Werthe vorstellt, deren Cubus $= - a - bi$ ist, wie es in diesen Fällen sein soll.

§. 5.

Wir haben im Vorhergehenden gesehen, dass die 3 Wurzeln der Gleichung 10) folgende sind:

$$x_0 = P_0' + P_0 = M'\cos A_0' + M\cos A_0 + i(M'\sin A_0' + M\sin A_0) \qquad 33)$$

$$x_1 = P_0'\omega^2 + P_0\omega = -\tfrac{1}{2}[M'\cos A_0' + M\cos A_0 - (M'\sin A_0' - M\sin A_0)\,{}_0\sqrt{3}] +$$
$$-\tfrac{1}{2}\,i[(M'\cos A_0' - M\cos A_0)\,{}_0\sqrt{3} + M'\sin A_0' + M\sin A_0] \qquad 34)$$

$$x_{-1} = P_0'\omega + P_0\omega^2 = -\tfrac{1}{2}[M'\cos A_0' + M\cos A_0 + (M'\sin A_0' - M\sin A_0)\,{}_0\sqrt{3}] +$$
$$+\tfrac{1}{2}\,i[(M'\cos A_0' - M\cos A_0)\,{}_0\sqrt{3} - (M'\sin A_0' + M\sin A_0)] \qquad 35)$$

Für die Auswerthung der Wurzeln der Gleichung 10) in dem Falle, da die Coefficienten bestimmte Zahlen sind, bemerken wir, dass wenn x_0 nach 11) ausgerechnet ist, x_1 und x_{-1} im Allgemeinen ziemlich schneller durch Berechnung der dritten Theile der Gleichungen 33) und 34) gefunden werden, als durch Auswerthung der Ergebnisse der Einsetzungen von 1 und -1 für τ in 11). Auch wird man, da $\arg(\alpha_, + \beta_, i)$ und $\arg(\alpha + \beta i)$ für die Bestimmung von x_0 jedenfalls ausgerechnet werden müssen, zur Bestimmung des γ die Gleichung 14) der Gleichung 15) in den meisten Fällen vorziehen. Endlich wird man immer nur zwei Wurzeln ausrechnen, da die dritte stets das Entgegengesetzte von der Summe der beiden andern sein muss.

Wir gehen nun dazu über, die Wurzeln folgender Gleichung zu berechnen:

$$x^3 - (1+6i)x^2 - (15+4i)x - (5-10i) = 0. \qquad 36)$$

Sind x_0, x_1 und x_{-1} die Wurzeln der Gleichung

$$(x - \tfrac{1}{3}a)^3 + a(x - \tfrac{1}{3}a)^2 + b(x - \tfrac{1}{3}a) + c = 0 \qquad 37)$$

wo a, b und c beliebige complexe Zahlen bezeichnen, so ist nur nach der Erklärung einer Wurzel $(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})$ für jeden Werth von x identisch mit dem ersten Theil der Gleichung 37), und diese Identität ist daher immer noch vorhanden, wenn in diesen beiden gleichen Ausdrücken $x + \frac{1}{3}a$ für x gesetzt wird, woraus folgt, dass $x_0 - \frac{1}{3}a$, $x_1 - \frac{1}{3}a$ und $x_{-1} - \frac{1}{3}a$ die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ sind.

Wir erhalten demnach die Wurzeln der Gleichung 36), indem wir $(\frac{1}{3} + 2i)$ zu jeder der Wurzeln folgender Gleichung addiren

$$(x + \tfrac{1}{3} + 2i)^3 - (1+6i)(x + \tfrac{1}{3} + 2i)^2 - (15+4i)(x + \tfrac{1}{3} + 2i) - (5-10i) = 0 \qquad 38)$$

Nun findet man:

$$(x + \tfrac{1}{3} + 2i)^3 = x^3 + (1+6i)x^2 - (\tfrac{35}{3} - 4i)\,x - \tfrac{107}{27} - \tfrac{22}{3}\,i$$

$$(-1 + 6i)(x + \tfrac{1}{3} + 2i)^2 = \quad -(1+6i)x^2 + (\tfrac{70}{3} - 8i)\,x + \tfrac{107}{9} + 22\,i$$

$$(-15 + 4i)(x + \tfrac{1}{3} + 2i) = \qquad -(15+4i)\,x + \;3\; - \tfrac{94}{3}\,i$$

und man kann daher statt der Gleichung 38) folgende auflösen:

$$x^3 - (\tfrac{10}{3} + 8i)\;x + \tfrac{160}{27} - \tfrac{20}{3}\,i = 0 \qquad 39)$$

