Ueber

die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren,

insbesondere

über einen neuen Planimeter.

Von Jakob Amsler.

Die analytische Berechnung des Flächeninhaltes gezeichneter Figuren ist nur dann practisch anwendbar, wenn ihre Umfänge von Geraden oder von Bogenstücken gewisser einfacher Curven gebildet werden. Befolgen die Gränzen dagegen ein complicirtes oder nicht erkennbares Gesetz, so ist man auf die Anwendung von Näherungsverfahren angewiesen. In allen Fällen aber ist die Flächenberechnung mühsam und zeitraubend, was dann besonders fühlbar wird, wenn eine grosse Anzahl von Figuren zu berechnen ist, wie beim Strassen- und Eisenbahnbau und bei den Catastervermessungen.

In neuerer Zeit sind verschiedene Vorrichtungen, sogenannte Planimeter, in Anwendung gebracht oder vorgeschlagen worden, mit deren Hülfe der Flächeninhalt einer ebenen Figur durch ein theilweises oder ganz mechanisches Verfahren gefunden werden kann.

Allein erst durch das von Oppikofer [1]) in Anwendung gebrachte Princip wurde eine Auflösung des Problems angebahnt, welche gehörig durchgeführt allen Anforderungen der Praxis genügen wird. Oppikofer erfand im Jahre 1827 ein Instrument, welches den Inhalt einer Figur bloss durch Umfahren ihres Umfangs mit der Spitze eines Fahrstiftes angiebt. Genau auf die nämliche Idee scheint der bayrische Trigonometer J. M. Herrmann [2]) schon 1814 gekommen zu sein; allein seine Erfindung wurde gänzlich vergessen und von Oppikofer neu gemacht.

Wetli in Zürich machte sich 1849 durch wesentliche Umgestaltung und Verbesserung der Opptikofer'schen Erfindung verdient. Die nach seinem System construirten Instrumente genügen, was ihre Genauigkeit anbetrifft, allen practischen Bedürfnissen und erfreuen sich gegenwärtig einer ziemlich ausgebreiteten Anwendung. — Verschiedene von Andern mit dem Wetli'schen Instrumente vorgenommene Abänderungen sind zum Theil von keinem wesentlichen Belang, zum Theil zweckwidrig.

Letzteres gilt namentlich von dem Decher'schen Planimeter, [3]) welcher indessen in theoretischer Beziehung einiges Interesse darbietet.

Ueber die Einrichtung der von Keller und

---

[1]) Bulletin de la Soc. d'encouragement 1841 und Dingler's Journal Bd. 86; — Wild, 11. Uebersicht der Verhandlungen der technischen Gesellschaft in Zürich; — Wolf, Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1851.

[2]) Man sehe hierüber Bauernfeind's Notiz in Dingler's Journal Bd. 137, pag. 82.

[3]) Dingler's Journal Bd. 136.

Füchtbauer [1]) erfundenen Planimeter ist noch Nichts bekannt geworden.

Der Hauptübelstand, welcher der allgemeinen Verbreitung der nach Wetli's System construirten Planimeter entgegensteht, ist ihr hoher Preis und ihre Schwerfälligkeit. Verfasser bemühte sich, seit er (im Jahre 1849) den Oppikofer'schen Planimeter kennen lernte, ein einfacheres und compendiöseres Instrument zum nämlichen Zweck aufzufinden, sei es nun auf Grundlage des Oppikofer'schen oder eines ähnlichen Principes. Vor zwei Jahren gelang es ihm eine durch ihre Einfachheit überraschende Auflösung der Aufgabe zu finden. Zahlreiche nach dem neuen Systeme ausgeführte Planimeter bewährten sich auch in der practischen Anwendung.

Eine weitere Entwicklung des zu Grunde liegenden Principes führte ausserdem zur Auflösung einiger verwandten Aufgaben, wie z. B. die mechanische Bestimmung der statischen und Trägheits-Momente ebener Figuren.

Der Hauptgegenstand dieser Abhandlung ist die Beschreibung und Theorie der neuen Instrumente; zur Vergleichung aber und um einiger kritischen Bemerkungen willen wurde auch eine kurze Beschreibung und Theorie der Oppikofer'schen und Wetli'schen Planimeter beigefügt.

Der Polarplanimeter.

1.

Das neue Instrument wurde ein Polarplanimeter genannt, weil beim Gebrauch der ganze Apparat sich

[1]) Dingler's Journal Bd. 137. pag. 84.

um einen einzigen festen Punct (den Pol) dreht, während die Planimeter von Oppikofer und Wetli längs einer geraden Bahn geführt werden. — Die Figuren 4, 7, und 8 zeigen drei verschiedene Ansichten des Instrumentes in natürlicher Grösse. Die nämlichen Theile sind überall mit denselben Buchstaben bezeichnet.

Die Hauptheile sind die stählerne Laufrolle D und die beiden Lineale A und B, welche durch die Hülse H mit einander zusammenhängen. Der Lineal A trägt am einen Ende einen verticalen Fahrstift F. Er ist von quadratischem Querschnitt und wird in der Hülse H durch die Reibung festgehalten. Um die Reibung zu vermehren und gleichmässiger zu machen, ist die Hülse an den Enden aufgeschnitten, und die durch die Einschnitte gebildeten Lappen dienen als Federn.

Der Lineal B trägt am einen Ende den Nadeleinsatz E, am andern ist er mittelst der verticalen Axe C mit der Hülse H verbunden.

Die Axe der Rolle D ist parallel mit einer Verticalebene, welche durch die Mitte der Axe C und durch die Spitze des Fahrstifts F geht. Der äusserste Rand der Rolle ist abgerundet und polirt; ihr cylindrischer Limbus ist in 100 oder 200 Grade eingetheilt. Der Stand der Theilung kann mittelst des an der Hülse H angebrachten Nonius O bis auf Zehntelsgrade genau abgelesen werden. Die Zahl der ganzen Umdrehungen wird durch das Rädchen G gezählt, welches von der Axe der Rolle D mittelst einer Schraube getrieben wird. —

Während jeder Messung behält der Stab A in seiner Hülse eine unveränderliche Stellung. Die Entfernung des Fahrstifts von der Axe C bestimmt die

Flächeneinheit, in welcher die Massangaben des Instrumentes ausgedrückt sind. Um den Stab vor dem jedesmaligen Gebrauch gehörig einstellen zu können, ist an seiner obern Fläche eine Theilung angebracht. Als Index derselben dient die in die Verlängerung der Axe C fallende Kante der Hülse H. Das in der Zeichnung dargestellte Instrument giebt den Flächeninhalt in Quadrat-Dezimetern, schweizerischen und englischen Quadratzollen und englischen Quadratfussen und deren Dezimaltheilen.

2.

