jetzt schon näher einzutreten, schiene ein ziemlich müssiges Geschäft. Ueber den dritten Punkt ihres Gutachtens lautet die Meinung der Unterzeichneten dahin:

1) Dass eine bedeutende Menge von unbenutztem Thermalwasser noch vorhanden ist;

2) Dass Versuche zur Hebung eines Theiles desselben wünschbar wären;

3) Dass mit Vorsicht geführte Stollen oder Bohrarbeiten am meisten Hoffnung auf Erfolg geben.

Sur une série algébrique

par

Georges Sidler, Dr. en phil.

§. 1. Considérons la série

$$1 + 2^m z + 3^m z^2 + 4^m z^3 + \cdots \text{ in inf.}$$

m étant supposé un nombre entier positif.

Pour que cette série soit convergente, il faut et il suffit que la valeur numérique de z soit inférieure à l'unité. En désignant, dans ce cas, par Z_m la somme de la série, on aura entre deux sommes consécutives Z_{m-1} et Z_m la relation

$$Z_m = \frac{d \cdot (z\, Z_{m-1})}{d\, z} \qquad (\alpha)$$

Comme on a d'ailleurs $Z_0 = \frac{1}{1-z}$, on obtiendra successivement

$$Z_1 = \frac{1}{(1-z)^2};\quad Z_2 = \frac{1+z}{(1-z)^3};\quad Z_3 = \frac{1+4z+z^2}{(1-z)^4};$$

$$Z_4 = \frac{1+11\,z+11\,z^2+z^3}{(1-z)^5};$$

et en général pour toutes les valeurs entières de m plus grandes que zéro:

$$Z_m = \frac{a_{m,0} + a_{m,1} z + a_{m,2} z^2 \cdot \cdot \cdot \cdot + a_{m,m-1} z^{m-1}}{(1-z)^{m+1}} \qquad (1)$$

$a_{m,0}$, $a_{m,1}$, ... étant des nombres entiers positifs, qui en vertu de la relation (α) satisfont à l'équation:

$$a_{m,\lambda} = (\lambda + 1)\, a_{m-1,\lambda} + (m - \lambda)\, a_{m-1,} \qquad (2)$$

D'après les valeurs trouvées de Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 on a pour $m = 1, 2, 3, 4$

$$a_{m,\lambda} = a_{m,m-\lambda-1}. \qquad (3)$$

Or, si dans la formule (2) on pose $m - \lambda - 1$ à la place de λ, on se convaincra aisément que cette relation subsiste quelle que soit la valeur de m.

L'intégration de l'équation aux différences finies (2) fournirait l'expression générale de $a_{m,\lambda}$. Mais on arrivera plus promptement à la solution cherchée, si l'on observe qu'on peut mettre l'équation (1) sous la forme

$$a_{m,0} + a_{m,1}z + a_{m,2}z^2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + a_{m,m-1}\, z^{m-1} =$$

$$= (1-z)^{m+1}\,(1 + 2^m z + 3^m z^2 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot),$$

d'où l'on tirera en égalant dans les deux membres les coefficients des puissances semblables de z

$$a_{m,\lambda} = (\lambda + 1)^m - \binom{m+1}{1} \lambda^m + \binom{m+1}{2} (\lambda - 1)^m \qquad (4)$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot (-1)^\lambda \binom{m+1}{\lambda} 1^m,$$

où nous avons designé par $\binom{m+1}{p}$ le coefficient de

x^p dans le développement de $(1+x)^{m+1}$ de sorte que ce symbole équivaut à zéro, lorsque p surpasse $m+1$, de même pour toutes les valeurs négatives de p. Cela posé, on déduit encore de l'identité précédente

$$(5)\qquad o = a_{m,m+r} = (m+r+1)^m - \binom{m+1}{1}(m+r)^m + \\ + \binom{m+1}{2}(m+r-1)^m \cdot \cdot \cdot (-1)^{m+r}\binom{m+1}{m+r} 1^m.$$

r étant un nombre entier positif quelconque inclusivement zéro, et m un des nombres 1, 2, 3, 4 .... in inf.