Nun ist in diesem Falle nach den Gleichungen 13):

$$p = \left(\tfrac{160}{27}\right)^2 - \left(\tfrac{20}{3}\right)^2 - \tfrac{4}{27}\left(\tfrac{10}{3}\right)^3 + \tfrac{4}{9} \cdot \tfrac{10}{3}\,8^2 = 80$$

$$q = -2 \cdot \tfrac{160}{27} \cdot \tfrac{20}{3} - \tfrac{4}{9} \cdot \left(\tfrac{10}{3}\right)^2 8 + \tfrac{4}{27} \cdot 8^3 = -\tfrac{128}{3}, \text{ mithin } \underset{\smile}{q} = -1$$

$$s = {}_0\sqrt{\tfrac{1}{2}\left[+80 + {}_0\sqrt{80^2 + \left(\tfrac{128}{3}\right)^2}\,\right]} = \frac{16}{{}_0\sqrt{3}} = 9{,}237604$$

$$d = {}_0\sqrt{\tfrac{1}{2}\left[-80 + {}_0\sqrt{80^2 + \left(\tfrac{128}{3}\right)^2}\,\right]} = \frac{4}{{}_0\sqrt{3}} = 2{,}309401$$

$$\alpha_, = -\frac{160}{27} - 9{,}237604 = -\ 15{,}163530$$

$$\beta_, = +\frac{20}{3} + 2{,}309401 = +\ 8{,}976067$$

$$\alpha = -\frac{160}{27} + 9{,}237604 = +\ 3{,}311678$$

$$\beta = +\frac{20}{3} - 2{,}309401 = +\ 4{,}357266$$

$$M' = {}_0\sqrt[6]{\tfrac{1}{4}(15{,}163530^2 + 8{,}976067^2)} = 2{,}065384$$

$${}_0\sqrt{\alpha_,^2 + \beta_,^2} = 17{,}621076$$

$$M = {}_0\sqrt[6]{\tfrac{1}{4}(3{,}311678^2 + 4{,}357266^2)} = 1{,}398717$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 5{,}472931$$

$$\underbrace{\beta_,}\ \text{arc.}\cos\frac{\alpha_,}{{}_0\sqrt{\alpha_,^2+\beta_,^2}} = +\text{arc.}\cos\frac{-15{,}163530}{17{,}621076} = \text{arc.}\cos -0{,}8605338 =$$
$$= 149^\circ\, 22'\, 35'',7$$

$$\underbrace{\beta}\ \text{arc.}\cos\frac{\alpha}{{}_0\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = +\text{arc.}\cos\frac{3{,}311678}{5{,}472931} = \text{arc.}\cos 0{,}6051014 =$$
$$= 52^\circ\, 45'\, 49'',9$$

$\gamma = 0$. Es ist nämlich nach der Gleichung 14):

$$\mathrm{r}_{149^\circ\, 22'\, 35'',7 + 52^\circ\, 45'\, 49'',9} = -1\,;$$

ferner, weil a negativ: $(1 + \underbrace{a}) = 0$, $(1 - \underbrace{a}) = 2$; endlich, weil b negativ und $(b^2 - 3a^2)$ oder $[8^2 - 3 \cdot (\frac{10}{3})^2]$ sich sofort positiv zeigt, $\underbrace{-b} = +1$, $b(b^2 - 3a^2)$ negativ, mithin $\underbrace{b(b^2 - 3a^2)}\underbrace{-b} = -1$; woraus folgt, dass jetzt $\gamma = -1 + 1 \cdot [0 + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2] = 0$ ist. Berechnet man γ nach der Gleichung 12), so findet man den zweiten Summanden von γ, wie vorhin, $= 1$; und da man sogleich sieht, dass $\alpha^2\beta_,^2$ nahezu $= 27^2$, hingegen $\alpha_,^2\beta^2$ annähernd $= 60^2$, mithin $\alpha^2\beta_,^2 - \alpha_,^2\beta^2$ negativ ist, so wird der erste Summand $= -\frac{1}{8} \cdot 2[2 \cdot 2 + 2 \cdot 0] = -1$, und somit wieder $\gamma = 0$.

$$\cos A_0' = \cos\left[\tfrac{1}{3}(149^\circ\, 22'\, 35'',7)\right] = \cos(49^\circ\, 47'\, 31'',9) = 0{,}6455617$$

$$\sin A_0' = \sin(49^\circ\, 47'\, 31'',9) = 0{,}7637080$$

$$\cos A_0 = \cos\left[\tfrac{1}{3}(52^\circ\, 45'\, 49'',9)\right] = \cos(17^\circ\, 35'\, 16'',6) = 0{,}9532543$$

$$\sin A_0 = \sin 17^\circ\, 35'\, 16'',6 = 0{,}3021693.$$

$$M' \cos A'_0 = 2{,}065384 \times 0{,}6455617 = 1{,}333333$$

$$M \cos A_0 = 1{,}398717 \times 0{,}9532543 = 1{,}333333$$

$$M' \sin A'_0 = 2{,}065334 \times 0{,}7637080 = 1{,}577350$$

$$M \sin A_0 = 2{,}065384 \times 0{,}3021693 = 0{,}422650$$

$$x_0 = 1{,}333333 + 1{,}333333 + i(1{,}57735 + 0{,}42265) = 2\tfrac{2}{3} + 2i$$