Um den Flächeninhalt einer Figur z. B. in schweizerischen Quadratlinien zu erhalten, sind folgende Operationen zu machen:

a) Man verschiebt den Stab A in seiner Hülse, bis der mit 0, 1 □' *schw.* bezeichnete Theilstrich mit der Kante M coincidirt.

b) Alsdann setzt man das Instrument so auf die Zeichnung wie Fig. 4 zeigt, dass es nämlich mit der Rolle D, der Nadelspitze E und der Spitze des Fahrstifts F aufsitzt. — Hiebei ist zu berücksichtigen, dass der Punkt E eine unveränderliche Stellung einnehmen muss, während der Stift F die zu messende Fläche umschreibt.

Nachdem man die Spitze E leicht gegen das Papier angedrückt hat, bringt man die Spitze F auf einen beliebigen bezeichneten Punkt des Umfangs der Figur und notirt den Stand der Rolle D (steht z. B. der Index des Scheibchens G auf 7, der Nonius O auf 34, 8, so schreibt man an 7,348).

c) Sodann verfolgt man die Peripherie der Figur mit der Spitze des Fahrstifts in dem Sinne, wie die

Zeiger einer Uhr sich bewegen, bis man auf den Ausgangspunkt zurück kommt, und notirt abermals den Stand der Laufrolle. Die erste Ablesung subtrahirt man von der zweiten.

d) Befindet sich die Spitze E ausserhalb der umfahrnen Figur, so drückt die gefundene Differenz unmittelbar den gesuchten Flächeninhalt aus in derjenigen Flächeneinheit, auf welche der Stab A eingestellt wurde. Im angenommenen Falle entspricht also jede ganze Umdrehung der Laufrolle D einem umfahrnen Flächeninhalt von 0, 1 □'; der einzelne mit dem Nonius abgelesene Zehntel giebt also noch die einzelne Quadratlinie an. — Bei der Einstellung auf 5 □'' *schw.* erhielte man unmittelbar halbe Quadratlinien etc.

Befindet sich dagegen die Spitze E innerhalb der umfahrnen Figur, so hat man zu der auf die oben angegebene Weise bestimmten Differenz noch eine Zahl hinzuzufügen, welche seitlich auf dem Stabe A, zunächst bei dem Theilstrich gravirt ist, auf welchen man eingestellt hat. — Wäre z. B. die Differenz der beiden Ablesungen = 3,457, so wäre die umfahrne Fläche =

18,860 + 3,457 = 22,317 (wo jede Einheit = 0, 1 □')

also = 22317 □'''

3.

Diese Vorschriften bedürfen noch einiger Zusätze und Erläuterungen.

Zu a). Der Stab A muss jedenfalls so weit aus seiner Hülse gezogen werden, dass es möglich ist die vorgelegte Figur zu umfahren, im übrigen wird man, wenn es sich um eine genaue Messung handelt, die Entfernung des Stiftes F von der Axe C möglichst klein wählen, weil dann die Ablesungen um so grösser, daher um so genauer ausfallen. — In der Regel wird man sich für diejenige Einstellung entscheiden, welche keine, oder die einfachste Reductionsrechnung verlangt. — Sollen eingetrocknete Planzeichnungen berechnet werden, so kann der Stab A so gestellt werden, dass die Massangaben keiner Reduction wegen des Eintrocknens bedürfen. (Man vergleiche hierüber das in No. 29 Gesagte.)

Zu b). Wenn die Ausdehnung der zu umfahrenden Figuren es erlaubt, so wird man die Spitze E ausserhalb setzen, weil die Handhabung des Planimeters in diesem Fall bequemer ist. — Den Ausgangspunkt für den Fahrstift kann man so wählen, dass $\llcorner$ FDE nahezu $= 90^0$ ist. — Ist das Blatt, welches die Zeichnung enthält zu klein, um für das Spiel der Rolle D den nöthigen Platz zu gewähren, so legt man es auf ein dazu ausreichend grosses Blatt, oder deckt auf die Zeichnung einen Bogen Strohpapier, auf welchen man sodann den Planimeter setzt. — Es ist zu bemerken, dass im erstern Falle das Spiel der Rolle nicht gestört wird, wenn sie rollend über den Rand des Zeichnungsblattes weggeht.

Zu c). Gerade Strecken des Umfangs kann man unter Anwendung eines kurzen und leichten Lineals, krumme dagegen aus freier Hand oder mit Hülfe eines Curvenlineals verfolgen. — Auf den Ausgangspunkt muss man sehr genau zurück kommen.

Zu d). Umfährt man den Umfang einer Figur von links nach rechts herum, während die Spitze E ausserhalb liegt, so ist die zweite Ablesung immer grösser als die erste und die nach der gegebenen Vorschrift berechnete Differenz positiv. Liegt dagegen E innerhalb, so kann dieselbe auch negativ sein, was bei der Addition der auf dem Stab A gravirten Zahl zu berücksichtigen ist.

Theorie des Polarplanimeters.

4.

In Fig. 1 und 2 bezeichne F die Spitze des Fahrstiftes; E die Nadelspitze, um welche das Instrument beim Spiel sich dreht; C den Punkt in welchem die geometrische Axe des die Stäbe A und B verbindenden Stiftes verlängert, die Zeichnungsebene trifft; D den Punkt, in welchem die Laufrolle das Papier berührt. Ferner sei r = C F die während einer Messung constante Entfernung des Fahrstifts vom Drehpunkt C, R = C E die gleichfalls constante Entfernung dieses Punktes vom Pol E.

Umschreibt der Punkt F eine geschlossene Curve Z, so beschreibt der Punkt C einen Kreisbogen oder eine ganze Kreislinie, je nachdem der Pol E ausserhalb oder innerhalb der Curve liegt, (betrachtet man nur die in den Figuren 1 und 2 angedeutete Verbindung der Linien, so wäre ein Ausnahmefall denkbar, der aber voraussetzt, dass der Winkel E C F $> 180^0$ werden könne, was aber bei dem in Fig. 4 gezeichneten Instrumente nicht eintreten kann). Diese beiden Fälle müssen besonders untersucht werden.

a) Nehmen wir zuerst an, dass der Pol E sich ausserhalb der Figur Z befinde (Fig.2). — Nachdem der

Punkt F den ganzen Umfang durchlaufen hat, befindet sich die Gerade C F wieder in ihrer Anfangslage. Während ihrer Bewegung hat diese Gerade jeden innerhalb der Curve Z liegenden Punkt einmal, oder überhaupt eine ungerade Anzahl Mal getroffen; jeden äussern Punkt dagegen entweder gar nicht oder eine gerade Anzahl Mal. Begegnet die Gerade einem Punkte mehrmals, so findet die Bewegung abwechselnd nach entgegengesetzten Richtungen statt. (Um sich dieses klar zu machen, denke man sich durch den Punkt in beliebiger Richtung eine Gerade P Q gezogen, und untersuche die Bewegung des Punktes, in welchem sie von der beweglichen Geraden C F geschnitten wird.)