§. 2. On peut encore représenter le coefficient $a_{m\lambda}$ sous une forme qui diffère essentiellement de l'équation (4).

En effet, concevons que l'on forme toutes les combinaisons des éléments 1, 2, 3 .... n à la classe p, chaque élément étant répété un nombre illimité de fois, et désignons ces différents groupes dans l'ordre de leur rang respectivement par

$$\binom{n}{p}_1, \binom{n}{p}_2; \binom{n}{p}_3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \binom{n}{p}_f;$$

chaque groupe représentant le produit des éléments qui y entrent.

Prenons maintenant dans l'équation (2) successivement $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, . . enfin $\lambda = m - 1$, on aura:

$$a_{m,1} = 2a_{m-1,1} + (m-1)$$
$$a_{m,2} = 3a_{m-1,2} + (m-2)\, a_{m-1,1}$$
$$a_{m,3} = 4a_{m-1,3} + (m-3)\, a_{m-1,2}$$
etc.

Lorsque à l'aide de ces formules on calcule successivement ces coefficients, sans jamais effectuer aucune réduction, on trouvera d'après la notation convenue:

$$a_{\lambda+n,\lambda} = \binom{n}{\lambda}_1 \binom{\lambda+1}{n-1}_f + \binom{n}{\lambda}\binom{\lambda+1}{n-1}_{f-1} \cdot \cdot \cdot \cdot + \binom{n}{\lambda}_f \binom{\lambda+1}{n-1}_1$$

par exemple:

$$\begin{aligned} a_{6,2} = & \; 1 \cdot 1 \times 3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ & + 1 \cdot 2 \times 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \times 1 \cdot 2 \cdot 2 \\ & + 1 \cdot 3 \times 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \times 1 \cdot 1 \cdot 3 \\ & + 1 \cdot 4 \times 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \times 1 \cdot 1 \cdot 2 \\ & + 2 \cdot 2 \times 1 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \times 1 \cdot 1 \cdot 1. \end{aligned}$$

La formule (3) donnera au contraire

$$a_{6,2} = 3^6 - \binom{7}{1} \cdot 2^6 + \binom{7}{2} \cdot 1^6 \, .$$

§. 3. Il résulte de l'équation (2):

$$\sum_{\lambda=0}^{m-1} a_{m,\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{m-1} (\lambda+1)\, a_{m-1,\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{m-2} (m-\lambda)\, a_{m-1,\lambda-1} =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{m-2} \left\{ (\lambda+1)\, a_{m-1,\lambda} + (m-\lambda-1)\, a_{m-1,\lambda} \right\}$$

par suite:

$$\sum_{\lambda=0}^{m-1} a_{m,\lambda} = m \sum_{\lambda=0}^{m-2} a_{m-1,\lambda},$$

d'où l'on concluera, $a_{1,0}$ étant égal à 1,

$$a_{m,o} + a_{m,1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + a_{m,m-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot m \cdot \qquad (6)$$

Or, comme on a $a_{m,m+r} = o$, r étant un nombre entier positif quelconque inclusivement zéro, nous pourrons encore écrire:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot m = \sum_{\lambda=0}^{m+r-1} a_{m,\lambda} \, .$$

Si dans cette dernière formule on remette pour $a_{m,\lambda}$ sa valeur tirée des équations (4) et (5), on trouvera premièrement:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot\cdot m =$$

$$=\sum_{k=0}^{m+r-1}(m+r-k)^m\cdot\left\{1-\binom{m+1}{1}+\binom{m+1}{2}\ldots(-1)^k\binom{m+1}{k}\right\},$$

puis, en ayant égard que le coefficient de $(m+r-k)^m$ sera égal au coefficient de x^k dans le développement de $(1-x)^{-1}(1-x)^{m+1}$, par conséquent égal à $(-1)^k\binom{m}{k}$, on aura définitivement:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot\cdot m =$$

$$(7)\qquad = (m+r)^m - \binom{m}{1}(m+r-1)^m\cdot\cdot\cdot\cdot(-1)^m\binom{m}{m}r^m$$

r étant un nombre entier positif quelconque inclusivement zéro.

