Bemerkungen und Zusätze zum ersten Heft der mathemat. Mittheilungen Herrn Prof. Raabe's.

Von Prof. L. Schläfli in Bern.

Eingesandt den 29. September 1857.

Das erste Kapitel dieser Schrift setzt sich die Erweiterung des Begriffs eines einfachen Integrals auf den Fall, wo seine Integrationsgränzen beliebige complexe Zahlen sind, zum Zweck. Was als Ergebniss der Untersuchung hingestellt wird, kann etwa so ausgedrückt werden: Alle complexen Zahlen mögen durch die Punkte einer Ebene dargestellt werden, welche auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem so bezogen sind, dass die reelle Componente einer Zahl der Abscisse und die imaginäre Componente der Ordinate des zugehörigen Punkts gleich ist. Dann gibt es nur zwei Wege, auf denen die Integration rechtmässig vollzogen werden kann, nämlich die gebrochenen Linien, welche ein Rechteck umschliessen, dessen Seiten mit den Coordinatenaxen parallel sind und welches die zwei den Integrationsgränzen zugehörigen Punkte zu Gegenecken hat. Wird auf jedem der zwei angegebenen Wege das Integral irgendwo divergent, so hat es keinen Sinn; geschieht ihm dieses nur auf einem derselben, so hat man das Integral auf dem andern Wege zu nehmen; und wenn endlich auf keinem der zwei Wege sich eine Stelle findet, wo das Integral divergent wird, so sind beide Auffassungen des Integrals berechtigt und geben auch einen und denselben Werth.

Angesichts dieser Behauptungen dünkt mich nun, der Vorwurf der Willkür, den der Herr Verfasser in seiner Einleitung Cauchy und seinen Nachfolgern hinsichtlich des Uebergangs zwischen zwei complexen Integrationsgränzen macht, etwas stark. Es ist mindestens ebenso willkürlich, wenn man die unzählig vielen Uebergänge oder Integrationswege, welche alle gleiches Recht haben betrachtet zu werden, auf jene zwei oben angegebenen beschränkt, ohne zu bedenken, dass auch diese durch die einfache Substitution $x = e^{i\alpha}y$ (wo α eine reelle Constante, i die imaginäre Einheit und x, y complexe Variabeln bedeuten) sich ändern, indem die Richtungen der Seiten jenes Rechtecks um den Winkel α sich drehen. Zweitens ist es nicht allgemein wahr, dass jene zwei für einzig statthaft ausgegebenen Integrationswege immer den gleichen Werth des bestimmten Integrals geben.

Nehmen wir vorläufig an, der Begriff einer Integralfunction werde durch complexe Gränzen nicht zerstört, — denn wir wissen ja schon, dass er nicht zerstört wird, so oft wir die Integralfunction mittelst der bekannten analytischen Functionen in endlicher Weise ausdrücken können, — und setzen

$$\int f(x)dx = F(x)$$

so haben wir die Formel

$$\int_A^B f(x)dx = F(B) - F(A)$$

für den Fall zu betrachten, wo die unabhängige Variable x complexe Werthe durchläuft, was namentlich dann unvermeidlich sein wird, wenn die Integrationsgränzen A, B complex sind. Der Begriff des Integrals wird nicht gefährdet werden, wenn wir im Stande sind, den ganzen Unterschied F(B) — F(A) als Summe vieler Unterschiede von der Form f(x + h) — f(x), f(x + h + k) — f(x + h), welche überall so klein gemacht werden können, als wir nur wollen, darzustellen. Nehmen wir an, es sei so für zwei verschiedene Integrationswege, und geben dem Ausdruck F(A) am Anfange beider Wege einen und denselben Werth aus den vielen, welche vielleicht analytisch gleich gut möglich sind, so wissen wir dann noch nicht, ob beide Integrationswege an der Endgränze zu einem und demselben Werthe von F(B) führen werden, und dürfen also auch nicht behaupten, dass der Werth des bestimmten Integrals einer und derselbe sei, welchen von den zwei brauchbaren Integrationswegen wir auch wählen mögen, um mit der unabhängigen Variabeln x von der Anfangsgränze bis zur Endgränze zu gelangen. Eine volle Ueberzeugung von der Gleichheit beider Werthe des bestimmten Integrals werden wir vielmehr erst dann bekommen, wenn der eine Integrationsweg durch allmälige Veränderung bis zum andern hin verschoben werden kann, ohne dass einer der zwischenliegenden Integrationswege den Begriff des bestimmten Integrals zerstört und den Werth von F(x) zu einer sprungweisen Aenderung nöthigt. Anders gestaltet sich die Sache, wenn F(x) unendlich gross wird oder ein irrational unendlich klein werdendes Glied enthält — für einen Werth von x, der von beiden Integrationswegen umschlossen wird. Denn um vom einen in den andern überzugehen, muss dann der bewegliche Integrationsweg einmal die gefährliche Stelle durchschneiden, wo F(x) die Anwendung des Taylor'schen Satzes nicht mehr gestattet;