b) Es seien C F und L K (Fig. 2) zwei auf einander folgende Lagen der beweglichen Geraden. C F gelangt in die Lage L K durch eine gleichzeitig fortschreitende und drehende Bewegung. Wir ersetzen diese durch zwei einfache Bewegungen, indem wir uns vorstellen, dass die Gerade C F zuerst durch eine parallele Verschiebung in die Lage L J und hernach durch eine Drehung um den Punkt L in die Lage L K gelange. Das Flächenelement C L K F wird also durch die Summe eines Parallelogrammes C F J L und eines Sectors L J K ersetzt (wo jedoch die Summe in algebraischem Sinne zu verstehen ist). Das Parallelogramm werde durch p, der Sector durch s bezeichnet; und man betrachte die Fläche p als positiv, wenn sie bezüglich auf die Tangente des Punktes C auf der entgegengesetzten Seite des Poles E liegt, und wenn ausserdem der Punkt L, von E aus gesehen, sich rechts vom Punkte C befindet; der Sector dagegen werde als positiv angesehen, wenn die Gerade L in die nachfolgende Lage durch eine Drehung von links nach rechts gelangt.

c) Denkt man sich auf diese Weise jedes Flächenelement, welches durch zwei auf einander folgende Lagen der Geraden CF und durch die von ihren Endpunkten durchlaufenen Bogen begränzt wird, in ein Parallelogramm p und einen Sector s zerlegt, so ist leicht einzusehen, dass die Summe

$$\Sigma p + \Sigma s$$

ausgedehnt auf den ganzen von FC durchlaufenen Raum, der von der Curve Z begränzten Fläche gleich ist. Man darf nur bemerken, dass durch abwechselnd entgegengesetzte Bewegungen der Geraden FC auch abwechselnd positive und negative Flächen beschrieben werden, die nach a) jeden innerhalb Z liegenden Punkt eine ungerade Anzahl Mal, jeden ausserhalb liegenden Punkt eine gerade Anzahl Mal enthalten und daher ausserhalb Z sich aufheben, innerhalb Z einfach bleiben.

Man kann sich diese Betrachtung veranschaulichen, indem man die ganze von der Geraden CF durchlaufene Fläche durch parallele Gerade in unendlich schmale Streifen zerlegt. Die Summe der innerhalb eines solchen Streifens PQSR (Fig. 2) fallenden Theile der durch p und s bezeichneten Flächenelemente ist dann offenbar gleich dem in den Streifen hineinfallenden Theil der Fläche Z; anderseits aber ist die Summe aller dieser Streifen gleich der Summe $\Sigma p + \Sigma s$.

Bezeichnet man durch J den Inhalt der Curve Z, so ist demnach

$$J = \Sigma p + \Sigma s \qquad (A)$$

Anmerkung. Will man die Beweisführung strenge machen, ohne die allgemeinen Grundsätze des Infinitesimalcalculs anzuwenden, so darf man nur davon ausgehen, dass das Flächenelement C F K L (Fig. 9.) zwischen den Flächenstücken C F I K L und C F I′ K L enthalten ist, deren jedes gleich der Summe eines Sectors und eines Parallelogrammes ist. — Entsprechend muss im Nachfolgenden angewendet werden, dass wenn der Punkt F der Reihe nach den Bogen F K, die gebrochenen Linien F I K und F I′ K durchläuft, die Rolle D im ersten Fall einen kleinern Bogen abwickelt, als im zweiten, aber einen grössern Bogen als im dritten Fall.

5.

Man nehme nun an, dass mit der Geraden C F eine auf der Zeichnungsebene mit Reibung laufende Rolle verbunden werde, deren Axe parallel zu C F sei. Zur Vereinfachung denken wir uns den Berührungspunkt der Rolle mit der Ebene zunächst auf der Geraden C F selber, etwa in D liegend. — Führt die Gerade die in 4. betrachtete Bewegung aus, so wird die Rolle bloss gleiten oder bloss sich drehen, je nachdem ihre Verschiebung in der Richtung der Rollenaxe oder senkrecht dazu statt findet. Wird die Rolle nach einer beliebigen Richtung geführt, während ihre Axe einer festen Geraden parallel bleibt, so nimmt sie eine theils gleitende, theils rollende Bewegung an, und offenbar ist der von der Rolle abgewickelte Bogen gleich dem senkrechten Abstand der beiden Lagen, welche die Axe zu Anfang und am Ende der Bewegung einnahm. — Ist insbesondere der vom Berührungspunkt der Rolle zurückgelegte Weg gerade und $= \omega$, ψ der Winkel den die Richtung dieses Weges mit der Richtung der Rollenaxe bildet, h der Abstand der Anfangs- und Endlage der Axe, so ist hienach

$$h = \omega \sin \psi.$$

Ersetzt man die stetige Bewegung der Geraden C F abwechselnd durch eine parallele Verschiebung und eine Drehung, wie in 4. b) angegeben wurde, so wickelt die Rolle D bei ihrem Uebergang aus der Lage C F in die Lage L J einen Bogen = h ab, welcher gleich dem senkrechten Abstand der beiden Lagen ist. Hernach, wenn die Gerade L J in die Lage L K übergeht, beschreibt der Berührungspunkt D der Rolle einen Bogen gleich $\varrho\,\varphi$ wo $\varrho = \overline{CD}$ ist und φ den Winkel J L K bezeichnet, um welchen die Gerade sich gedreht hat; die Rolle wird daher den Bogen $\varrho\,\varphi$ abwickeln. Geht also die Gerade F C in die Lage L K über, so ist der ganze von der Rolle abgewickelte Bogen $= h + \varrho\,\varphi$ und folglich

$$u' = \Sigma\, h + \Sigma\, \varrho\, \varphi, \qquad \text{(B)}$$

wo u' den ganzen Bogen bezeichnet, welchen die Laufrolle abwickelt, während der Punkt F die Curve Z umschreibt. Die Summenzeichen beziehen sich auf die sämmtlichen in 4. durch p und s bezeichneten Flächenelemente. — Die Summen sind wieder in algebraischem Sinne zu verstehen; und zwar betrachten wir die Grössen h und p und ebenso die Grössen φ und s gleichzeitig als positiv oder negativ.