§. 4. Décomposant le second membre de l'équation identique

$$1+2^m z+3^m z^2+\cdot\cdot\cdot\cdot = \frac{a_{m,0}+a_{m,1}z\cdot\cdot\cdot\cdot+a_{m,m-1}z^{m-1}}{(1-z)^{m+1}}$$

en fractions simples, on trouvera par les méthodes connues en ayant égard à la formule (3)

$$1+2^m z+3^m z^2\cdot\cdot\cdot\cdot =$$

$$(8)\qquad = \frac{A_{m,m}}{(1-z)^{m+1}}-\frac{A_{m,m-1}}{(1-z)^m}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(-1)^{m-1}\frac{A_{m,1}}{(1-z)^2}$$

où nous avons posé

$$(9)\quad A_{m,\lambda}=\binom{m-1}{\lambda-1}a_{m,0}+\binom{m-2}{\lambda-2}a_{m,1}\cdot\cdot\cdot\cdot+\binom{m-\lambda}{0}a_{m,\lambda-1}.$$

Lorsque dans cette formule on remplace les coefficients $a_{m,r}$ par leurs valeurs tirées de l'équation (4), il vient, après avoir mis $m-\lambda$ à la place de λ:

$$A_{m,m-\lambda} = \sum_{r=0}^{m-\lambda-1}(-1)^r (m-\lambda-r)^m \left\{ \binom{m+1}{r} - \binom{\lambda+1}{1}\binom{m+1}{r-1} + \right.$$
$$\left. + \binom{\lambda+2}{2}\binom{m+1}{r-2} \cdot \cdot (-1)^{r-1} \binom{\lambda+r}{r}\binom{m+1}{0} \right\}$$

Or, le coefficient de $(-1)^r (m-\lambda-r)^m$ y étant équivalent à celui de x^r dans le développement du produit $(1+x)^{m+1} \cdot (1+x)^{-\lambda-1}$, par conséquent égal à $\binom{m-\lambda}{r}$, on en tirera:

$$A_{m,\lambda} = \lambda^m - \binom{\lambda}{1}(\lambda-1)^m + \binom{\lambda}{2}(\lambda-2)^m \ldots (-1)^{\lambda+1}\binom{\lambda}{\lambda-1} 1^m \quad (10)$$

et l'on déduit encore de la formule (9) que l'on a $A_{m,\lambda} = 0$ pour toutes les valeurs de m plus petites que λ.

De l'autre côté, lorsqu'on applique la relation $Z^m = \frac{d \cdot (z \cdot Z_{m-1})}{dz}$ au second membre de l'équation (8), on obtiendrait sans peine:

$$A_{m,\lambda} = \lambda \cdot \left\{ A_{m-1,\lambda} + A_{m-1,\lambda-1} \right\} \quad (11)$$

d'où l'on concluera, que $A_{m,\lambda}$ soit divisible par le produit $1 . 2 . 3 \ldots \lambda$. En effet, posant pour le moment $A_{m,\lambda} = 1 . 2 . 3 \ldots \lambda . \alpha_{m,\lambda}$, il vient $\alpha_{m+r,m} = m . a_{m+(r-1),m} + \alpha_{(m-1)+r,m+1}$. Comme on a d'ailleurs en vertu des formules (9) et (6) $A_{m,1} = 1$ et $A_{m,m} = 1.2.3 \ldots m$, par suite $\alpha_{m,1} = 1$ et $\alpha_{m,m} = 1$, les quantités désignées par $a_{m,\lambda}$ seront toutes des nombres entiers. Ainsi nous aurons:

$$\lambda^m - \binom{\lambda}{1}(\lambda-1)^m + \binom{\lambda}{2}(\lambda-2)^m \cdot \cdot \cdot (-1)^{\lambda-1}\binom{\lambda-1}{\lambda} 1^m$$
$$\equiv 0 \ (\text{mod } 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \lambda), \text{ si } m \geqq \lambda$$
$$\equiv 0 \qquad\qquad , \text{ si } m < \lambda \quad (12)$$