und ohne eine besondere Untersuchung dürfen wir da nicht mehr behaupten, dass das bestimmte Integral $F(B) - F(A)$ für beide äussersten Integrationswege denselben Werth behalte. Im Allgemeinen können wir annehmen, dass die Integralfunction $F(x)$ nur für vereinzelte complexe Werthe von x, nie für eine continuirliche Folge derselben, unendlich gross wird oder andere ähnliche Schwierigkeiten bereitet, dass also auf der symbolischen Ebene nur Punkte (keine Curvenstücke) zerstreut sind, welche dem Durchgang des Integrationsweges Gefahr bringen. Und in diesem Sinne muss $x = \infty$, welches auch die Phase dieses complexen Werthes sein mag, als einzelner Werth gelten; mit andern Worten, alle unendlich entfernten Punkte der symbolischen Ebene sind wie ein und derselbe Punkt anzusehen; also ganz anders als in der Geometrie, wo ihre Gesammtheit als eine gerade Linie aufzufassen ist. Freilich bietet gerade die Function e^x das Beispiel einer Ausnahme dar, indem dieselbe für ein unendlich grosses x entweder den Werth ∞ oder den Werth 0 bekömmt, je nachdem die Phase von x zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, oder zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ liegt, und an den Gränzen $\pm\frac{\pi}{2}$ unbestimmt wird. Dieses ist aber nicht anders zu verstehen, als wie wenn eine Funktion $\varphi(x)$ beim Durchgang der meinetwegen stets reell bleibenden unabhängigen Variabeln x durch einen bestimmten endlichen Werth a plötzlich überspringt; wenn wir uns z. B. a und das unendlich klein werdende ω reell denken, so werden wir für $\varphi(a)$ verschiedene Werthe bekommen, je nachdem wir es als Gränze von $\varphi(a+\omega)$ oder von $\varphi(a-\omega)$ auffassen.

Denken wir uns wiederum die auf der symbolischen Ebene verstreuten Punkte, welche den Integrationsweg gefährden, so ist klar, dass das bestimmte Integral $F(B) - F(A)$ immer einen Sinn hat, wenn nur keine der Integrationsgränzen A oder B auf einen der gefährlichen Punkte fällt; denn der Integrationsweg kann ja immer den gefährlichen Punkten ausweichen. Wenn wir aber zwei verschiedene Integrationswege setzen, die beide bei A anfangen und bei B aufhören, und es ist keine continuirliche Reihe von Integrationswegen mit denselben Enden möglich, welche mit dem einen jener zwei Wege beginnt und mit dem andern aufhört, ohne dass einer oder mehrere der gefährlichen Punkte vom fortrückenden Integrationsweg einmal oder wiederholt geschnitten werden, so müssen wir uns hüten, dem bestimmten Integral für den ersten und letzten Integrationsweg gleiche Werthe zuzuschreiben.