$$M' \cos A'_0 + M \cos A_0 = 2\tfrac{2}{3}$$

$$(M' \cos A'_0 - M \cos A_0)_0 \sqrt{3} = 0$$

$$M' \sin A'_0 + M \sin A_0 = 2$$

$$(M' \sin A'_0 - M \sin A_0)_0 \sqrt{3} = 1{,}1547 \cdot 1{,}7320508 = 2$$

$$x_1 = -\tfrac{1}{2}[2\tfrac{2}{3} - 2] - \tfrac{1}{2} i [0 + 2] = -\tfrac{1}{3} - i$$

$$x_{-1} = -\tfrac{1}{2}[2\tfrac{2}{3} + 2] + \tfrac{1}{2} i [0 - 2] = -\tfrac{7}{3} - i = -(x_0 + x_1)$$

Addirt man nun zu jeder der drei Wurzeln x_0, x_1, x_{-1} der Gleichung 39) die Complexe $\frac{1}{3} + 2i$, so erhalten wir nach dem bereits Bewiesenen die Wurzeln der Gleichung 36), nämlich

$$3 + 4i, \quad + i \quad \text{und} \quad -2 + i$$

und in der That ist der erste Theil der Gleichung 36)

$$= [x - (3 + 4i)]\,(x - i)\,[x - (-2 + i)].$$

§. 6.

Nach dem Bewiesenen ist klar, dass der zweite Theil der Gleichung 11) die Wurzeln der Gleichung 10) in allen möglichen Fällen sofort in der Form complexer Zahlen in völlig bestimmter Weise gibt, wobei es sich übrigens von selbst versteht, dass in speciellen Fällen jener Ausdruck sich auf eine einfachere Form reduciren lässt. Diese Reduction wollen wir vornehmen für den Fall, da $b = b_{,} = 0$. Hiebei betrachten wir folgende Fälle:

I. Es sei $a_{,}^2 + \frac{4}{27} a^3$ positiv.

In diesem Falle findet man $s = {}_0\sqrt{a_{,}^2 + \frac{4}{27} a^3}$, $d = 0$, mithin

$$\alpha_{,} = -\,a_{,} - {}_0\sqrt{a_{,}^2 + \tfrac{4}{27}\,a^3}$$

$$\alpha = -\,a_{,} + {}_0\sqrt{a_{,}^2 + \tfrac{4}{27}\,a^3}$$

$$\beta = \beta_{,} = 0$$

$$\gamma = -\tfrac{1}{4}\,[1 - \alpha_{,}]\,[1 - \alpha] + \tfrac{1}{2}\,(1 + a)$$

Den reellen Werth von $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\alpha_{,}}$ wollen wir der Kürze wegen durch R_1 und den von $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\alpha}$ durch R andeuten.

Wenn nun a positiv oder $= 0$, so wird x_0, d. i. der zweite Theil von 11) nach der Setzung von 0 für τ gleich der Summe $-\sqrt[6]{\frac{1}{4}\alpha_{,}^2} + {}_0\sqrt[6]{\frac{1}{4}\alpha^2}$. Diese Gleichheit findet man sogleich, wenn a positiv; ist aber $a = 0$ und $a_{,}$ negativ, so wird $\alpha_{,} = 0$; und ist endlich $a = 0$ und $a_{,}$ positiv, so ist $\alpha = 0$, woraus folgt, dass jene Gleichheit auch in den zwei letztern Fällen statt findet. Nun ist $-\,{}_0\sqrt[6]{\frac{1}{4}\alpha_{,}^2} = -\,{}_0\sqrt[3]{{}_0\sqrt{\frac{1}{4}\alpha_{,}^2}} = -\,{}_0\sqrt[3]{\frac{1}{2}\alpha_{,}\alpha}$, und dieser Ausdruck ist, da $\alpha_{,}$ in unserm speziellen Falle nur negativ oder 0 sein kann, der reelle Werth von $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\alpha_{,}}$. Ebenso findet man, da α nur positiv oder 0 sein kann, ${}_0\sqrt[6]{\frac{1}{4}\alpha^2} =$ dem reellen Werth von $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\alpha}$. Wenn also a positiv oder $= 0$, so ist immer $x_0 =$ der Summe der reellen Werthe von $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\alpha_{,}}$ und $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\alpha} = R_{,} + R$.