Si dans l'équation (8) on développe le second membre suivant les puissances de z, on aura en égalant de part et d'autre les coefficients des puissances semblables de z

$$(1+r)^m =$$

$$(13) = \binom{m+r}{m} A_{m,m} - \binom{m+r-1}{m-1} A_{m,m-1} \ldots (-1)^{m-1} \binom{1+r}{1} A_{m,1}$$

Lorsqu'on remplace dans cette dernière les quantités $A_{m,1}$, $A_{m,2}$ .... par leurs valeurs tirées de (9), on trouvera, eu égard que $a_{m,m-\lambda-1} = a_{m,\lambda}$.

$$(1+r)^m =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{m-1} a_{m,\lambda} \left\{ \binom{\lambda}{0} \binom{m+r}{m} - \binom{\lambda}{1} \binom{m+r-1}{m-1} \ldots (-1)^\lambda \binom{\lambda}{\lambda} \binom{m+r-\lambda}{m-\lambda} \right\}$$

Observant que le coefficient de $a_{m,\lambda}$ équant au coefficient de x^m dans le produit $(1-x)^\lambda (1-x)^{-r-1}$, cette formule se réduit à

$$(14) \quad (1+r)^m = \binom{m+r}{m} a_{m,o} + \binom{m+r-1}{m} a_{m,1} \ldots \binom{r-1}{m} a_{m,m-1} \ldots$$

m étant un des nombres 1, 2, 3, 4 ... et r un nombre entier positif quelconque inclusivement zéro.

§. 5. Les équations (13) et (14) fournissent plusieurs formules qui représentent les nombres de Bernoulli sous forme finie. En effet, prenons-y successivement $r = 0, 1, 2 \ldots$ et enfin $r = k-1$, il viendra d'abord

$$\sum_{r=1}^{k} r^m = \sum_{\lambda=1} (-1)^{m-\lambda} A_{m,\lambda} \left\{ \binom{\lambda}{0} + \binom{\lambda+1}{1} + \binom{\lambda+2}{2} \ldots + \binom{\lambda+k-1}{k-1} \right\}$$

$$\sum_{r=1}^{k} r^m = \sum_{\lambda=0}^{m-1} a_{m,\lambda} \left\{ \binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} \ldots + \binom{m+k-\lambda-1}{k-\lambda-1} \right\}$$

Or, le coefficient de $(m-1)^{m-\lambda} A_{m,\lambda}$ équivaut à celui de x^{k-1} dans le produit $(1-x)^{-1}(1-x)^{-\lambda-1}$ savoir à $\binom{\lambda+k}{k-1}$; de même le coefficient de $a_{m,\lambda}$ sera égal à $\binom{m+k-\lambda}{k-\lambda-1} = \binom{m+k-\lambda}{m+1}$. Ainsi nous trouvons les deux équations suivantes:

$$1^m + 2^m + 3^m \cdot \cdot \cdot \cdot + k^m = \tag{15}$$

$$= \binom{m+k}{m+1} A_{m,m} - \binom{m+k-1}{m} A_{m,m-1} \cdot \cdot \cdot (-1)^{m-1} \binom{k+1}{2} A_{m,1}$$

et encore

$$1^m + 2^m + 3^m \cdot \cdot \cdot \cdot + k^m = \tag{16}$$

$$= \binom{m+k}{m+1} a_{m,o} + \binom{m+k-1}{m+k} a_{m,1} \cdot \cdot \cdot \cdot + \binom{k+1}{m+1} a_{m,m-1},$$