Die Formel (B) gilt auch dann noch, wenn der Berührungspunkt der Rolle D nicht auf die Gerade C F fällt, wenn diese nur der Rollenaxe parallel ist; allein dann bezeichnet $\varrho = C\,D_1$ (Fig. 3) die Projection der Entfernung C D auf die Gerade C F. Dreht sich nämlich die Linie C F um C um einen Winkel φ, so beschreibt der Punkt D einen Kreisbogen D D' vom Radius C D, also von der Länge $\overline{CD}\,.\,\varphi$. Die Rollenaxe bildet mit diesem Bogen den Winkel (90^0 — $\llcorner$ DCD_1) und es ist daher

$$\overline{CD} \cdot \varphi . \sin (90^0 - \llcorner DCD_1)$$

der Bogen, den die Rolle bei der Drehung der Geraden F C um den Winkel φ abwickelt, wie aus der zu Anfang dieser Nro. aufgestellten Gleichung h = ω sin ψ folgt. Allein es ist

$$\overline{CD} \cdot \varphi . \sin (90^0 - \llcorner DCD_1) = \overline{CD} \cdot \varphi . \cos \llcorner DCD_1$$
$$= \overline{CD_1} \cdot \varphi = \varrho \varphi,$$

wenn $CD_1 = \varrho$ gesetzt wird.

Ebenso gilt die Formel (B) auch noch, wenn der Punkt D oder D_1 auf die Verlängerung von F C über C hinaus fällt; nur ist dann ϱ als negativ anzusehen.

6.

In dem besondern Fall, wo der Pol E ausserhalb der Curve Z liegt, ist

$$\Sigma s = 0$$

da die Gerade C F (der constante Radius aller Sectoren s) gleiche Drehungen in positivem und negativem Sinne ausgeführt hat, nachdem sie in ihre Anfangslage zurückgekehrt ist. Die Gleichung (A) geht daher über in

$$J = \Sigma p. \qquad (C)$$

Aus demselben Grunde wird in Gleichung (B)

$$\Sigma \varrho \varphi = \varrho \Sigma \varphi = 0,$$

so dass die Gleichung (B) in die folgende übergeht

$$u = \Sigma h.$$

Hieraus erhält man durch Multiplication mit dem constanten Factor r = C F

$$r u = r \Sigma h$$
$$= \Sigma r h.$$

Es ist aber r die Grundlinie, h die Höhe des durch p bezeichneten Parallelogrammes, also p = r h, und vorstehende Gleichung giebt daher

$$r u = \Sigma p$$

Verbindet man diese Gleichung mit (C) so erhält man

$$J = r u \qquad (D)$$

$r u$ stellt den Inhalt eines Rechteckes von der Grundlinie r und der Höhe u vor; folglich ist die von dem Punkte F umschriebene Fläche gleich einem Rechtecke, welches die constante Länge r der beweglichen Geraden F C zur Grundlinie, den von der Rolle D während der Bewegung abgewickelten Bogen u zur Höhe hat.

7.

Im zweiten Fall, wo der Pol E sich innerhalb der umfahrnen Curve Z befindet (Fig. 1), macht die Gerade C F eine ganze Umdrehung, bevor sie in ihre Anfangslage zurückkehrt; an Stelle, dass sie im vorigen Falle gleiche Drehungen in positivem und negativem Sinne ausführt. Die von den Punkten F und C durchlaufenen Curven Z und X (die Kreislinie) zerlegen die Zeichnungsebene in Flächen von zweierlei Art: a) in Flächenstücke, welche von beiden Curven gleichzeitig eingeschlossen oder gleichzeitig ausgeschlossen werden, und b) in Flächenstücke, welche von der einen Curve aus-, von der andern eingeschlossen werden, (also vollständig begränzt sind).

Die Punkte in den Flächenräumen der ersten Art werden offenbar von der beweglichen Geraden F C gar nicht oder eine gerade Anzahl Mal, die Punkte in den Flächenräumen der zweiten Art eine ungerade Anzahl Mal durchlaufen. Es folgt hieraus, dass die Summe der in No. 4. durch Σ P + Σ s bezeichneten Elemente jetzt nicht mehr den Inhalt der Curve Z, sondern nur die Summe der Inhalte der Flächenräume zweiter Art darstellt. Hält man aber das in 4, b) über das Vorzeichen von p und s Gesagte fest, so erscheinen die ausserhalb der Kreislinie X liegenden Flächenstücke hiebei offenbar als positive, die im Kreise liegenden Flächenstücke als negative Summanden; d. h. die Summe Σ p + Σ s ist in diesem Fall die Differenz der von den Curven Z und X begränzten Flächen. Bezeichnet also J den Inhalt von Z, und R = C E den Radius des Kreises X, so ist

$$J - R^2 \pi = \Sigma p + \Sigma s \qquad (E)$$

Man kann sich den Beweis dieser Gleichung anschaulicher machen, wenn man zuerst annimmt, dass die Curve Z den Kreis X ganz einschliesse. —

Die Gleichung (B) gilt in dem vorliegenden Fall unverändert.

8.

In der Gleichung (E) ist

$$\Sigma s = r^2 \pi.$$

Denn die bewegliche Gerade r = F C macht, nach Annahme, eine ganze Umdrehung, bevor sie ihre Anfangslage erreicht. Die algebraische Summe aller von ihr successive beschriebenen Sectoren ist daher ein Kreis vom Radius r. Folglich wird die Gleichung (E)

$$J - R^2\pi = r^2\pi + \Sigma p \qquad (F)$$

Der Term $\Sigma\,\varrho\,\varphi$ in der Gleichung (B) wird $= \varrho\,\Sigma\,\varphi = 2\,\varrho\,\pi$, da die Summe aller Drehungen eine ganze Umdrehung ausmacht. Also geht die Gleichung (B) über in

$$u = \Sigma\,h + 2\,\varrho\,\pi$$

woraus folgt

$$r\,u = \Sigma\,r\,h + 2\,r\,\varrho\,\pi$$

$$\text{oder } r\,u = \Sigma\,p + 2\,r\,\varrho\,\pi \qquad (G)$$

Durch Elimination des Gliedes $\Sigma\,p$ aus den Gleichungen (F) und (G) erhält man

$$J = (R^2 + r^2 - 2\,r\,\varrho)\,\pi + r\,u \qquad (H)$$

Die Parenthese enthält einen von den Dimensionen des Planimeters abhängigen constanten Faktor; also folgt aus vorstehender Gleichung: Befindet sich der Pol E innerhalb der umfahrnen Fläche, so ist diese gleich einer Constanten *plus* einem Rechtecke, dessen Basis CF = r und dessen Höhe gleich dem von der Rolle abgewickelten Bogen ist.

9.

Die in 6) und 8) ausgesprochenen Sätze enthalten die vollständige Theorie des Polarplanimeters. — Bezüglich auf die Eintheilung des Stabes A (Fig. 4) erkennt man daraus Folgendes:

Soll eine ganze Umdrehung der Laufrolle einem Flächeninhalt z. B. von einem Quadratdecimeter entsprechen, so muss, wenn v der Umfang der Rolle ist,

$$r\,v = 1$$

also

$$r = \frac{1}{v}$$

sein, wo r und v in Decimetern auszudrücken sind.