Um zu beurtheilen, welche Wirkung das Hinübergehen des Integrationsweges über eine gefährliche Stelle a weg auf den Werth des bestimmten Integrals ausübt, denken wir uns die Integralfunction $F(x)$ in Bezug auf den complexen Unterschied $x - a$, der so klein als nöthig zu nehmen ist, so entwickelt, wie die Natur der Function, die hier die Anwendung des Taylor'schen Satzes verschmäht, es erfordert. Als Beispiele unendlich werdender Glieder wollen wir folgende setzen:

$(x - a)^{-m}$, wo m eine positive ganze Zahl bedeutet,

$\log(x - a)$, $e^{\frac{c}{x-a}}$, $\int_a^\infty e^{\frac{c}{x-a}} dx$ und endlich $(x - a)^m$, wo m eine reelle gebrochene oder incommensurable Zahl bedeutet.

Wir führen dann den Integrationsweg das eine Mal nahe bei a vorbei, das andere Mal verfolgen wir im Ganzen denselben Integrationsweg, nur führen wir ihn, wenn wir nahe bei a an einer Stelle $a + h$ angelangt sind, von da in einem Kreise, der den gefährlichen Punkt zum Centrum hat, herum wieder auf dieselbe Stelle zurück und setzen dann den alten Integrationsweg fort. Wir nehmen also $x = a + he^{i\vartheta}$ an, denken uns das sehr kleine h, das complex sein mag, constant und integriren für das in den Integrationsweg eingeflickte Stück von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 2\pi$. Dieser ringförmige Functions-Unterschied wird bei $(x - a)^{-m}$, wo m positiv und ganz sein soll, gleich

$$h^{-m}\left(e^{-2im\pi} - 1\right),$$

also Null, d. h. ein rationales Unendlichwerden der Integral-Function bringt keine Veränderung. Bei $\log(x - a)$ bekommen wir $2i\pi$, bei $e^{\frac{c}{x-a}}$ wieder Null. Bezeichnet

$$M = \int e^{\frac{c}{x-a}}\,dx = ih\int_0^{2\pi} e^{\frac{c}{h}\cos\vartheta + i\left(\vartheta - \frac{c}{h}\sin\vartheta\right)} d\vartheta$$

den ringförmigen Functionsunterschied, so ist

$$\frac{dM}{dc} = \int e^{\frac{c}{x-a}}\,\frac{dx}{x-a}$$

und

$$c\frac{dM}{dc} - M = -\int \frac{d}{dx}\left((x-a)e^{\frac{c}{x-a}}\right)\cdot dx$$

gleich dem ringförmigen Functionsunterschied von

$$-\,he^{\frac{c}{h}\cos\vartheta + i\left(\vartheta - \frac{c}{h}\sin\vartheta\right)}$$

also gleich Null. Daher ist $\frac{M}{c}$ eine von c unabhängige Constante, und $\frac{dM}{dc}$ ist diese Constante, für die wir also den Ausdruck

$$i\int_0^{2\pi} e^{\frac{c}{h}(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)} d\vartheta$$

haben, der für $c = 0$ den Werth $2i\pi$ erhält. Also ist $M = 2i\pi c$. Es ergeben sich daraus beiläufig die Integralformeln

$$\int_0^{\pi} e^{k\cos\vartheta} \cos(k\sin\vartheta)\, d\vartheta = \pi,$$

$$\int_0^{\pi} e^{k\cos\vartheta} \cos(k\sin\vartheta - \vartheta)\, d\vartheta = k\pi.$$

In diesen vier Beispielen hatten die zu integrirenden Functionen

$$-m(x-a)^{-m-1},\ (x-a)^{-1},\ \frac{c}{(x-a)^2}e^{\frac{c}{x-a}},\ e^{\frac{c}{x-a}}$$

wenn sie rings um $x = a$ herum auf die gleiche Stelle zurückgeführt wurden, denselben Werth wie im Anfang, wesshalb im zweiten und vierten Beispiele die durch den Integrationsweg sich unterscheidenden Werthe eines und desselben bestimmten Integrals resp. um Vielfache von $2i\pi$, $2i\pi c$ aus einander liegen. Anders verhält sich die Sache im fünften Beispiel $(x-a)^m$, wo m gebrochen oder incommensurabel ist. Der ringförmige Functionsunterschied $h^m(e^{2im\pi} - 1)$ ist dann nutzlos, weil nach der Wiederkehr auch der Differentialquotient einen andern Werth hat als vorher und daher den ganzen Rest des alten Integrationswegs mit einem andern Werth durchläuft. Es ist dabei gleichgültig, ob m positiv oder negativ oder gar complex sei.