Ist ferner a negativ und $a_{,}$ positiv, so wird $\alpha_{,}$ und α negativ, $\gamma = -1$ und daher $x_{,} = -\,{}_0\sqrt[6]{\frac{1}{4}\alpha_{,}^2} - {}_0\sqrt[6]{\frac{1}{4}\alpha^2}$, wo, weil $\alpha_{,}$ und α negativ, $-\,{}_0\sqrt[6]{\frac{1}{4}\alpha_{,}^2}$ und $-\,{}_0\sqrt[6]{\frac{1}{4}\alpha^2}$ wieder die reellen Werthe von $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\alpha_{,}}$ und $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\alpha}$ sind; und es ist daher $x_{,} = R + R_1$.

Ist endlich a negativ und $a_,$ negativ, so sind $\alpha_,$ und α positiv, $\gamma = 0$; mithin $x_0 = R + R_,$.

In jedem dieser drei Fälle sind somit die Wurzeln folgende Summen:

$$R_, + R, \quad R_,\omega + R\omega^2 \quad \text{und} \quad R_,\omega^2 + R\omega$$

oder

$$R_, + R, \; -\tfrac{1}{2}(R_,+R) + \tfrac{1}{2}i(R_, - R)_0\sqrt{3} \text{ u. } -\tfrac{1}{2}(R_,+R) - \tfrac{1}{2}(R_, - R)_0\sqrt{3}$$

wo R und $R_,$ in keinem Falle einander gleich sein können.

Will man R und $R_,$ in der Form eines Radikals ausdrücken, so dienen dazu folgende Gleichungen:

$$R_, = {}_{\frac{1}{2}[1 + \underbrace{a_,(1-a)}]}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(-a_, - {}_0\sqrt{a_,^2 + \tfrac{4}{27}a^3})}$$

$$R = {}_{\frac{1}{2}[1 - \underbrace{-a_,(1-a)}]}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(-a_, + {}_0\sqrt{a_,^2 + \tfrac{4}{27}a^3})}$$

deren Richtigkeit auch für den Fall, da $a_,^2 + \frac{4}{27}a^3 = 0$ ist, leicht erkannt wird.

II. Es sei $a_,^2 + \frac{4}{27}a^3 = 0$

In diesem Falle ist

$$\alpha_, = \alpha = -a_,, \; \beta = \beta_, = 0, \; \gamma = -\tfrac{1}{2}[1 - \underbrace{-a_,}] + \tfrac{1}{2}[1 + \underbrace{a}].$$

Den reellen Werth von $\sqrt[3]{\frac{1}{2}a_,}$, nämlich $\underbrace{a_,}{}_0\sqrt[3]{\frac{1}{2}\underbrace{a_,}a_,}$, bezeichnen wir mit r.

Wenn nun $a_,$ positiv, mithin a negativ und $\gamma = -1$, so findet man $x_, = -{}_0\sqrt[6]{\frac{1}{4}a_,^2} - {}_0\sqrt[6]{\frac{1}{4}a_,^2} = -2\,{}_0\sqrt[3]{\frac{1}{2}a_,} = -2r$.

Wenn $a_,$ negativ, mithin a negativ und $\gamma = 0$, so wird $x_0 = 2\,{}_0\sqrt[6]{\frac{1}{4}a_,^2} = 2\,{}_0\sqrt[3]{-\frac{1}{2}a_,} = -2r$.

Wenn endlich $a_, = 0$ und daher auch $a = 0$, so ist jeder Werth von $x_\tau = 0 = -2r$.

In jedem dieser Fälle ist also ein Werth von $x_\tau = -r + (-r)$; und demnach sind auch in jedem Falle: $-2r$, $(-r\omega - r\omega^2)$ und $(-r\omega^2 - r\omega)$, oder $-2r$, r und r die geforderten 3 Wurzeln.*)

III. Es sei $a_,^2 + \frac{4}{27}a^3$ negativ.

In diesem Falle ist

$$p = a_,^2 + \tfrac{4}{27}a^3,\quad q = 0,\quad s = 0,\quad d = {}_0\sqrt{-(a_,^2 + \tfrac{4}{27}a^3)},\ \text{mithin:}$$

$$\alpha_, = -a, \qquad \alpha = -a,$$

$$\beta_, = -{}_0\sqrt{-a_,^2 - \tfrac{4}{27}a^3} \qquad \beta = +{}_0\sqrt{-a_,^2 - \tfrac{4}{27}a^3}$$

$$\sqrt[6]{{}_0\alpha_,^2 + \beta_,^2} = \sqrt[6]{{}_0\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt[6]{{}_0 -\tfrac{4}{27}a^3} = {}_0\sqrt{-\tfrac{1}{3}a}$$

$${}_0\sqrt{\alpha_,^2 + \beta_,^2} = {}_0\sqrt{-\tfrac{4}{27}a^3} = {}_0\sqrt{(-\tfrac{1}{3}a)\tfrac{4}{9}a^2} = -\tfrac{2}{3}a\,{}_0\sqrt{-\tfrac{1}{3}a},$$

weil a negativ. — Da endlich β positiv, $\beta_,$ negativ, mithin $\beta + \beta_, = 0$ und a negativ, $b = 0$; so ist $\gamma = 0$, woraus sogleich folgt, dass der zweite Theil der Gleichung 11), nämlich:

$$x_\tau = 2\,{}_0\sqrt{-\tfrac{1}{3}a}\cos\left[\tfrac{2}{3}\tau\pi + \tfrac{1}{3}\,\text{arc.}\cos\frac{3a_,}{2a\,{}_0\sqrt{-\tfrac{1}{3}a}}\right]$$