Da die Gleichung (D) nicht von ϱ abhängt, so ist klar, dass wenn der Index der Theilung (die Kante M) in die Verlängerung der Axe C fällt, der Stab A sowohl von der Seite M als von der entgegengesetzten Seite her in die Hülse H gesteckt werden darf, vorausgesetzt, dass diese Theile gehörig symmetrisch construirt sind, und dass man den Pol ausserhalb der zu messenden Figur aufstellt. — Dagegen sind die Constanten für die beiden Stellungen verschieden, wie Gleichung (H) zeigt, indem für die zweite Stellung ϱ negativ ist.

Die Constante $(R^2 + r^2 - 2r\varrho)\,\pi$ in der Gleichung (H) kann leicht construirt werden. Sie ist nämlich gleich einer Kreisfläche, deren Radius so gefunden wird: Man bringe das Instrument in eine solche Stellung, dass die Ebene, welche den äussersten Umfang der Rolle D enthält, erweitert durch die Spitze E geht. Alsdann ist die Entfernung EF der fragliche Radius.

Dieses gilt auch dann, wenn der Berührungspunkt der Rolle mit der Zeichungsebene in die Verlängerung der Geraden CF, oder neben dieselbe fällt. Zum Beweise darf man nur das am Schlusse von No. 5 Gesagte berücksichtigen und anwenden, dass für die Figuren 5 und 6 die Gleichung gilt

$$\overline{EF}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{CE}^2 \pm 2\overline{CF}\,.\,\overline{CD}.$$

10.

Verallgemeinerung der bewiesenen Sätze.

Die im Vorangehenden angestellten Betrachtungen sind einer Verallgemeinerung fähig, die an und für sich merkwürdig ist, ausserdem aber zu einer nähern Würdigung der Fehler führt, welche aus ungenauer Construction des Planimeters entspringen. Einige Andeutungen darüber dürften desshalb hier am Platze sein.

Setzt man an Stelle der in No. 4 bis 9 betrachteten Kreislinie X eine beliebige krumme oder gebrochene, geschlossene oder offene Linie, so gelten die dort gefundenen Resultate auch noch mit geringen Modificationen. Nämlich, bewegt sich der eine Endpunkt C einer Geraden von constanter Länge r = FC auf der beliebigen Curve X, während der andere Endpunkt eine geschlossene Fläche Z umschreibt, so wickelt eine auf der Zeichungsebene laufende Rolle D, deren Axe parallel der beweglichen Geraden, und damit verbunden ist, einen die Fläche Z messenden Bogen u ab, vorausgesetzt, dass die Gerade FC am Anfang und Ende der Bewegung die nämliche Lage einnimmt. Bezeichnet nämlich J den Inhalt von Z, M eine von X abhängige Constante (die auch = o sein kann), so ist

$$J = M + r\,u \qquad (J)$$

Zum Beweise müssen folgende Fälle besonders betrachtet werden.

a) Während der Punkt F die Curve Z umschreibt, durchläuft der Punkt C nur einen Bogen der offenen oder geschlossenen Curve X.

In diesem Falle gelten die Gleichungen (A) und (B) unverändert, indem bei der Herleitung derselben nirgends von der Voraussetzung Gebrauch gemacht wurde, dass X eine Kreislinie bezeichne. Es wurde nur angenommen, dass der Punkt C bei der Bewegung vorwärts und rückwärts den nämlichen Weg durchlaufe.

Im allgemeinen wird in diesem Falle die Gerade CF gleiche positive und negative Drehungen ausführen, und es wird daher wie in No. 6

$$\Sigma\, s = o \qquad \Sigma\, \varrho\varphi = o$$

sein, und es gilt daher noch die Gleichung

$$J = r\, u \tag{K}$$

In singulären Fällen kann die Gerade CF eine ganze Umdrehung vorwärts oder rückwärts ausführen; nämlich dann, wenn die Curve Z und das vom Punkte C durchlaufene Bogenstück eine *gerade* Anzahl gemeinschaftlicher Normalen besitzen, deren zwischen den Fusspunkten enthaltene Stücke gerade = r sind. In einem solchen Fall wird

$$\Sigma\, \varrho\varphi = \pm\, 2\varrho\pi$$
$$\Sigma\, s = \pm\, r^2\pi$$

und man erhält aus den Gleichungen (A) und (B)

$$J = \pm\, (r^2 - 2r\varrho)\,\pi + r\, u \tag{L}$$

b) Die Curve X kann geschlossen sein, und vom Punkte C ganz durchlaufen werden, während der Punkt F die Curve Z umschreibt, und zwar können beide Punkte den Weg im *gleichen Sinne* zurücklegen (z. B. von links nach rechts, vom Innern der betreffenden Curven aus gesehen).

Bezeichnet i den Inhalt der Curve X, so ist in diesem Fall die Gleichung (E) durch folgende zu ersetzen:

$$J - i = \Sigma\, p + \Sigma\, s$$

Die Gleichung (B), nämlich

$$u = \Sigma\, h + \Sigma\, \varrho\, \varphi$$

gilt unverändert.

Führt die Gerade C F gleiche positive und negative Drehungen aus (was aber nur unter der in a) bezeichneten singulären Bedingung statt finden kann) so ist

$$\Sigma\, s = 0\,,\ \Sigma\, \varrho\, \pi = 0$$

also

$$J - i = r\, u \qquad (M)$$

Macht dagegen C F eine ganze Umdrehung, so ist

$$\Sigma\, s = r^2 \pi\,,\ \Sigma\, \varrho\, \varphi = 2\, \varrho\, \pi$$

und obige Gleichungen geben daher

$$J - i = (r^2 - 2\, r\, \varrho)\, \pi + r\, u \qquad (N)$$

c) Die Curven X und Z können beide geschlossen sein, und von den Punkten C und F in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden (gleichfalls ein singulärer Fall).