Um jetzt noch zu beweisen, dass auch, wenn die Integralfunction unbekannt ist, der Begriff eines bestimmten Integrals $\int f(x)dx$ durch complexe Gränzen A, B oder überhaupt durch einen Integrationsweg in complexem Gebiet nicht zerstört wird, wollen wir zeigen, dass der Werth desselben nicht geändert wird, wenn man den Integrationsweg in einen benachbarten übergehen lässt, so dass jedem Punkt des ersten einer des zweiten Weges in der Weise entspricht, dass der Taylor'sche Satz auf den Uebergangsschritt angewandt werden kann. Wenn h diesen complexen Uebergangsschritt, den wir als eine Function von x zu betrachten haben, welche für $x = A$ und für $x = B$ verschwindet, bezeichnet, so sind

$$\int_A^B f(x)dx \quad \text{und} \quad \int_A^B f(x+h)\,(dx+dh)$$

die zu vergleichenden Integrale. Das zweite, nach dem Taylor'schen Satze entwickelt, wird

$$\int_A^B f(x)dx + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n-1)}(x)dh + \frac{h^n}{n!}\, f^{(n)}(x)dx\right)$$

$$= \int_A^B f(x)dx + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n!}\int_A^B \frac{d}{dx}\left(h^n f^{(n-1)}(x)\right) \cdot dx = \int_A^B f(x)dx,$$

weil die zwischen den Gränzen A und B genommenen Functionsunterschiede von $hf(x)$, $h^2f^{I}(x)$, $h^3f^{II}(x)$ etc. verschwinden. Es erhellt hieraus, dass der Werth des bestimmten Integrals $\int_A^B f(x)dx$ sich nicht continuirlich ändert, wenn der Integrationsweg allmälig geändert wird. Es können also nur sprungweise Aenderungen sich ereignen und zwar nur dann, wenn der fortrückende Integrationsweg an eine Stelle gelangt, wo der Taylor'sche Satz nicht mehr anwendbar ist.

Hinsichtlich der pag. 8 und 9 der erwähnten Abhandlung behaupteten Sätze ist nun deren Richtigkeit unter der pag. 6 gemachten Voraussetzung, dass F(x) eine eindeutige Function sei, freilich ausser allem Zweifel, weil, da F(B) — F(A) nur einen Werth hat, auf jedem Integrationsweg, längs dessen F(x) sich stets continuirlich ändert, dieser einzige Werth für $\int_A^B f(x)dx$ herauskommen muss; aber dann fallen auch die dortigen Einschränkungen weg, und man begreift nicht, wie so der Zweck der Abhandlung, deren Ueberschrift „die Deutung bestimmter einfacher Integrale mit complexen Integrationsgränzen" eine so starke Verengerung des Gesichtskreises nicht ahnen lässt, erreicht ist. Auch widerspricht das sogleich auf die allgemeinen Sätze folgende Beispiel in § 6 der Meinung, dass wirklich die ganze Abhandlung nur eindeutigen Integralfunctionen gewidmet sei, indem das Integral $\int \frac{dx}{1+x^3}$ durch Logarithmen und Kreisbogen ausgedrückt wird, welche keine eindeutigen Functionen sind. Und wenn der Herr Verfasser statt mit dem einen Integrationswege eine der drei gefährlichen Stellen, nämlich $x = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, zu schneiden, dieselbe mit beiden Integrationswegen umschlossen hätte, so würde er gefunden haben, dass der Satz c) in § 5 für diese unendlich vieldeutige Integralfunction irrig ist. Mögen übrigens die Sätze in § 5 gemeint sein wie sie wollen, so ist jedenfalls entschieden zu läugnen, dass, wie es in der Anmerkung am Ende dieses § heisst, „die Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung ein Ende haben», bloss desswegen, weil man die Integrationsgränzen zufällig durch zwei solche Integrationswege verbunden hat, welche beide durch gefährliche Stellen gehen.