Die verlangten Wurzeln sind also in diesem Falle:

$$x_0 = 2\,{}_0\sqrt{-\tfrac{1}{3}a}\cos\left[\tfrac{1}{3}\,\text{arc.}\cos\frac{3a_,}{2a\,{}_0\sqrt{-\tfrac{1}{3}a}}\right]$$

$$x_, = 2\,{}_0\sqrt{-\tfrac{1}{3}a}\cos\left[\tfrac{2}{3}\pi + \tfrac{1}{3}\,\text{arc.}\cos\frac{3a_,}{2a\,{}_0\sqrt{-\tfrac{1}{3}a}}\right] =$$

$$-2\,{}_0\sqrt{-\tfrac{1}{3}a}\cos\left[\tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{3}\,\text{arc.}\cos\frac{3a_,}{2a\,{}_0\sqrt{-\tfrac{1}{3}a}}\right]$$

$$x_{-1} = -2\,{}_0\sqrt{-\tfrac{1}{3}a}\cos\left[\tfrac{1}{3}\pi + \tfrac{1}{3}\,\text{arc.}\cos\frac{3a_,}{2a\,{}_0\sqrt{-\tfrac{1}{3}a}}\right] = -(x_0 + x_,)$$

*) Wenn $a_,^2 + \frac{4}{27}a^3 = 0$, so ist offenbar R und $R_, = -r$, und wir dürfen daher die drei Ausdrücke, welche wir für die 3 Wurzeln im Fall I. fanden, auch als Darstellung der Wurzeln für den Fall II. erklären.

§. 7.

Bezeichnen a und b reelle Zahlen, 0 inclusive, so ist in jedem Falle

$$\frac{1}{2}(1-\underbrace{-a})+\frac{1}{4}(1+\underbrace{-a^2})(1-\underbrace{-b})\sqrt{(a+bi)^2} = -(a+bi)$$

Beweis.

Der Kürze wegen bezeichnen wir mit τ die Summe $\frac{1}{2}(1-\underbrace{-a})+\frac{1}{4}(1+\underbrace{-a^2})(1-\underbrace{-b})$. Nun ist vermöge der Gleichung 3), wenn wir dort $a^2 - b^2$ für a und 2ab für b setzen:

$$ {}_\tau\sqrt{(a+bi)^2} = {}_\tau\sqrt{a^2} + \underbrace{ab}\,i\,{}_\tau\sqrt{b^2} \tag{41}$$

Wenn nun a positiv, so ist $\tau = 1$ und in diesem Falle

$$ {}_\tau\sqrt{(a+bi)^2} = -a - \underbrace{b}\,i\,{}_0\sqrt{b^2} = -a - \underbrace{b}\,i\,\underbrace{b}\,b = -a - bi$$

Wenn ferner a = 0 und b positiv, so ist $\tau = 1$ und

$$ {}_\tau\sqrt{(a+bi)^2} = 0 + i\,{}_1\sqrt{b^2} = 0 - i\,{}_0\sqrt{b^2} = 0 - bi$$

Wenn aber a = 0 und b negativ, so ist $\tau = 0$ und

${}_\tau\sqrt{(a+bi)^2} = 0 + i\,{}_0\sqrt{b^2} = 0 - bi$, da, wenn b negativ, ${}_0\sqrt{b^2}$ offenbar $= -b$.

Wenn a = 0 = b, so ist jeder der beiden Theile der zu beweisenden Gleichung $= 0$.

Wenn endlich a negativ, so ist $\tau = 0$ und

$$ {}_\tau\sqrt{(a+bi)^2} = {}_0\sqrt{a^2} + \underbrace{-b}\,i\,{}_0\sqrt{b^2} = -a + \underbrace{-b}\,i\,\underbrace{b}\,b = -a - bi.$$

§. 8.