Die Gleichung (B) gilt auch hier unverändert, dagegen ist die Gleichung (E) zu ersetzen durch

$$J + i = \Sigma\, p + \Sigma\, s$$

Je nachdem die Gerade C F gleiche positive und negative Drehungen ausführt, oder eine ganze Umdrehung macht, ist

$$\Sigma\, s = o \quad , \quad \Sigma\, \varrho\, \varphi = o$$

oder $\Sigma\, s = r^2 \pi \quad , \quad \Sigma\, \varrho\, \varphi = 2\, \varrho\, \pi$

und die vorstehende Gleichung, verbunden mit der Gleichung (B) giebt

$$J + i = r\, u \tag{O}$$

oder

$$J + i = (r^2 - 2\, r\, \varrho)\, \pi + r\, u \tag{P}$$

— Alle vorangehenden Resultate gelten auch dann noch, wenn eine der Curven X oder Z Knoten bildet, vorausgesetzt, dass man den von einer solchen Curve begränzten Flächeninhalt in nachfolgender, auch sonst angenommenen Weise definirt:

Bildet eine Curve Knoten, wie z. B. die in Fig. 28 dargestellte, so kann man sie in Stücke zerlegen, deren jedes für sich einen zusammenhängenden Raum abgränzt. Fallen zwei solche Flächenräume in einander, wie z. B. α und β oder α und γ, so werden sie als übereinander gelagert betrachtet. Diese Flächenräume sind theils als positiv, theils als negativ anzusehen; und zwar nach folgender Regel: Durchläuft ein Punkt die Curve nach ihrem stetigen Zug, so wird er die einzelnen Flächenräume theils rechtläufig (von links nach rechts), theils rückläufig umschreiben. Die Flächenräume der ersten Art (wie α, β, ε) sind als positiv, die der zweiten Art (wie γ und δ) als negativ anzusehen. Die algebraische Summe aller Räume, also in der Figur $\alpha + \beta - \gamma - \delta + \varepsilon$, ist der Inhalt der Curve.

11.

Die Fehler des Planimeters können einmal von einem unrichtigen Spiele der Rolle D, sodann aber davon herrühren, dass die geometrische Anordnung der einzelnen Theile nicht genau die durch die Theorie verlangte ist. — Behält z. B. der Pol E nicht in aller Schärfe eine unveränderliche Stellung, oder spielt die Axe C zu locker zwischen ihren Spitzen, so bewegt sich der Punkt C (Fig. 1 und 2) nicht in aller Strenge auf einer festen Kreislinie; sondern er umschreibt eine sehr schmale und langgestreckte Fläche (in dem in Nro 6 behandelten Fall) oder eine wenig vom Kreise abweichende Fläche (in dem in Nro 7 betrachteten Fall). Sei i im ersten Fall der Inhalt der Fehlercurve, im zweiten Fall ihre Abweichung von der Kreisfläche, so giebt der Planimeter offenbar (nach 10) nicht J, sondern J $\pm$ i an. Dass aber i im Allgemeinen sehr klein ausfallen muss, leuchtet ein, wenn man bedenkt, dass auf den Fahrstift, also auch auf den Punkt C ein Zug bald in einem, bald im entgegengesetzten Sinne wirkt, dass also in der Regel die Fehlercurve Knoten haben wird.

— In gleicher Weise kann man sich den Fehler veranschaulichen, der daraus entspringt, dass die Rolle D, in Folge lockerer Befestigung, etwas in der Richtung ihrer Axe spielen kann; einfacher aber ist es, hiezu die Gleichung (B) anzuwenden. — Bezeichnet λ die Abweichung der Rolle von ihrer mittlern Stellung in der Richtung der Axe, ω den daraus entspringenden Fehler der Abwicklung u, so ist offenbar

$$\omega = \Sigma \lambda \varphi .$$

λ ist sehr klein uud bald positiv bald negativ, und namentlich sind die Abweichungen nach beiden Seiten sehr nahe gleich, wenn die Curve X die Fläche Z durchschneidet.

— Ist endlich die Rollenaxe nicht genau parallel zu

C F, so misst u nicht die von F umschriebene Fläche. Man ziehe durch C (Fig. 10) zur Rollenaxe eine Parallele C F′ und schneide darauf C F′ = C F ab. Umschreibt F die Curve Z so beschreibt F′ eine andere Curve Z′ wovon offenbar der abgewickelte Bogen u den Inhalt misst. — Die Curven Z und Z′ können sich umschliessen, wenn C F eine ganze Umdrehung macht; sie müssen sich aber eine gerade Anzahl Mal durchschneiden, wenn C F gleiche positive und negative Drehungen ausführt. Die Abweichung der Curven Z und Z′ ist um so grösser, je näher sie am Punkte E liegen.

— Am schwierigsten zu schätzen und zu beseitigen sind die aus dem ungenauen Spiel der Rolle D hervorgehenden Fehler. Es wurde vorausgesetzt, dass die Rolle sich nicht dreht, wenn sie in der Richtung ihrer Axe auf dem Papier verschoben wird. Dieses könnte nur dann in aller Schärfe stattfinden, wenn der Rand der Rolle eine absolute Politur besässe und ausserdem die Zapfenreibung gänzlich beseitigt werden könnte. Beide Bedingungen sind aber nur näherungsweise erfüllbar; indessen können die daraus entspringenden Ungleichheiten im Spiel der Rolle fast gänzlich beseitigt werden, wenn man den Rand der Rolle in der Richtung der Axe in passender Weise streift. —

Es versteht sich von selber, dass man vor dem Gebrauch den Planimeter nur einer summarischen Prüfung unterwerfen und untersuchen wird, wie genau er eine Figur von bekanntem Inhalt misst (vergleiche hierüber Nro 2). Die vorliegende Untersuchung der einzelnen Fehlerquellen ist aber für den Mechaniker von Interesse, weil er danach beurtheilen kann, welchen Grad von Sorgfalt er beim adjustiren der einzelnen Theile anwenden muss.

Bemerkungen über die Einrichtung des Polarplanimeters.

12.

1) Wenn der Punkt E ausserhalb der umfahrnen Fläche Z liegt, so ist der von der Rolle D abgewickelte Bogen unabhängig vom Radius CE = R. Man kann daher diesen Radius auch so einrichten, dass er beliebig verlängert werden kann, vorausgesetzt, dass man nur von der genannten Aufstellung Gebrauch machen will.

2) Von der gewählten Form des Instrumentes kann man in mehrfacher Beziehung abgehen. Man kann z. B. die Rolle D neben dem Stab A, statt unter demselben anbringen; allein bei der in Fig. 3 dargestellten Einrichtung ist das Instrument am besten balancirt und die Drehaxen C und E erleiden den geringsten Druck. Ferner kann man den Stab A von beiden Seiten her in die Hülse stecken; nur muss dann der Index für die Theilung genau in die Verlängerung der Axe C liegen, und die für die einzelnen Einstellungen anzuwendenden Constanten müssen für beide Lagen besonders bestimmt werden. — Eine solche Einrichtung ist übrigens praktisch nicht empfehlenswerth, da es äusserst schwierig ist, ein Instrument so zu adjustiren, dass es in beiden Lagen genaue Resultate giebt.

3) Will man den Druck, welcher die Rolle D gegen das Papier presst, reguliren, so kann man

den Stab B über E hinaus verlängern und an die Verlängerung ein Laufgewicht anbringen.

4) Wie in Nr. 10 bewiesen wurde, darf der Punkt C statt einer Kreislinie jede andere vorgeschriebene Bahn durchlaufen. Allein praktisch anwendbar dürfte nur noch etwa die Gerade sein, wiewohl ohne besondern Vortheil.

13.