Die Funktion $\int e^{x^2}dx$, welche den Integralformeln von § 8 zu Grunde liegt, hat nur eine gefährliche Stelle, $x = \infty$; und für diese ist $\int_0^\infty e^{x^2}dx = \pm i\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ oder $= \infty$, je nachdem die Phase des unendlich gross werdenden x zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{4}$ liegt oder nicht. Die im § angewandten Integrationswege schneiden diese Stelle nicht, sondern zielen nur dagegen hin und zwar innerhalb der zuerst genannten Gegend; daher sind die Formeln dieses § richtig.

Die dem § 9 zu Grunde liegende Integralfunction $\int e^x\frac{dx}{x}$ hat zwei gefährliche Stellen, $x = 0$ und $x = \infty$, und da sie an der ersten Stelle einen Logarithmus zum genäherten Ausdruck hat, so ist sie nicht eindeutig. Da indess die im § gebrauchten Integrationswege die erste Stelle nicht umschliessen und gegen die zweite nur hinzielen, so sind die Integralformeln (d), (e), (f) sämmtlich richtig. Aber die Schlüsse, durch welche die Formeln (g) gewonnen werden, sind unzulässig. Die Integralausdrücke linker Hand in (f) werden nämlich auf dem letzten Stück des Integrationsweges annähernd

$$\int_k^\infty \frac{\cos \lambda x}{x}dx \qquad \int_k^\infty \frac{\sin \lambda x}{x}dx$$

wo die untere Integrationsgränze k eine sehr grosse positive Zahl sein soll. Differentiirt man diese Ausdrücke nach λ, so erhält man $-\int_k^\infty \sin \lambda x \,.\, dx$, $\int_k^\infty \cos \lambda x \,.\, dx$, zwei divergente Integrale, welche uns keine Belehrung geben, wenn wir nach den auf λ bezüglichen Differentialquotienten der linken Seiten in den Gleichungen (f) fragen. Wir müssen vielmehr sagen, die Integralausdrücke linker Hand in (f) sind zwar convergent, weil das positive k immer gross genug angenommen werden kann, dass ihre letzten Stücke, die Componenten von

$$\int_k^\infty e^{i\lambda x} \frac{dx}{x}$$

so klein werden als man nur will. Soll aber dieser Rest des Integrals nach λ differentiirt werden, so muss man ihm die Form

$$\int_{\lambda k}^\infty e^{ix} \frac{dx}{x}$$

geben; man erhält dann

$$\frac{d}{d\lambda}\int_k^\infty \frac{e^{i\lambda x}}{x}\, dx = -\frac{1}{\lambda}\, e^{i\lambda k}$$

oder, was dasselbe ist

$$\frac{d}{d\lambda}\int_k^\infty \frac{\cos \lambda x}{x}\, dx = -\frac{\cos \lambda k}{\lambda}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\int_k^\infty \frac{\sin \lambda x}{x}\, dx = -\frac{\sin \lambda k}{\lambda}$$

So sehr man nun auch die positive Zahl k wachsen lässt, nie werden diese Ausdrücke bleibend absolut kleiner gemacht werden können, als irgend eine gegebene endliche sehr kleine Zahl, sondern immer zwischen endlichen Gränzen hin und her schwanken.

Ueberhaupt ist ein einfaches Integral $\int^{\infty} f(x)\,dx$, dessen Integrationsweg z. B. positive Werthe von x bis ins Unendliche durchläuft, ohne Ausnahme divergent, wenn die positive Zahl k nicht gross genug angenommen werden kann, so dass bei ihrem fernern Wachsen $\int_k^{\infty} f(x)\,dx$ absolut kleiner wird, als irgend eine gegebene endliche sehr kleine Zahl. (Bei einem complexen Werthe hätte man das Absolutkleinsein vom Modul zu verstehen.) Wenn nämlich $\int_k^{\infty} f(x)dx$ nicht so klein wird, als man nur will, so ist offenbar eine annähernde numerische Berechnung des Integrals rein unmöglich.