On a d'ailleurs

$$1^{2n} + 2^{2n} \cdot \cdot \cdot + k^{2n} =$$

$$= (-1)^{n+1} \left\{ B_n k - \binom{2n}{2} B_{n-1} \frac{k^3}{3} \cdot \cdot \cdot \cdot (-1)^{n+1} \frac{k^{2n+1}}{2n+1} \right\}$$

$$1^{2n+1} + 2^{2n+1} \cdot \cdot \cdot + k^{2n+1} =$$

$$= (-1)^{n+1} \left\{ \binom{2n+1}{1} B_n \frac{k^2}{2} - \binom{2n+1}{3} B_{n-1} \frac{k^4}{4} \cdot \cdot \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \cdot \cdot (-1)^n \frac{k^{2n+1}}{2} + (-1)^{n+1} \frac{k^{2n+2}}{2n+2} \right\},$$

en désignant par B_n le n^{me} nombre de Bernoulli, $B_1 = \frac{1}{6}$; $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$ etc., dont la définition générale est donnée par la formule:

$$B_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot 2n \frac{2}{(2\pi)^{2n}} \left\{ 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdot \cdot \cdot \text{ in inf.} \right\}.$$

On concluera de là que le coefficient de k dans le développement des seconds membres des équations

(15) et (16) sera égal, soit à $(-1)^{\frac{m+2}{2}} B_{\frac{m}{2}}$ soit à zéro, suivant que m représente un nombre pair ou un nombre impair plus grand que 1.

Considérons d'abord la première de ces équations. Le coefficient de k dans la factorielle

$$\binom{k+\lambda}{\lambda+1} = \frac{(k+\lambda)(k+\lambda-1)\cdot\cdot\cdot\cdot(k+1)\cdot k}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdot\cdot\cdot(\lambda+1)}$$

sera $\frac{\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot\cdot\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdot\cdot\lambda(\lambda+1)} = \frac{1}{\lambda+1}$. Ainsi le coefficient cherché dans le développement de $\sum_{\lambda=1}^{m}(-1)^{m-\lambda}\binom{k+\lambda}{\lambda+1}A_{m,\lambda}$ sera $\sum_{\lambda=1}^{m}(-1)^{m-\lambda}\cdot\frac{A_{m,\lambda}}{\lambda+1}$, d'où l'on concluera:

$$(17)\quad \begin{cases} \frac{A_{2n,1}}{2} - \frac{A_{2n,2}}{3} + \frac{A_{2n,3}}{4} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot - \frac{A_{2n,2n}}{2n+1} = (-1)^n B_n \\ \frac{A_{2n+1,1}}{2} - \frac{A_{2n+1,2}}{3} + \frac{A_{2n+1,3}}{4} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \frac{A_{2n+1,2n+1}}{2n+2} = 0, \end{cases}$$

n étant un nombre entier positif quelconque plus grand que zéro.

Cherchons enfin le coefficient de k dans le second membre de l'équation (16) ou dans le développement de $\sum_{\lambda=0}^{m-1}\binom{k+m-\lambda}{m+1}a_{m,\lambda}$. Tant que λ désigne l'un des nombres 0, 1, 2, 3 .... (m—1), le coefficient de k dans la factorielle

$$\binom{k+m-\lambda}{m+1} = \frac{(k+m-\lambda)(k+m-\lambda-1)\dots(k+1)k(k-1)\dots(k-\lambda)}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(m+1)}$$

sera évidemment

$$\frac{(m-\lambda)(m-\lambda-1)\ldots 2.1\times 1.2.3\ldots\lambda}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\ldots\cdot(m+1)}=\frac{1}{m+1}\,\frac{(-1)^\lambda}{\binom{m}{\lambda}}.$$