Die einzige Bedingung in der Construktion des Polarplanimeters, die sich nicht mit jedem beliebigen Grad von Schärfe realisiren lässt (wiewohl den praktischen Anforderungen mehr als genügt werden kann), ist die, dass die Laufrolle sich genau nach dem in Nr. 5 bezeichneten Gesetze bewege. Dieselbe Schwierigkeit stellt sich aber auch bei den nach andern Systemen construirten Planimetern ein; und es ist mir gänzlich unwahrscheinlich, dass überhaupt ein Planimeter zur Berechnung krummlinig begrenzter Figuren hergestellt werden könne, welches nicht mit einem ähnlichen Uebelstande behaftet ist. Um aber wenigstens zu zeigen, dass noch andere Principien existiren, auf welche ein Planimeter basirt werden kann, soll hier eines angeführt werden, welches ich zur Anwendung gebracht habe.

In Fig. 15 bezeichnen CF, CE zwei Lineale, welche bei C durch eine Axe verbunden sind. Bei E ist ein Nadeleinsatz, bei F ein Fahrstift angebracht. Der Stab DD′ ist durch eine Geradführung mit dem Stabe CF unter rechtem Winkel verbunden, und zwar so, dass er seiner Längenrichtung nach sehr leicht verschoben werden kann. Bei D und D′ sind auf dem Papier laufende Rollen mit s c h a r f e m Rande angebracht, deren Axen parallel zu DD′ gestellt sind. Umschreibt der Punkt F eine geschlossene Curve Z, so verschiebt der Stab DD′ sich längs seiner Geradführung um ein gewisses Stück u. Setzt man $\overline{CF} = r$, so ist die umfahrne Fläche $= ru$ oder $= ru + Const.$, je nachdem der Punkt E sich ausserhalb oder innerhalb derselben befindet. Um die Verschiebung ablesen zu können, kann man auf dem Stab $\overline{DD'}$ eine Theilung anbringen, oder mit einer der Leitrollen einen Zeiger verbinden, welcher auf einem getheilten Kreise spielt.

Zum Beweise darf man nur die Betrachtungen der Nr. 4 bis 8 anwenden und bemerken, dass der Stab DD′ seine Stellung gegen den Stab CF nicht ändert, wenn ersterer nach seiner Längenrichtung bewegt wird; dass dagegen, wenn CF parallel zu einer festen Geraden verschoben wird, auch der Stab DD′ sich längs seiner Führung um eine entsprechende Strecke verschiebt.

Ob die Anwendung dieses Principes praktische Vortheile darbietet, wurde durch die etwas flüchtig angestellten Versuche nicht erwiesen.

14.

Die Anwendung der in den Nr. 4—6 abgeleiteten Principien führt noch auf eine eigenthümliche Form des Planimeters, welche von geringem praktischen Werth sein dürfte, aber hier noch angeführt werden mag, weil sie den weiterhin zu beschreibenden Planimetern von Oppikofer und Wetli in der Weise gegenübersteht, dass bei ihm Oppikofer's Kegel und Wetli's Scheibe durch eine Kugel ersetzt sind.

Eine mit Axe versehene Halbkugel K, Fig. 14, rollt auf einer Bahn, und wird durch einen Wagen W gerade geführt. Mit dem Wagen ist ein Stab CF verbunden, welcher sich um eine verticale, verlängert durch den Kugelmittelpunkt gehende, Axe C drehen kann. Der Stab trägt bei F einen Fahrstift, bei C eine auf der Kugelfläche laufende Rolle D, deren Axe parallel zu CF ist, und deren Mittelebene erweitert durch den Kugelmittelpunkt geht.

Umschreibt der Fahrstift F eine geschlossene Figur, so ist deren Inhalt proportional dem von der Rolle D abgewickelten Bogen.

Der Flächenreductor.

15.

Mit dieser Benennung kann man ein sehr einfaches Instrument belegen, welches dazu dient, eine Zeichnung in einen andern Masstab zu übertragen, in der Art aber, dass die Kopie dem Original nicht ähnlich ist, sondern dass nur die einander entsprechenden Flächen proportional sind.

Fig. 20 und 21 zeigen im Grund- und Aufriss ein solches Instrument, welches in Verbindung mit dem Polarplanimeter zur genauern Messung kleiner Figuren dienen kann.

Die Stäbe A und B sind durch die Axe C mit einander verbunden. Der Stab B trägt bei E einen Nadeleinsatz. Bei F ist eine konische Vertiefung in den Stab A gebohrt, welche dazu bestimmt ist, die Fahrstiftspitze eines Planimeters aufzunehmen. In der Nähe von C ist der Stab durchbohrt und die Oeffnung dient einem Glasplättchen als Fassung, dessen Mitte

F' unterhalb durch eine Marke (einen kleinen Kreis) bezeichnet ist. Eine Luppe L dient zur scharfen Einstellung der Marke. Die Mitte der Vertiefung F, der Marke F' und der Axe C liegen in der nämlichen Vertikalebene.

Das Instrument könnte auch so eingerichtet werden, dass die Entfernung CF = r und CF' = r' veränderlich wären.

Setzt man das Instrument so auf eine Zeichnung, dass es mit der Nadelspitze E und den bei F und F' angebrachten Erhöhungen aufsitzt, und umschreibt mit der Marke F' eine geschlossne Fläche Z' vom Inhalt J', während E ausserhalb Z' eine unveränderliche Stellung einnimmt, so umschreibt F eine andere geschlossne Curve Z vom Inhalt J. Zwischen J und J' besteht die durch folgende Gleichung ausgesprochene Beziehung $J : J' = r : r'$.

Ist z. B. $r = 10\,r'$, wie in der Figur, so ist auch $J = 10\,J'$.

Das Instrument gewährt daher den Vortheil, dass man am Planimeter eine zehnmal vergrösserte Ablesung erhält, ausserdem aber den Umfang der zu messenden Figur Z' mit Hülfe von Marke und Luppe genauer verfolgen kann, als mittelst des blossen Fahrstiftes. Das Instrument wird mittelst des bei F aufgesetzten Planimeterfahrstiftes geführt.

Ich muss bemerken, dass Hansen schon früher am Wetlischen Planimeter eine auf Glas gezeichnete Marke nebst Luppe zum Nachfahren der Figuren anbrachte.

16.