Die Formeln (g), welche mit der Behauptung zusammenfallen, dass e^{ik} für eine unendlich wachsende positive Zahl k den Werth Null zur Gränze habe, veranlassen mich zu der Bemerkung, dass e^x nicht wohl als eindeutige Funktion von x angesehen werden darf, weil sie für $x = \infty$ verschiedene Werthe annimmt, ein algebraisch unerreichbares Unendlichgross, wenn die Phase von x zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, und ein algebraisch unerreichbares Unendlichklein, wenn diese Phase auf der andern Seite liegt; an der Gränze zwischen beiden Gegenden, wenn die Phase $\pm\frac{\pi}{2}$ ist, d. h. wenn die reelle Componente von x Null oder endlich ist, muss daher der Werth der Function ganz unbestimmt sein.

An das Bisherige knüpfen sich die Bemerkungen, die ich über das vierte Kapitel der mathematischen

Mittheilungen, „Werthung des bestimmten Integrals $\int_0^\infty x^{a-1}\, e^{mx}\, dx$, wo a eine positive, m eine complexe Constante bedeutet," leicht an. Wenn man $-mx$ durch x ersetzt, so verwandelt sich der Ausdruck in

$$(-m)^{-a} \int_0^\infty x^{a-1}\, e^{-x}\, dx,$$

wo der Integrationsweg gegen ein complexes Unendlichgross von derselben Phase mit $-m$ hinzielt. Die Integralfunction hat nur zwei gefährliche Punkte $x = 0$ und $x = \infty$. Der erste wird uns keine Schwierigkeiten bereiten, wenn wir uns nur hüten, den Integrationsweg um den Punkt $x = 0$ herumzuführen. Hinsichtlich des zweiten gefährlichen Punkts müssen wir verlangen, dass die reelle Componente des unendlich wachsenden x nicht negativ werde, weil sonst das complexe endliche k nicht gross genug gemacht werden könnte, damit $\int_k^\infty x^{a-1}\, e^{-x}\, dx$ beliebig klein würde; und wenn im Besondern $a > 1$ ist, so muss aus demselben Grunde geradezu verlangt werden, dass jene reelle Componente positiv sei. Sind diese Bedingungen erfüllt, so darf man den Integrationsweg im Unendlichen noch bis zur Phase o hinführen, ohne dass dadurch der Werth des bestimmten Integrals einen Zuwachs erhält, weil die Differentialquotienten längs dieses Wegstückes von einer algebraisch unerreichbaren Ordnung des Unendlichkleinen sind. Mit dieser Ausdehnung des Integrationswegs bekömmt aber das Integral denselben Werth, wie wenn der Integrationsweg alle positiven Zahlen von Null an bis ins Unendliche durchläuft, d. h. den Werth $\Gamma(a)$. Folglich ist

$$\int_0^{\infty} x^{a-1}\, e^{mx}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{(-m)^a}$$

wenn längs des positiven Integrationswegs auch von der vieldeutigen Function x^{a-1} stets der positive Werth und bei der Potenzirung der complexen Zahl $-m$ (deren reelle Componente positiv sein soll) ihre zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegende Phase genommen wird. Wenn die positive Zahl a kleiner als 1 ist, so ist auch ein rein imaginärer Werth von m gestattet. Denn in diesem Falle kann das positive k immer gross genug gemacht werden, damit

$$\int_k^{\infty} x^{a-1}\, e^{ix}\, dx = -\, i\,(1-a) \int_k^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^{2-a}}\, dx$$

beliebig klein werde.

Ueber die Struktur und Bewegung der Gletscher; von John Tyndall und Thomas H. Huxley.

Aus den Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year 1857 im Auszuge mitgetheilt von **R. Clausius.**

Hiezu Tafel II.

Die schönen Untersuchungen der Hrn. Tyndall und Huxley über die Gletscher müssen ausser dem Interesse, welches sie für die Wissenschaft im Allgemeinen darbieten, für das Land, welches die meisten und grossartigsten Gletscher besitzt, noch einen besondern Werth haben, und ich glaube daher dem wis-