Le coefficient cherché sera donc $\frac{1}{m+1}\sum_{\lambda=0}^{m-1}(-1)^\lambda\frac{a_{m,\lambda}}{\binom{m}{\lambda}}$,

de sorte que nous aurons suivant que m représente un nombre pair ou un nombre impair:

$$\frac{a_{2n,0}}{\binom{2n}{0}}-\frac{a_{2n,1}}{\binom{2n}{1}}+\frac{a_{2n,2}}{\binom{2n}{2}}\;\ldots\ldots-\frac{a_{2n,2n-1}}{\binom{2n-1}{2n}}=(-1)^{n+1}(2n+1)\cdot B_n$$

(18)

$$\frac{a_{2n+1,0}}{\binom{2n+1}{0}}-\frac{a_{2n+1,1}}{\binom{2n+1}{1}}+\frac{a_{2n+1,2}}{\binom{2n+1}{2}}\;\ldots\ldots+\frac{a_{2n+1,2n}}{\binom{2n+1}{2n}}=0$$

n étant un quelconque des nombres 1, 2, 3 … in inf.

Si dans ces formules on écrit d'après l'équation (2) $(\lambda+1)\,a_{m-1,\lambda}+(m-\lambda)\,a_{m-1,\lambda-1}$ à la place de $a_{m,\lambda}$, on en tirera sans peine:

$$\frac{a_{2n-1,0}}{\binom{2n}{1}}-\frac{a_{2n-1,1}}{\binom{2n}{2}}+\frac{a_{2n-1,2}}{\binom{2n}{2}}\ldots+\frac{a_{2n-1,2n-2}}{\binom{2n}{2n-1}}=(-1)^{n+1}(2n+1)B_n$$

(19)

$$\frac{a_{2n,0}}{\binom{2n+1}{1}}-\frac{a_{2n,1}}{\binom{2n+1}{2}}+\frac{a_{2n,2}}{\binom{2n+1}{3}}\;\ldots\ldots-\frac{a_{2n,2n-1}}{\binom{2n+1}{2n}}=0$$

n équant un nombre entier quelconque plus grand que zéro.

On aura, par exemple, d'après ces dernières formules

$$3B_1=\frac{1}{2}$$

$$-5B_2=\frac{1}{4}-\frac{4}{6}+\frac{1}{6}$$

$$+7B_3 = \frac{1}{6} - \frac{26}{15} + \frac{66}{20} - \frac{26}{15} + \frac{1}{6}$$

$$-9B_4 = \frac{1}{8} - \frac{120}{28} + \frac{1191}{56} - \frac{2416}{70} + \frac{1191}{56} - \frac{120}{28} + \frac{1}{8}$$

etc.

On en concluera encore, comme on a en général $\binom{2n}{n+\lambda} = \binom{2n}{n-\lambda}$, que le dénominateur du $n^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli est nécessairement facteur du produit:

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdot\cdot\cdot(2n+1).$$

Notizen.

Aus einem Briefe von Hrn. Dr. Schläfli aus Batum, 19. Mai 1856. ..... So armselig die malacolopische Beute in Constantinopel ausgefallen, so wurde auf der diessmaligen Schwarzenmeerreise mein Sammeleifer um so besser belohnt. Mit dem Vorsatz, Ihnen später mit der Sendung der gesammelten Sachen weitere Details darüber zu geben, begnüge ich mich diessmal nur mit einer kurzen Zusammenstellung der Fundorte: Von Sinope habe ich von meiner ersten Reise noch 4 Spec. (1 Bul., 3 Hel.) mitgebracht. Während einem 8tägigen Aufenthalte im schönen Trapezunt fand ich circa 26 Spec., worunter Sie, wie ich hoffe, recht hübsche Sachen finden werden, namentlich an kleinen zierlichen Helices. In Batum angelangt wurde ich gleich nach Redut-Kaleh beordert, wo ich während 3 Wochen wieder das Lagerleben genoss. Beim ersten Anblick dieses unwirthlichen Dünendorfes versprach ich mir wirklich nicht die 34 Spec., die mir in einigen Tagen in die Hände fielen. (Es sind