Bezeichnen a, $a_,$, a_2, b, $b_,$, b_2 reelle Zahlen, 0 inclusive, τ und $\tau_,$ aber Zahlen, von welchen jede die Null und jede positive oder negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat, so folgt aus der Gleichung:

$$x^4 + (a+bi)x^2 + (a_, + b_, i)x + a_2 + b_2 i = 0 \tag{42}$$

die vollkommene Gleichung:

$$x = {}_\tau\sqrt{u^2} + {}_{\tau_,}\sqrt{y^2} + {}_\lambda\sqrt{z^2}\ ^{*)} \tag{43}$$

---

*) Die Verwandlung von jeder dieser 3 Wurzelgrössen in eine Complexe lehrt die Gleichung 3).

wo sich die Bedeutung von u, y, z und λ aus folgendem ergibt:

$$\lambda = -\tau_, -\tau + \tfrac{1}{2}(1 - \underbrace{-a_,}) + \tfrac{1}{4}(1 + \underbrace{-a_,^2})(1 - \underbrace{-b_,}) + r_{\arg u^2 + \arg y^2 + \arg z^2} \qquad 44)$$

u^2, y^2 und z^2 sind die 3 Wurzeln der Gleichung:

$$x^3 + \tfrac{1}{2}(a + bi)\,x^2 + \tfrac{1}{16}\left[(a + bi)^2 - 4(a_2 + b_2 i)\right] x - \tfrac{1}{64}(a_, + b_, i)^2 = 0 \qquad 45)$$

Beweis.

I.

Wenn jede der drei Zahlen u^2, y^2 und z^2 verschieden von 0, so hat λ, sobald für τ und $\tau_,$ bestimmte Werthe angenommen werden, stets einen bestimmten aus der Gleichung 43) sich ergebenden Werrh, während dieses λ für die Fälle, da von jenen 3 Zahlen nicht jede verschieden von 0, wegen der Unbestimmtheit von arg 0, unbestimmt bleibt und unabhängig von τ und $\tau_,$ wird. Ich behaupte nun, dass in jedem Falle jeder Werth des zweiten Theils der Gleichung 43) mit einer der folgenden vier Summen übereinstimmt:

$$\left.\begin{array}{r} {}_0\sqrt{u^2} + {}_0\sqrt{y^2} + {}_\nu\sqrt{z^2} = w_, \\ {}_0\sqrt{u^2} - {}_0\sqrt{y^2} - {}_\nu\sqrt{z^2} = w_2 \\ -{}_0\sqrt{u^2} + {}_0\sqrt{y^2} - {}_\nu\sqrt{z^2} = w_3 \\ -{}_0\sqrt{u^2} - {}_0\sqrt{y^2} + {}_\nu\sqrt{z^2} = w_4 \end{array}\right\} \qquad 46)$$

wo, wenn keine der Zahlen u^2, y^2 und $z^2 = 0$, $\nu = \frac{1}{2}(1 - \underbrace{-a_,}) + \frac{1}{4}(1 + \underbrace{-a_,^2})(1 - \underbrace{-b_,}) + r_{\arg u^2 + \arg y^2 + \arg z^2}$, dagegen, wenn nicht jede von den drei Zahlen u^2, y^2 und z^2 verschieden von 0 ist, ν irgend eine bestimmte, aber vollkommen beliebig gewählte positive oder negative ganze Zahl (0 inclusive) bedeutet.

Fassen wir zur Behandlung des ersten dieser 2 Fälle irgend einen der Werthe des zweiten Theils der Gleichung 43) ins Auge, z. B. ${}_\alpha\sqrt{u^2} + {}_\beta\sqrt{u^2} + {}_\lambda\sqrt{z^2}$, so werden wir, erwägend, dass ${}_\alpha\sqrt{u^2}$ nur die Werthe ${}_0\sqrt{u^2}$ und $-{}_0\sqrt{u^2}$, ferner ${}_\beta\sqrt{y^2}$ nur die Werthe ${}_0\sqrt{y^2}$ und $-{}_0\sqrt{y^2}$ haben kann, sogleich finden, dass unter den 4 Summen $w_,$, w_2, w_3 und w_4 gewiss eine vorhanden ist, bei der die Summe der zwei ersten Summanden mit ${}_\alpha\sqrt{u^2} + {}_\beta\sqrt{y^2}$ zusammenfällt. Es sei diese etwa die dritte, nämlich $-\sqrt{u^2} + {}_0\sqrt{y^2} - {}_\nu\sqrt{z^2}$, dann ist, wie leicht einzusehen, $\alpha = 2n + 1$ und $\beta = 2m$, wo n und m positive oder negative ganze Zahlen (0 inclusive) bezeichnen, woraus mit Zuziehung der Gleichung 44) und der Bedeutung von ν folgt, dass jetzt $\lambda = -(2n+1) - 2m + \nu$ ist. Nun findet man ohne Mühe, dass ${}_\lambda\sqrt{z^2}$ oder ${}_{-2n-1+2m+\nu}\sqrt{z^2} = {}_{\nu-1}\sqrt{z^2} = {}_\nu\sqrt{z^2}\,\mathbb{E}^{\pi i} = -{}_\nu\sqrt{z^2}$, mithin ${}_\alpha\sqrt{u^2} + {}_\beta\sqrt{y^2} + {}_\lambda\sqrt{z^2}$ vollständig mit w_3 übereinstimmt. Auf gleiche Weise liesse sich diese Uebereinstimmung nachweisen, wenn die Gleichheit von ${}_\alpha\sqrt{u^2} + {}_\beta\sqrt{y^2}$ mit der Summe der zwei ersten Summanden in $w_{,}$ oder w_2 oder w_4 vorausgesetzt würde.