Zum Beweise des in Nr. 15 aufgestellten Satzes denke man sich (Fig. 25) in C, E, F', F die Mitten der Axe C, der Nadelspitze E, der Marke F′ und der Vertiefung F (der Spitze des Fahrstifts) projicirt. Umschreibt der Punkt F eine Curve Z, so umschreibt F′ gleichzeitig eine Curve Z′, und C durchläuft einen Kreisbogen X. Ein Flächenelement, welches von zwei successiven Lagen der Geraden CF′F und den dazwischen enthaltenen Bogenstücken der Curven Z und X oder Z′ und X begrenzt wird, kann, wie in Nr. 4 gezeigt wurde, durch die Summe eines Parallelogrammes p oder p′ und eines Sectors s oder s′ ersetzt werden, und man schliesst daraus, dass

$$J = \Sigma p + \Sigma s, \qquad J' = \Sigma p' + \Sigma s'.$$

Da der Punkt ausserhalb den umfahrnen Curven angenommen wurde, so ist

$$\Sigma s = 0 \qquad \Sigma s' = 0$$

also

$$J = \Sigma p \qquad J' = \Sigma p'$$

Je zwei gleichzeitig beschriebene Parallelogramme p und p′, wie FCLJ und F′CLJ′ in Fig. 25, liegen aber zwischen den nämlichen Parallelen, verhalten sich also zu einander wie ihre Grundlinien FC = r und F′C = r′, d. h. es ist

$$p : p' = r : r'$$

also auch, da r und r′ constant sind,

$$\Sigma p : \Sigma p' = r : r'$$

oder

$$J : J' = r : r'$$

Es ist übrigens (nach Nr. 10) klar, dass diese Gleichung auch dann noch gilt, wenn die Kreislinie X durch eine beliebige andere Linie ersetzt wird.

17.

Es folgen hieraus leicht zwei merkwürdige Sätze über Pantographen. Nämlich:

1) Die Einrichtung der gewöhnlichen Form eines Pantographen ist in den Figuren 11 und 12 angedeutet. E bezeichnet das feste Centrum, F den Fahrstift, F'' den Zeichenstift. Soll die übertragene Figur der ursprünglichen ähnlich sein, so müssen die Punkte F E F'' auf einer Geraden liegen. Allein, auch wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so werden doch die Flächen in konstantem Verhältniss reducirt, nämlich im Verhältniss $\overline{CF'} \cdot \overline{F''C'} : \overline{FC} \cdot \overline{F'C'}$.

Fällt das Centrum E in eine Ecke des von den Linealen gebildeten Viereckes, so gilt dieses selbst dann noch, wenn das Viereck kein Parallelogramm, sondern ein beliebiges Trapezoid ist.

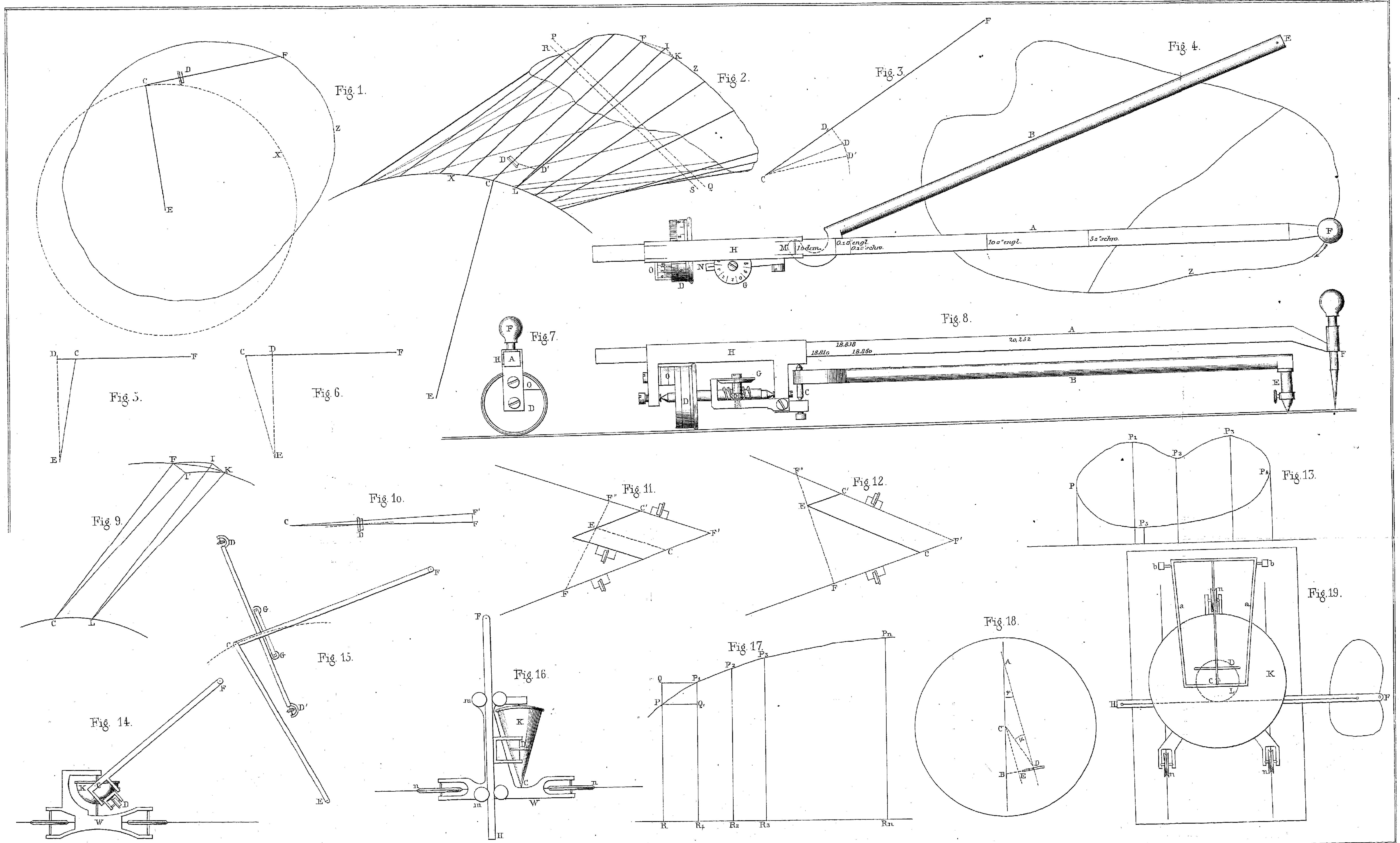
2) Bringt man an irgend einen nicht unmittelbar nach dem festen Centrum gehenden Lineal eine auf der Zeichnungsebene laufende Rolle an, deren Axe parallel mit dem Lineal ist (d. h. parallel mit der Geraden, welche die auf dem Lineal liegenden Drehpunkte verbindet), so misst die Umdrehung der Rolle die vom Fahrstift umschriebene Fläche, und zwar auch in den in 1) bezeichneten Fällen.

Der Beweis beider Sätze lässt sich leicht aus dem Vorangehenden ableiten; er ist in den Figuren 11 und 12 durch die gewählte Bezeichnung angedeutet.

(Schluss folgt.)

Polar-Planimeter von Amsler.

Taf. III



Lith. Anstalt v. J. Wurster u. Comp. in Winterthur.