Im zweiten der oben erwähnten 2 Fälle ist unsere Behauptung für sich klar, wenn $z = 0$ wäre. Ist aber z nicht 0, sondern etwa y, so frägt es sich nur, ob ${}_\alpha\sqrt{u^2} + {}_\beta\sqrt{z^2}$, wo α und β wieder völlig beliebig gewählte Werthe von τ und τ, bezeichnen, mit einer der vier Summen $w_{,}$, w_2, w_3 und w_4 zusammenfällt. Aber diese Frage wird man sogleich bejahend beantworten, wenn man bedenkt, dass ${}_\alpha\sqrt{u^2}$ nothwendig entweder mit ${}_0\sqrt{u^2}$ oder mit $-{}_0\sqrt{u^2}$, und ${}_\beta\sqrt{z^2}$ entweder mit ${}_\nu\sqrt{z^2}$ oder dann mit $-{}_\nu\sqrt{z^2}$ coincidiren muss.

II.

Wir haben jetzt nur noch zu beweisen, dass die vier Summen $w_{,}$, w_2, w_3 und w_4 die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung 42) sind. Zu diesem Zwecke ist es nothwendig und hinreichend, darzuthun, dass folgende 4 Gleichungen Statt finden:

$$w_{,} + w_2 + w_3 + w_4 = 0 \tag{47}$$

$$w_{,}w_2 + w_{,}w_3 + w_{,}w_4 + w_2w_3 + w_2w_4 + w_3w_4 = a + bi \tag{48}$$

$$w_{,}w_2w_3 + w_{,}w_2w_4 + w_{,}w_3w_4 + w_2w_3w_4 = -(a_{,} + b_{,}i) \tag{49}$$

$$w_{,}w_2w_3w_4 = a_2 + b_2 i \tag{50}$$

Die erste dieser Gleichungen wird sofort als richtig erkannt. Den ersten Theil der Gleichung 48) findet man durch sehr einfache Reductionen $= -2(u^2 + y^2 + z^2)$, was nach der Bedeutung von u^2, y^2 und z^2 und der bekannten Eigenschaft des Coefficienten von x^2 in einer Gleichung des dritten Grades gleich $a + bi$ ist.

Ferner findet man, beachtend, dass $w_3 + w_4 = -(w_1 + w_2)$, den zweiten Theil der Gleichung 49) $= (w_1 + w_2)(w_3 w_4 - w_1 w_2)$ $= 2\,{}_0\sqrt{u^2}\left[u^2 - ({}_0\sqrt{y^2} - {}_\nu\sqrt{z^2})^2 - [u^2 - ({}_0\sqrt{y^2} + {}_\nu\sqrt{z^2})^2]\right] = 8\,{}_0\sqrt{u^2}\,.\,{}_0\sqrt{y^2}\,.\,{}_\nu\sqrt{z^2}$ Nun ist, wenn jede der Zahlen u^2, y^2 und z^2 verschieden von 0, nach der Gleichung 9):

$$ {}_0\sqrt{u^2}\,.\,{}_0\sqrt{y^2}\,.\,{}_\nu\sqrt{z^2} = {}_{-\mu+\nu}\sqrt{u^2.y^2.z^2}, \text{ wo } \mu = \Gamma_{\arg u^2 + \arg y^2 + \arg z^2} $$

und da u^2, y^2 und z^2 die Wurzeln der Gleichung 45) sind, mithin $u^2 y^2 z^2 = \frac{1}{64}(a_, + b_, i)^2$ sein muss, so ist auch

$$ {}_0\sqrt{u^2}\,.\,{}_0\sqrt{y^2}\,.\,{}_\nu\sqrt{z^2} = {}_{-\mu+\nu}\sqrt{\tfrac{1}{64}(a_, + b_, i)^2} \qquad 51) $$

Aber aus dieser letztern Gleichung kann man genau so, wie man von der Gleichung 27) auf 28) schloss, auf folgende schliessen:

$$ {}_0\sqrt{u^2}\,.\,{}_0\sqrt{y^2}\,.\,{}_\nu\sqrt{z^2} = \tfrac{1}{8}\;{}_{-\mu+\nu}\sqrt{(a_, + b_, i)^2} $$

Nach der Bedeutung von μ und ν ist nun $-\mu + \nu = \frac{1}{2}(1 - \underbrace{-a_,})$ $+ \frac{1}{4}(1 + \underbrace{-a_,^2})(1 - \underbrace{-b_,})$, und daher nach dem in §. 7 vorgetragenen Lehrsatz ${}_{-\mu+\nu}\sqrt{(a_, + b_, i)^2} = -(a_, + b_, i)$, woraus folgt, dass der 1^te Theil der Gleichung 49), den wir $= 8\,{}_0\sqrt{u^2}\,{}_0\sqrt{y^2}\,{}_\nu\sqrt{z^2}$ fanden, $= -(a_, + b_, i)$ ist, wenn keine der Zahlen u^2, y^2 und z^2 gleich Null ist.

Wenn aber nicht jede der Zahlen u^2, y^2 und z^2 verschieden von 0, so ist offenbar der 1^te Theil der Gleichung 49), oder $8\,{}_0\sqrt{u^2}\,{}_0\sqrt{y^2}\,{}_\nu\sqrt{z^2}$, sowie auch $u^2 y^2 z^2$ und mithin auch $\frac{1}{64}(a_, + b_, i)^2$ gleich 0, woraus sofort die Richtigkeit der Gleichung 49) hervorgeht.

Berechnen wir endlich zur Untersuchung der Gleichung 50) das Produkt aus $\omega_1 \omega_2$ oder $u^2 - ({}_0\sqrt{y^2} + {}_0\sqrt{z^2})^2$ in $\omega_3 \omega_4$ oder $u^2 - ({}_0\sqrt{y^2} - {}_\nu\sqrt{z^2})^2$, so finden wir für den ersten Theil der Gleichung 50): $u^4 + y^4 + z^4 - 2(u^2 y^2 + u^2 z^2 + y^2 z^2)$. Da nun diese Differenz mit $4(u^2 y^2 + u^2 z^2 + y^2 z^2)$ das Quadrat von $(u^2 + y^2 + z^2)$ ausmacht, so ist sie auch $= (u_2 + y^2 + z^2)^2 - 4(u^2 y^2 + u^2 z^2 + y^2 z^2)$; und diese letztere Differenz ist vermöge der Eigenschaften, welche die Coeffizienten von x^2 und x in einer Gleichung des 3^ten Grades besitzen, $= [-\frac{1}{2}(a + bi)]^2 - 4 \cdot \frac{1}{16}[(a + bi)^2 - 4(a_2 + b_2 i)] = (a_2 + b_2 i)$, was noch zu zeigen war.

Anmerkung. Sind x_1, x_2, x_3 und x_4 die Wurzeln der Gleichung

$$(x-\tfrac{1}{4}a)^4+a(x-\tfrac{1}{4}a)^3+b(x-\tfrac{1}{4}a)^2+c(x-\tfrac{1}{4}a)+d=0 \qquad 52)$$

wo a, b, c und d beliebige complexe Zahlen bezeichnen, und nach der Entwicklung das Glied mit x^3 wegfällt, so ist $(x-x_,)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$ gleich dem ersten Theil der Gleichung 52), und zwar für jeden Werth von x. Diese Gleichheit wird daher nicht aufgehoben, wenn $x+\frac{1}{4}a$ durchgehends für x gesetzt wird, woraus sogleich folgt, dass

$$x_,-\tfrac{1}{4}a, \quad x_2-\tfrac{1}{4}a, \quad x_3-\tfrac{1}{4}a, \quad x_4-\tfrac{1}{4}a$$

die Wurzeln folgender Gleichung sind:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0.$$

Sinnstörende Druckfehler.

Seite 39 Zeile 1 v. u. ist $\frac{1}{2}(-a+{}_0\sqrt{a^2+b^2})$ für $-\frac{1}{2}(-a+{}_0\sqrt{a^2+b^2})$ zu setzen.

„ 41 „ 10 v. o. $a+bi$ für $a+b$

„ 41 „ 6 v. u. ist $[2(\tau+\tau_,)\pi+\arg(a_,+b_,i)+\arg(a+bi)]$ für $[2(\tau+\tau_,)\pi+\arg(a_,+b_,i)]$ zu setzen, und überdiess rechts von dieser Zeile: 8)

„ 41 „ 3 v. u. setze man $(a_,+b_,i)$ für $(a_,-b_,i)$

„ 45 „ 15 v. u. soll $[1-\underbrace{\beta}\,\underbrace{\underbrace{\alpha}\,\underbrace{\beta}(\alpha^2\beta_,^2-\alpha_,^2\beta^2)}]$ der 3te eingeklammerte Faktor sein.

„ 45 „ 11 v. u. ist in den Ausdrücken für s und d links von ${}_0\sqrt{p^2+q^2}$ der Faktor $\frac{1}{2}$ zu setzen.

„ 46 „ 9 v. u. lese man: stets für: statt.

„ 48 „ 9 v. o. ist + links von = zu unterdrücken.
